16

Calcul

Systèmes linéaires

Introduction...

La notion de système d'équations est ancienne, mais l'interprétation et l'utilisation des systèmes linéaires dans des problèmes de géométrie sont quant à elles plus récentes, et dues à René Descartes (1596-1650, français). On lui doit en effet l'algébrisation de la géométrie grâce à l'utilisation des coordonnées cartésiennes.
Carl Friedriech Gauss (1777-1855, allemand) et Wilhelm Jordan (1845-1899, allemand) fourniront ensuite un algorithme de résolution des systèmes linéaires dans le cas général ; algorithme qui porte aujourd'hui leurs noms.

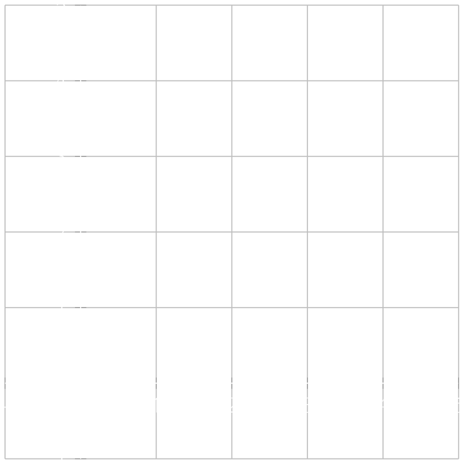
Notons tout de même que la méthode était connue et utilisée en Chine bien avant le XIX$^{\text{ème}}$ siècle : il semblerait que des écrits évoquent cette méthode au II$^{\text{ème}}$ siècle avant JC...

Pour bien démarrer...

1. Considérons l'équation $2x - y = 0$ d'inconnu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   - Qu'est-ce qu'une solution de cette équation ? En déterminer trois.

   - Combien cette équation possède-t-elle de solutions ? Les déterminer.

   - Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de cette équation dans le repère ci-dessous :



2. On rappelle que, dans le plan, toute droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by = c$.
   Autrement dit, si d est la droite d'équation cartésienne $ax + by = c$, alors le point $P(x_P, y_P)$ appartient à d si, et seulement si, $ax_P + by_P = c$.
   Soient a, a', b, b', c, c' des réels. Comment interpréter géométriquement l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$?

Définitions 1 — $\mathbb{R}^n$ et n-uplets

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

D1 On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \ / \ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. On appelle ***n*-uplet** un élément de $\mathbb{R}^n$.

D2 On définit les opérations suivantes :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Cas particuliers :
$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels,
$\mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets de réels,
$\mathbb{R}^4$ l'ensemble des quadruplets de réels...

☞ Pour info...
De la même façon, si E est un ensemble quelconque, on définit $E^n = \{(e_1, e_2, \dots, e_n) \ / \ e_1, \dots, e_n \in E\}$.

I Systèmes linéaires : définitions et premiers exemples

Définitions 2 — Système linéaire, solution

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

D1 On appelle **système linéaire à n équations et p inconnues** un système d'équations de la forme :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\, x_1 & + & a_{1,2}\, x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\, x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\, x_1 & + & a_{2,2}\, x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\, x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n,1}\, x_1 & + & a_{n,2}\, x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\, x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ et b_i sont des réels fixés (les $a_{i,j}$ sont appelés **coefficients** du système et les b_i constituent le **second membre** du système) et $(x_1, \dots, x_p)$ est le p-uplet inconnu.

D2 On dit que S est **homogène** (ou **sans second membre**) lorsque pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ $b_i = 0$.

D3 **Une solution** de (S) est un *p-uplet* $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie **toutes** les équations de (S).

D4 **Résoudre** (S), c'est trouver *tous* les p-uplets de réels qui sont solutions.

D5 Un système qui n'admet qu'une unique solution est appelé **système de Cramer**.

D6 On dit que deux systèmes (S) et (S') sont **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions. On notera $(S) \iff (S')$.

Remarque
Tout système linéaire homogène a au moins une solution :

Exemples 1

E1 $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ \quad - y + z = 0 \end{array} \right.$ est un système linéaire homogène à 2 équations et 3 inconnues.
En voici des solutions :

Remarque
Il y a un implicite sur l'ordre du triplet (qui a toute son importance !) : on considère que c'est l'ordre alphabétique ou l'ordre d'indexation des inconnues.

E2 $\left\{ \begin{array}{l} x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ x - \ \ y + \ \ z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{array} \right.$ est un système linéaire non homogène à 3 équations et 3 inconnues. Il n'a aucune solution car

E3 Résolvons le système $\left\{ \begin{array}{r} x + y + \ \ z = 1 \\ y - 2z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right.$:

Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Considérons un système linéaire à n équations et p inconnues, noté (S), dont on suppose connaître une solution particulière, notée $(x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{pp})$. On note (S_0) le système homogène associé à (S).
Soient $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. On a :

$$
\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_p) \text{ est solution de } (S) \quad &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \\ &\vdots& \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &=& b_n \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& a_{1,1}x_{1p} + a_{1,2}x_{2p} + \cdots + a_{1,p}x_{pp} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& a_{2,1}x_{1p} + a_{2,2}x_{2p} + \cdots + a_{2,p}x_{pp} \\ &\vdots& \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &=& a_{n,1}x_{1p} + a_{n,2}x_{2p} + \cdots + a_{n,p}x_{pp} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}(x_1 - x_{1p}) + a_{1,2}(x_2 - x_{2p}) + \cdots + a_{1,p}(x_p - x_{pp}) &=& 0 \\ a_{2,1}(x_1 - x_{1p}) + a_{2,2}(x_2 - x_{2p}) + \cdots + a_{2,p}(x_p - x_{pp}) &=& 0 \\ &\vdots& \\ a_{n,1}(x_1 - x_{1p}) + a_{n,2}(x_2 - x_{2p}) + \cdots + a_{n,p}(x_p - x_{pp}) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left(x_1 - x_{1p}, x_2 - x_{2p}, \dots, x_p - x_{pp}\right) \text{ est solution de } (S_0) \\
&\iff (x_1, \dots, x_p) - (x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{pp}) \text{ est solution de } (S_0)
\end{aligned}
$$

Nous venons donc d'établir le résultat suivant :

Théorème 1 — **Ensemble des solutions**

Soient (S) un système linéaire de n équations à p inconnues possédant au moins une solution et (S_0) le système linéaire homogène associé.
Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de (S) et $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des solutions de (S_0). Si X_p désigne un p-uplet solution particulière de (S), alors :

$$\mathcal{E} = \left\{X_p + X_0 \ / \ X_0 \in \mathcal{E}_0\right\}$$

Autrement dit : les solutions de (S) sont les p-uplets obtenus en faisant la somme d'*une* solution particulière de (S) et de *toutes* les solutions de (S_0).

solution générale du système	=	solution particulière	+	solution générale du système homogène

> **☞ Pour info...**
> Nous verrons un résultat analogue dans le chapitre sur les équations différentielles. Ce résultat est en fait adaptable à toutes les équations linéaires et il sera moins lourd de le démontrer après avoir introduit les matrices...

Ce théorème justifie l'enjeu du système homogène associé à un système linéaire : l'ensemble des solutions de (S_0) fournit quasiment, ou en tout cas, fournit la structure de l'ensemble des solutions de (S).
Précisons donc un peu l'ensemble des solutions des systèmes linéaires homogènes avec le théorème suivant :

Théorème 2 — **Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène**

Soient (S_0) un système linéaire homogène et $\mathcal{E}_0$ l'ensemble de ses solutions.

T1 Si X et X' sont des solutions de (S_0), alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu X'$ est encore une solution. Autrement dit :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \ \forall X, X' \in \mathcal{E}_0, \ \ \lambda X + \mu X' \in \mathcal{E}_0$$

T2 (S_0) a soit une unique solution soit une infinité.

> **Vocabulaire**
> On dit que $\lambda X + \mu X'$ est une **combinaison linéaire** de X et X' ; et que $\mathcal{E}_0$ est **stable par combinaisons linéaires**.

⋆ Démonstration :

T1. Aucune difficulté, il suffit d'écrire les choses (un peu lourd à écrire, certes).

T2. Découle immédiatement du point précédent :

- Soit le p-uplet $(0, 0, \dots 0)$ est seule solution du système ;
- Soit on considère $X \neq (0, 0, \dots, 0)$ une autre solution. Dans ce cas, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le p-uplet λX est encore solution : d'où l'infinité.

⋆

Et le corollaire immédiat des deux théorèmes précédents :

Théorème 3 — **Nombre de solutions d'un système linéaire**

Un système linéaire a soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

II En route vers la résolution !

II.1 Systèmes triangulaires et échelonnés

Définitions 3 — **Systèmes triangulaires et échelonnés**

D1 Le système (S) est **triangulaire** lorsque $n = p$ et que, quitte à réordonner les inconnues, il est de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}\,x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}\,x_n & = & b_n \end{cases}$$

D2 Le système (S) est **échelonné** lorsque $n < p$ et que, quitte à réordonner les inconnues, il est de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & & a_{n,n}\,x_n & + \; \cdots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{cases}$$

Propriétés 1

P1 Si :

- ✓ (S) est triangulaire,
- ✓ $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$ (coefficients diagonaux non nuls) ;

alors (S) possède une unique solution.

P2 Si :

- ✓ (S) est échelonné,
- ✓ $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$;

alors (S) possède une infinité de solutions.

Important !
L'hypothèse "$\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$" est indispensable pour conclure ! En effet, le système $\begin{cases} x+y+z=0 \\ z=0 \\ z=1 \end{cases}$ est triangulaire mais ne possède aucune solution ; alors que $\begin{cases} x+y+\ z=0 \\ z=0 \\ 2z=0 \end{cases}$ est triangulaire mais possède une infinité de solutions...

⋆ Démonstration : Résultats assez immédiats qui découlent du fait que, dans chaque cas, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$. La démonstration dans le cas général ne fait que généraliser ce que nous verrons dans les cas particuliers des exemples suivants. ⋆

♣ Méthode 1 ♣ **Pour résoudre un système triangulaire dans le cas où "$\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$"**, il suffit de "remonter" pour obtenir la valeur de chaque inconnue...

Exemple 2

On obtient immédiatement que le système $\begin{cases} -2x+\ y+3z=0 \\ -3y+2z=0 \\ 4z=0 \end{cases}$ admet le triplet $(0,0,0)$ comme unique solution.

♣ Méthode 2 ♣ **Pour résoudre un système échelonné dans le cas où "$\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$"**, on transfère sur chaque ligne les inconnues x_{n+1} à x_p (**inconnues secondaires**) au membre de droite, puis on le traite comme un système triangulaire ! On exprime alors pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, l'inconnue x_i comme combinaison linéaire des inconnues $x_{n+1}, \dots, x_p$ et de b_i.

Exemples 3

E1 Résolvons le système $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ y-\ z=0 \end{cases}$.

E2 Résolvons le système $\begin{cases} t+x+y+z=0 \\ -2t+y=0 \end{cases}$.

E3 Résolvons le système $\begin{cases} -t+x+y=0 \\ 3t+z=0 \end{cases}$.

Remarques
• La première étape, consistant seulement à réordonner les inconnues, permet de mettre le système sous forme échelonnée avec "$\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$".
• Nous n'avons pas toujours le choix des inconnues secondaires...

On voit donc l'intérêt des systèmes triangulaires et échelonnés : ils se résolvent très facilement. L'objectif est donc, quand on a un système linéaire, de savoir si l'on peut le transformer en un système triangulaire ou échelonné qui lui soit équivalent et si oui, comment faire !

II.2 Méthode du pivot de Gauss

Définitions 4 — Opérations élémentaires

On considère un système (S) à n équations et p inconnues dont les lignes sont numérotées $L_1, \dots, L_n$. Les **opérations élémentaires** sur les lignes de (S) sont :

D1 échanger les lignes i et j : $L_i \leftrightarrow L_j$

D2 multiplier la ligne i par un réel a **non nul** : $L_i \leftarrow aL_i$

D3 ajouter b fois la ligne j à la ligne i : $L_i \leftarrow L_i + bL_j$

Remarque
Il est donc possible d'effectuer l'opération $L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$ à condition que $a \neq 0$.

On admet le résultat suivant, qui pourra être démontré à l'aide des matrices...

Propriété 2

Soit (S) un système linéaire. Tout système obtenu par une successions d'opérations élémentaires sur les lignes de (S) est un système équivalent à (S).

Important !
Cette propriété est fondamentale pour la résolution des systèmes linéaires : elle garantit que les opérations élémentaires sont des bons outils à utiliser pour la résolution de systèmes linéaires.

La **méthode (du pivot) de Gauss** consiste à utiliser les opérations élémentaires sur les lignes pour trouver un système triangulaire ou échelonné qui soit équivalent au système initial. La fin de la résolution sera alors immédiate...

Même si, dans des cas particuliers, il peut-être plus aisé de résoudre "de façon astucieuse" un système, le cas général a l'avantage de fournir un **algorithme** qui fonctionne toujours et qui est programmable.

Voici **l'algorithme du pivot de Gauss**, dont le processus se déroule en deux étapes :

1. On choisit le premier **pivot**, c'est-à-dire un coefficient non nul associé à l'inconnue x_1 :
   - Si $a_{1,1} \neq 0$, on le choisit comme premier pivot.

- Si $a_{1,1}=0$, alors on parcourt les autres coefficients de x_1, c'est-à-dire les $a_{1,j}$ pour $j\in[\![2;n]\!]$ (de haut en bas) jusqu'à en trouver un qui soit non nul. Une fois ce j trouvé [1], on effectue l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.
Dans le nouveau système (S') obtenu, le coefficient $a'_{1,1}$ est non nul : on le choisit comme pivot.

2. Pour tout $j\in[\![2;n]\!]$, on effectue l'opération $L_j \leftarrow a'_{1,1}L_j - a'_{j,1}L_1$ qui permet d'obtenir un coefficient nul devant x_1 sur la ligne numéro j.

[1] Il y a forcément au moins un j qui convient, sinon l'inconnue x_1 n'apparaitrait pas dans le système !

✓ Rigueur !
La première étape était donc nécessaire pour garantir que $a'_{1,1}\neq 0$.

On obtient ainsi un système équivalent au système initial de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} a'_{1,1}\,x_1 & + & a'_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a'_{1,p}\,x_p & = & b_1 \qquad (L_1)\\ 0 & + & \left(a'_{2,2}-a'_{2,1}a'_{1,2}\right)\,x_2 & + & \dots & + & \left(a'_{2,p}-a'_{2,1}a'_{1,p}\right)\,x_p & = & b'_2-a'_{2,1}b'_1 \quad (L_2)\\ & & & & & & & \vdots & \\ 0 & + & \left(a'_{n,2}-a'_{n,1}a'_{1,2}\right)\,x_2 & + & \dots & + & \left(a'_{n,p}-a'_{n,1}a'_{1,p}\right)\,x_p & = & b'_n-a'_{n,1}b'_1 \quad (L_n)\end{array}\right.$$

Il suffit maintenant de réitérer le processus sur le *sous-système* suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccccccl} \left(a'_{2,2}-a'_{2,1}a'_{1,2}\right)\,x_2 & + & \dots & + & \left(a'_{2,p}-a'_{2,1}a'_{1,p}\right)\,x_p & = & b'_2-a'_{2,1}b'_1 & (L_2)\\ & & & & & \vdots & & \\ \left(a'_{n,2}-a'_{n,1}a'_{1,2}\right)\,x_2 & + & \dots & + & \left(a'_{n,p}-a'_{n,1}a'_{1,p}\right)\,x_p & = & b'_n-a'_{n,1}b'_1 & (L_n)\end{array}\right.$$

Remarque
A ce stade, il est tout à fait possible que tous les coefficients d'une des lignes L_2 à L_n du système obtenu soient nuls...

puis on réitère à nouveau... jusqu'à arriver à un des deux cas suivants :

- tous les coefficients du sous-système obtenu sont nuls, il est donc impossible de trouver un pivot non nul ;
- le sous-système obtenu est vide, c'est-à-dire qu'il n'y a plus d'équations et donc que le processus a déjà été répété n fois.

La validité de cet algorithme fournit une démonstration au résultat suivant :

Théorème 4

Tout système linéaire à n équations et p inconnues est :

- soit sans solution ;
- soit équivalent à un système triangulaire avec "$\forall i\in[\![1;n]\!],\ a_{i,i}\neq 0$" ;
- soit équivalent à un système échelonné avec "$\forall i\in[\![1;n]\!],\ a_{i,i}\neq 0$".

Remarque
Dans le cas d'une résolution de système, on met en place un algorithme partiel (une fois le système triangulaire ou échelonné, on "remonte" par substitutions). En revanche, pour inverser une matrice, on met en place un algorithme total (voir chapitre 17).

- L'algorithme peut être partiel (on s'arrête une fois le système triangulaire ou échelonné, puis on remonte en réinjectant les inconnues trouvées) ou total (une fois le système échelonné, et les éventuelles inconnues secondaires isolées sur le membre de droite, on continue l'algorithme pour résoudre le système).
- On peut aisément montrer que la résolution d'un système linéaire à n équations et p inconnues nécessite au plus $n(n-1)$ opérations élémentaires.
En particulier, si $n=3$: 6 étapes au maximum !
- De façon générale, nous exécuterons cet algorithme sur les systèmes que nous aurons à résoudre ; l'avantage est qu'une résolution de système ne demandera donc aucune réflexion !
On évitera ainsi tous les ajustements "pratiques" consistant à intervertir des lignes afin d'obtenir un pivot plus simple. En effet, même si cela simplifie légèrement un calcul, il n'est aucunement dit qu'il simplifiera le reste de la résolution. Nous évitons alors, en faisant de trop nombreux échanges, des erreurs de recopie, et nous gagnons également du temps !
- La manipulation de fractions étant pénible, nous effectuerons par exemple (comme mentionné dans le cas général de l'algorithme présenté) l'opération $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ plutôt que $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$, dont l'objectif est le même.

Exemples 4

E1 Résolvons le système $\begin{cases} 3x+\ \ y+\ \ z=0\\ \ \ x+3y+\ \ z=0\\ \ \ x+\ \ y+3z=0\end{cases}$.

E2 Résolvons le système $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ \phantom{3x + {}} y - 4z = 0 \end{cases}$.

♥ **Astuce du chef** ♥
On aligne bien les inconnues, cela facilite les calculs lors de l'échelonnement !

E3 Résolvons le système $\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$.