Exercices du chapitre 16

Révisions sur les graphes, chaînes de Markov

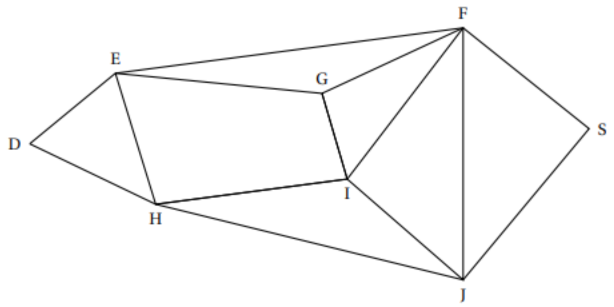
Technique

Exercice 1 - ●○○○ - Vrai / faux

1. Un graphe est connexe si, et seulement si, il n'a aucun sommet isolé.
2. Dans un groupe de vingt enfants, il est impossible que sept d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, neuf d'entre eux en aient exactement 4, et quatre d'entre eux exactement 5.
3. Dans un graphe simple et connexe, il existe toujours au moins deux sommets de même degré.

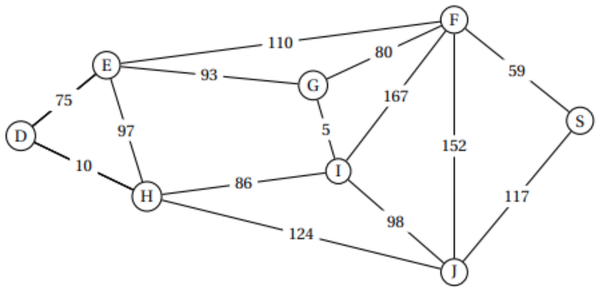
Exercice 2 - ●○○○ - Cyclisme

Un club cycliste se prépare pour une compétition. Le graphe ci-dessous représente l'ensemble des routes empruntables le jour de la compétition.



1. Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule ? Si oui, en donner un.
2. Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule avec le même point de départ et d'arrivée ? Si oui, en donner un.
3. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe, notée M.
4. On donne : $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 11 & 8 & 10 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 8 & 6 & 12 & 11 & 7 \\ 3 & 8 & 8 & 4 & 5 & 9 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 12 & 9 & 10 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 11 & 6 & 6 & 9 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

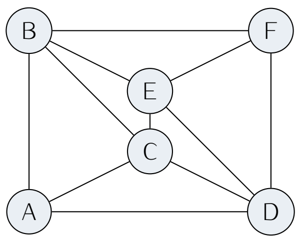
   Un cycliste souhaite aller du point D au point F en empruntant seulement 3 routes. Combien d'itinéraires différents sont possibles ? Les donner tous.
5. Sur le graphe ci-dessous, on a indiqué le temps, en minute, mis par un des cyclistes pour parcourir chacune des routes.



   En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet qu'il doit emprunter pour relier D à S en un temps minimal.

Exercice 3 - ●○○○

On considère le graphe suivant :



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. Ce graphe possède-t-il une chaîne eulérienne ?
3. Justifier que ce graphe ne possède pas de cycle eulérien. Quelle arête ajouter pour qu'il en possède un ?

Entraînement

Exercice 4 - ●●○○ - Connexité 1

Soit $\mathscr{G}$ un graphe non orienté, simple, d'ordre $2p$ tel que le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à p.
Démontrer que $\mathscr{G}$ est connexe.

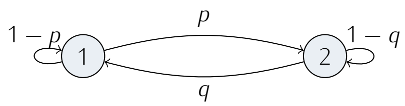
Exercice 5 - ●●●○ - Graphe régulier

On dit qu'un graphe est **régulier** lorsqu'il est simple et que tous ses sommets ont même degré.

1. Que dire de l'ordre d'un graphe régulier dont les sommets sont tous de degré 3 ?
2. Démontrer que pour tout $p \in [\![2; +\infty[\![$, il existe un graphe régulier d'ordre $2p$ dont les sommets sont de degré 3.
3. Écrire une fonction `Python` prenant en argument d'entrée la matrice d'adjacence d'un graphe et renvoyant `True` s'il est régulier, `False` sinon.

Exercice 6 - ●●○○ - Chaîne de Markov à deux états

Soient $p, q \in [0; 1]$. Considérons une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée au graphe suivant, telle que X_0 soit la variable aléatoire constante égale à 1. On note M la matrice de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n son n-ième état probabiliste.



1. Donner la matrice M.
2. Supposons $p = q = 0$.
   - 2.a. Déterminer les états stables de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - 2.b. Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Supposons $p = q = 1$.
   - 3.a. Déterminer les états stables de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - 3.b. Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Supposons $p, q \in]0; 1[$.
   - 4.a. Démontrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un unique état stable et le déterminer.
   - 4.b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de la matrice A.
   - 4.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.
   - 4.d. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n.
   - 4.e. Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 - ●●○○ - Ruine du joueur

Deux joueurs A et B jouent à PILE ou FACE avec une pièce renvoyant PILE avec la probabilité p. Initialement, le joueur A possède a euros et le joueur B en possède b.
A chaque lancer de pièce, si on obtient PILE, le joueur A donne un euro au joueur B ; si on obtient FACE, c'est le joueur B qui donne un euro au joueur A.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire donnant la fortune du joueur A à l'issue du n-ième lancer de la pièce et on admet que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

1. Justifier que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène.
2. Représenter le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov.

Concours

Exercice 8 - ●●○○ - EML 2023 E Sujet 0

On considère trois points A, B, C du plan. L'objectif de l'exercice est l'étude du mouvement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces points.
A l'étape 0, on suppose que le pion est en A. Ensuite, on suppose que le déplacement vérifie les règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "à l'instant n, le pion se situe en A", et l'on définit de la même manière les évènements B_n et C_n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note également $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ le n-ième état probabiliste de cette chaîne de Markov.

Partie I. Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition associée à la chaîne de Markov étudiée. On la notera M.
2. 2.a. Déterminer a_0, b_0, c_0 ainsi que a_1, b_1, c_1.
   2.b. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = V_n \times M$.
   2.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = V_0 \times M^n$.

Partie II. Calcul des puissances de M et applications

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
4. Calculer $A^2 - 5A$. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
5. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
   Calculer la matrice P^{-1}.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
7. La chaîne de Markov introduite admet-elle un état stable ? Si oui, lequel ?
8. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   8.a. Démontrer que $M^n = \dfrac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$.
   8.b. Démontrer que $a_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2}{4^n}\right)$. Déterminer également b_n et c_n.
   8.c. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter ce résultat.

Partie III. Nombre moyens de passage en A et temps d'attente avant le premier passage en B

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire X_n par :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   9.a. Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
   9.b. Calculer l'espérance de X_n.
   9.c. En déduire le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n.
10. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.
    Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.
    10.a. Calculer les probabilités $\mathbb{P}\big([T_B = 1]\big)$ et $\mathbb{P}\big([T_B = 2]\big)$.
    10.b. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D_n l'évènement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$. Justifier que $\mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.
    10.c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}\big([T_B = k]\big)$.
    10.d. Reconnaître alors la loi de T_B. Que dire de l'évènement $[T_B = 0]$? Donner l'espérance de T_B et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 9 - ●●○○ - Ecricome 2024 E

Partie I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n.

1. **Étude du cas $n = 3$.**
   Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   1.a. Justifier que la matrice M est diagonalisable.
   1.b. Calculer $(M + I_3)^2$, puis en déduire un polynôme annulateur de M.
   1.c. Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de M.

Dans les questions qui suivent, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.d. Montrer que P est inversible et que :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$.

1.e. Déterminer les coefficients de la matrice D.

1.f. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$.

1.g. Soit k un entier naturel. On admet qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$.
En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer a_k et b_k.

2. **Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.**
On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$.

2.b. Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n.

2.c. En déduire, pour tout entier naturel k non nul

$$(M_n)^k = c_kJ_n + (-1)^kI_n$$

où :

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i}$$

2.d. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$$

où c_k est le réel défini à la question précédente.

2.e. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe non orienté K_n à n sommets numérotés de 1 à n, dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui-même par une arête.

3. Représenter graphiquement les graphes K_2, K_3, K_4 et K_5.
4. 4.a. Déterminer la matrice d'adjacence du graphe K_n.
   4.b. Dans le graphe K_4, combien existe-t-il de chaînes (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même ?
   On pourra utiliser le résultat de la question 2.e.
5. Déterminer le degré de chaque sommet du graphe K_n.
6. Montrer que le nombre total d'arêtes du graphe K_n est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Partie III

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et K_n le graphe défini dans la partie II. On parcourt les sommets du graphe K_n de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k = 0$, on se trouve sur le sommet numéro 1.
- À chaque étape, on change de sommet en suivant au hasard, avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel on se trouve à la k-ième étape (c'est-à-dire à l'issue du k-ième déplacement). En particulier, X_0 est une variable aléatoire constante égale à 1.
Pour tout entier naturel k, on note V_k la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_k = 1]) & \mathbb{P}([X_k = 2]) & \cdots & \mathbb{P}([X_k = n]) \end{pmatrix}$$

7. Déterminer V_0 et V_1.
8. Déterminer la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
9. 9.a. Rappeler la définition d'un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
   9.b. Soit V la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

   Montrer que V est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

10. 10.a. Pour tout entier naturel k, rappeler sans démonstration une expression de V_{k+1} en fonction de V_k, M_n et n, où M_n est la matrice définie en introduction de la partie I.

    10.b. En déduire, pour tout entier naturel k :
$$V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k$$

    10.c. En utilisant le résultat de la question 2.e, en déduire que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on reconnaitra la loi.

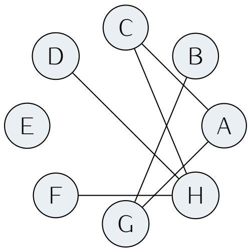
11. Comparer et commenter les résultats des questions 9.b et 10.c.

Exercice 10 – ●●●○ – Graphe aléatoire d'Erdös-Renyi

Toutes les variables aléatoires de l'exercice seront définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $p \in]0; 1[$. Pour construire un graphe aléatoire non orienté d'Erdös-Renyi, on se donne :

- un ensemble de sommet $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$,
- une famille de variables aléatoires $(A_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p,
- des arêtes telles que pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $s_i - s_j$ est une arête du graphe si, et seulement si, $A_{i,j} = 1$.
  Autrement dit, chaque arête possible entre les sommets de $\mathscr{G}$ apparaît avec une probabilité p, de façon indépendante des autres arêtes.

Dans toute la suite, on note $\mathscr{G}_n$ un tel graphe aléatoire d'ordre n.
Exemple. Dans le cas $n = 8$ et $p = 0,2$, on a obtenu le graphe suivant :



1. Quel est le nombre maximal d'arêtes que peut posséder $\mathscr{G}_n$?
2. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def listeAdj(S,p)` qui renvoie la liste des listes d'adjacence d'un tel graphe aléatoire ayant `S` pour liste de sommets.
3. On pose $X_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_{i,j}$.

    3.a. Quelle est la loi suivie par X_n ?

    3.b. Interpréter les valeurs prises par X_n dans le contexte de l'exercice.

    3.c. Rappeler $\mathbb{E}(X_n)$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Soit $k \in [\![1; n]\!]$. On note D_k la variable aléatoire égale au degré du sommet s_k. Déterminer la loi de D_k.
5. On note I_n la variable aléatoire égale au nombre de sommets isolés de $\mathscr{G}_n$. Pour $k \in [\![1; n]\!]$, on note $I_{n,k}$ la variable aléatoire égale à 1 si s_k est isolé, 0 sinon.

    5.a. Quelle est la loi de $I_{n,k}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$?

    5.b. Montrer que $I_n = \sum_{k=1}^{n} I_{n,k}$. En déduire $\mathbb{E}(I_n)$.

    5.c. Montrer que $I_n^2 = \sum_{k=1}^{n} I_{n,k} + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} I_{n,i} I_{n,j}$.

    5.d. Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$ tels que $i < j$. Justifier que $\mathbb{P}\big([I_{n,i} = 1] \cap [I_{n,j} = 1]\big) = (1-p)^{2n-3}$.
    En déduire que $\mathbb{E}(I_n^2) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$.

6. On suppose désormais que $p = p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$, avec $c > 0$ et $c \neq 1$.

    6.a. 6.a.i. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `I(liste)` qui prend un argument la liste des listes d'adjacence d'un graphe, et renvoie le nombre de sommets isolés de ce graphe.

    6.a.ii. On souhaite estimer l'influence de la valeur de c sur le nombre de sommets isolés. En exécutant le script suivant

```
liste2c =[0.3 ,0.5 ,0.7 ,1.3 ,1.5 ,1.7]
n=1000
res =[]

for c in liste2c:
    s=0
    for k in range(200):
        if I(listeAdj(range(1,n+1),c*np.log(n)/n))==0:
            s+=1
    res.append(s/200)
print(res)
```

on obtient la liste `[0.0, 0.0, 0.0, 0.91, 0.975, 0.99]`.
Quelles conjectures peut-on faire lorsque $c < 1$ et $c > 1$?

6.b. Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs discrètes positives admettant une espérance $\mathbb{E}(Y)$. Soit a un réel strictement positif. Considérons la variable aléatoire Z définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } Y(\omega) \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6.b.i. Établir : $Z \leqslant Y$.

6.b.ii. Démontrer alors l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\big([Y \geqslant a]\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$

6.c. 6.c.i. Montrer que $(1-p_n)^{n-1} \sim (1-p_n)^n$ puis que $(1-p_n)^n \sim \dfrac{1}{n^c}$.

6.c.ii. A l'aide de l'inégalité de Markov, déterminer alors les limites de $\mathbb{P}\big([I_n \geqslant 1]\big)$ puis $\mathbb{P}\big([I_n = 0]\big)$ lorsque $n \to +\infty$ dans le cas où $c > 1$.

6.c.iii. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\mathbb{P}\big([I_n = 0]\big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(I_n)}{\mathbb{E}(I_n)^2}$. En déduire que si $c < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([I_n = 0]\big) = 0$.

6.c.iv. Les conjectures faites à la question 6.a.ii sont-elles valides ?

Exercice 11 – ●●●○ – Fait maison

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée de matrice de transition la matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que 1 est valeur propre de ${}^tQ$.
2. **Existence d'un état stable.** Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de ${}^tQ$ pour la valeur propre 1. On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$.
   - 2.a. Démontrer que les composantes du vecteur ${}^tQ|V| - |V|$ sont toutes positives.
   - 2.b. En sommant les composantes du vecteur ${}^tQ|V| - |V|$, démontrer que $|V|$ est vecteur propre de ${}^tQ$ pour la valeur propre 1.
   - 2.c. Justifier alors l'existence d'au moins un état stable pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. **Unicité d'un état stable.** On suppose dans cette question que le graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fortement connexe.
   Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q pour la valeur propre 1. Notons i_0 l'indice tel que $u_{i_0} = \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}(u_i)$.
   - 3.a. Supposons qu'il existe $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $u_{j_0} < u_{i_0}$.
     - 3.a.i. Justifier l'existence d'un entier p tel que $(Q^p)_{i_0,j_0} > 0$.
     - 3.a.ii. Vérifier que U est vecteur propre de Q^p.
     - 3.a.iii. En déduire une contradiction.
   - 3.b. Démontrer finalement que l'espace propre de Q associé à la valeur propre 1 st de dimension 1.
   - 3.c. En déduire l'existence et l'unicité d'un état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12 – ●●●● – Fait maison

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $[\![1;r]\!]$, où r est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note A sa matrice de transition. Pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, on notera $M(i,j)$ le coefficient situé en i-ème ligne et j-ième colonne d'une matrice $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.

1. Supposons que pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, il existe un réel $\mu(j)$, indépendant de i, tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n(i,j) = \mu(j)$. Notons $\mu = \big(\mu(1) \quad \dots \quad \mu(r)\big)$.
   - 1.a. Démontrer que : $\forall j \in [\![1;r]\!],\ \mu(j) \geqslant 0$.
   - 1.b. Démontrer que μ est un état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - 1.c. Soit ν un état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \nu = \nu \times A^n$.
     Démontrer alors que μ est l'unique état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose, dans cette question, que tous les coefficients de A sont strictement positifs. Notons $\delta = \min\big\{A(i,j),\ i,j \in [\![1;r]\!]\big\}$. Pour $j \in [\![1;r]\!]$, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$m_{j,n} = \min\big\{A^n(i,j),\ i \in [\![1;r]\!]\big\} \quad ; \quad M_{j,n} = \max\big\{A^n(i,j),\ i \in [\![1;r]\!]\big\}$$
   - 2.a. Justifier : $r\delta \leqslant 1$.
   - 2.b. Démontrer que, pour tout $j \in [\![1;r]\!]$, la suite $(m_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(M_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   - 2.c. Soit $j \in [\![1;r]\!]$. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_{j,n+1} - m_{j,n+1} \leqslant (1-r\delta)(M_{j,n} - m_{j,n})$.
     Démontrer alors :
     $$\lim_{n\to+\infty} \big(M_{j,n} - m_{j,n}\big) = 0$$
   - 2.d. Que peut-on en déduire sur les suites $(m_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(M_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   - 2.e. En déduire l'existence d'une matrice $\mu = \big(\mu(1) \quad \dots \quad \mu(r)\big)$ telle que :
     $$\forall j \in [\![1;r]\!],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |A^n(i,j) - \mu(j)| \leqslant (1-r\delta)^n$$
   - 2.f. Conclure que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un unique état stable.
3. Cas général. On suppose l'existence d'un entier naturel non nul k tel que tous les coefficients de A^k sont strictement positifs.
   - 3.a. A quelle matrice peut-on appliquer les résultats de la question 2 ?
   - 3.b. Conclure.