



# 16

## ANALYSE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

---

## POUR BIEN DÉMARRER...

### 1. Définitions.

1. Équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  à coefficients constants :

2. Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL :

|                               |   |                                   |   |                                                      |
|-------------------------------|---|-----------------------------------|---|------------------------------------------------------|
| solution générale<br>de l'EDL | = | solution particulière<br>de l'EDL | + | solution générale de<br>l'équation homogène associée |
|-------------------------------|---|-----------------------------------|---|------------------------------------------------------|

3. Principe de superposition dans le cas d'une EDL1 :

2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des solutions de  $y' + ay = 0$  est

3. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Résolution de  $y'' + ay' + by = c$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  :

4. Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ? Qu'en dire ?

# I GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

## I.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

### DÉFINITIONS 1

### SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS, SOLUTION

**D1** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1;n]^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$  et  $b_1, \dots, b_n$  des fonctions définies et continues sur  $I$ .  
On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants de taille  $n$**  tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1 \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n + b_n \end{cases}$$

où  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  sont les fonctions inconnues.

En notant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

le système différentiel peut se réécrire :

$$X' = AX + B$$

**D2** Un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** est un système linéaire de la forme  $X' = AX$ , où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dont les composantes sont des fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  inconnues.

**D3** Une **solution** du système différentiel  $X' = AX + B$  est une application  $Y : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que :

- ✓ chaque composante est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- ✓  $\forall t \in I, Y'(t) = AY(t) + B(t)$ .

Résoudre un système différentiel, c'est trouver toutes ses solutions.

#### Vocabulaire

Les réels  $a_{i,j}$  sont les **coefficients** du système différentiel.

#### ✗ Attention !

Il s'agit d'égalités de fonctions !

#### 📖 Pour info...

En fait,  $X'$  n'est pas qu'une notation... Si l'on définissait une **norme** sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (ce n'est pas ce qui manque), on pourrait donner une définition de dérivabilité pour les fonctions  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

#### ✗ Attention !

$A$  est une matrice carrée de réels,  $X, X'$  et  $B$  sont des fonctions de  $I$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , et  $X' = AX + B$  est une égalité de fonctions !

#### Remarque

Le programme d'ECG ne semble porter que sur les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants, mais nous donnerons quelques résultats généraux tout de même...

### EXEMPLE 1

Réécrivons l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  sous forme de système différentiel.

Dans toute la suite, on considère une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### THÉORÈME 1

### DE CAUCHY SUR SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Avec les notations précédentes, pour tout  $t_0 \in I$  et tout  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , le problème  $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$  d'inconnue  $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$  possède une et une seule solution.

#### Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy**, et on avait un résultat analogue dans le cas des EDL1 et EDL2.

★ DÉMONSTRATION : Théorème admis.

★

### EXEMPLE 2

Montrons que si  $Y$  est une solution non nulle de  $X' = AX$  sur  $I$ , alors  $Y$  ne s'annule pas sur  $I$ .

## I.2 STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires, on retrouve :

| PROPRIÉTÉS 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UN SDL                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Soient <math>(E) : X' = AX + B</math> un système différentiel linéaire de taille <math>n</math> et <math>(E_H) : X' = AX</math> son système différentiel linéaire homogène associé. Notons <math>S_E</math> l'ensemble des solutions de <math>E</math>, <math>S_H</math> l'ensemble des solutions de <math>(E_H)</math>.</p> |                                                                                                                                                                          |
| <b>P1</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $S_H$ est un espace vectoriel                                                                                                                                            |
| <b>P2</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Pour tout $t_0 \in I$ , l'application $f : \begin{cases} S_H & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto X(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme. |
| <b>P3</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Toute solution de $(E)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de $(E)$ une solution quelconque de $(E_H)$ . Autrement dit :                                |
| <div style="border: 1px solid #003366; padding: 10px; display: inline-block;">             solution générale du SDL = solution particulière du SDL + solution générale du SDL homogène associé           </div>                                                                                                                 |                                                                                                                                                                          |
| <p>Ou encore, en notant <math>X_p</math> une solution particulière de <math>(E)</math> :</p> $S_E = \{X_p + X_H \mid X_H \in S_H\}$                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                          |

Conséquence :

On obtient :  $\dim(S_H) = n$ .

Remarque

Comme dans le cas des EDL, cette structure nous guide sur la méthode de résolution des SDL.

★ DÉMONSTRATION :

- P1.**
- ✓  $S_H \subset \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ , qui est un espace vectoriel...
  - ✓  $S_H$  est non vide, car l'application  $t \mapsto 0_{n,1}$  est solution de  $X' = AX$ .
  - ✓ Soient  $X, Y \in S_H$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $\lambda X + \mu Y \in S_H$ .
    - \* Puisque  $X$  et  $Y$  sont solution du système différentiel  $(E_H)$ , les composantes de  $X$  et  $Y$  sont des applications  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Par conséquent, les composantes de  $\lambda X + \mu Y$  également.
    - \* Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}
 (\lambda X + \mu Y)' &= \lambda X' + \mu Y' \\
 &= \lambda AX + \mu AY \\
 &= A(\lambda X + \mu Y)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} X, Y \in S_H$$

Ainsi  $\lambda X + \mu Y \in S_H$ .

**Conclusion :**  $S_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ , donc c'est un espace vectoriel.

**P2.** Soit  $t_0 \in I$ .

- **Linéarité.** Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $X, Y \in S_H$ .  
On a :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda X + \mu Y) &= (\lambda X + \mu Y)(t_0) \\
 &= \lambda X(t_0) + \mu Y(t_0) \\
 &= \lambda f(X) + \mu f(Y)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{linéarité de l'évaluation en } t_0 \text{ pour chacune des composantes...}$$

**Conclusion :**  $f$  est une application linéaire.

- **Bijektivité.** Montrons :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! X \in S_H \mid f(X) = X_0$$

Cela équivaut à établir :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \mid \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Ce résultat est vrai, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Conclusion :**  $f$  est bijective.

**Conclusion :**  $f$  est un isomorphisme. En particulier :  $\dim(S_H) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$ .

P3. Soit  $X_p$  une solution particulière de (E). Soit  $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ . On a :

$$\begin{aligned} X \in S_E &\iff X' = AX + B \\ &\iff X' = AX + X'_p - AX_p \\ &\iff (X - X_p)' = A(X - X_p) \\ &\iff X - X_p \in S_H \\ &\iff \exists X_H \in S_H \mid X - X_p = X_H \\ &\iff \exists X_H \in S_H \mid X = X_p + X_H \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} B = X'_p - AX_p, \text{ car } X_p \text{ est solution de (E)} \\ \text{linéarité de la dérivation} \end{array} \right\} \end{array}$$

**Conclusion :**  $S_E = \{X_p + X_H \mid X_H \in S_H\}$ .

★

## PROPRIÉTÉ 2

## PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ainsi que  $B_1, B_2 \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ .  
Si  $X_1$  est une solution de  $X' = AX + B_1$  et  $X_2$  est une solution de  $X' = AX + B_2$ , alors pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  est une solution de  $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$ .

★ **DÉMONSTRATION :** Soient  $X_1$  une solution particulière de  $X' = AX + B_1$  et  $X_2$  une solution particulière de  $X' = AX + B_2$ .  
Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .  
Puisque  $X_1$  et  $X_2$  sont solutions respectives de  $X' = AX + B_1$  et  $X' = AX + B_2$ , leurs composantes sont des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et donc celles de  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  également. Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)' &= \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' \\ &= \lambda_1 AX_1 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 AX_2 + \lambda_2 B_2 \\ &= A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} X_1 \text{ est solution de } X' = AX + B_1 \text{ et } X_2 \text{ de } X' = AX + B_2 \end{array} \right\}$$

**Conclusion :**  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  est solution de  $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$ .

★

## I.3 ÉQUILIBRES ET TRAJECTOIRES

### DÉFINITION 2

### ÉQUILIBRE D'UN SDL

Un **équilibre** d'un système différentiel est une solution constante de ce système.

**À retenir...**

La fonction  $t \mapsto 0_{n,1}$  est un équilibre de tous les systèmes différentiels homogènes.

Supposons que le système  $X' = AX + B$  possède un équilibre noté  $X_0$ . Dans ce cas :  $\forall t \in I, X_0'(t) = 0$ , et on obtient alors :

$$AX_0 = -B$$

Nécessairement :

- $B$  est constante,
- $B \in \text{Im}(A)$ .

Intéressons-nous plus particulièrement aux équilibres des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

### PROPRIÉTÉ 3

### CARACTÉRISATION DES ÉQUILIBRES DES SYSTÈMES HOMOGÈNES

Soit  $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .  
La fonction  $t \mapsto Y_0$  est un équilibre de  $X' = AX$  si, et seulement si  $Y_0 \in \ker(A)$ .

**À retenir...**

Si  $A$  est inversible, alors la fonction  $t \mapsto 0_{n,1}$  est le seul équilibre de  $X' = AX$ .

★ **DÉMONSTRATION :** Notons  $Y : t \mapsto Y_0$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Chaque composante de  $Y$  étant constante, elle est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .  
On a ensuite, puisqu'on sait déjà que  $Y$  est constante :

$$\begin{aligned} (Y \text{ est un équilibre de } X' = AX) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = AY(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, 0 = AY(t) \\ &\iff AY_0 = 0 \\ &\iff Y_0 \in \ker(A) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} Y \text{ est constante, donc : } \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = 0 \\ Y \text{ est constante égale à } Y_0 \end{array} \right\}$$

★

♣ **MÉTHODE 1** ♣ Pour déterminer les équilibres du système  $X' = AX$  :

- on détermine  $\ker(A)$ ,
- on conclut avec les bons objets : **les équilibres sont des applications de  $I$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , pas des matrices de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .**

### EXEMPLE 3

Déterminons les équilibres du système différentiel :  $(E) : \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + z \\ z' = 2x + y + 2z \end{cases}$

### DÉFINITION 3

### TRAJECTOIRE D'UN SDL

Une **trajectoire** de  $X' = AX$  est un ensemble  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$ , où  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est une solution de  $X' = AX$ .

#### Remarque

Une trajectoire associée à un équilibre est réduite à un point de  $\mathbb{R}^n$ .

### PROPRIÉTÉ 4

Si deux trajectoires de  $X' = AX$  ont un point commun, alors elles sont confondues.  
Autrement dit, deux trajectoires de  $X' = AX$  sont soit distinctes, soit confondues.

★ DÉMONSTRATION : Soient  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$  et  $\{(y_1(t), \dots, y_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$  deux trajectoires associées respectivement aux solutions  $X$  et  $Y$  du système différentiel  $Z' = AZ$ .  
Supposons que ces deux trajectoires ont un point commun ; autrement dit, supposons qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (y_1(t_0), \dots, y_n(t_0))$ .  
Ainsi, en notant  $Z_0$  ce point commun,  $X$  et  $Y$  sont deux solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Z' = AZ \\ Z(t_0) = Z_0 \end{cases}$$

Or, par théorème de Cauchy, ce problème ne possède qu'une unique solution. Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = Y(t)$$

Et donc leurs trajectoires sont égales.

**Conclusion** : si deux trajectoires ont un point commun, alors elles sont égales. ★

### DÉFINITIONS 4

### TRAJECTOIRE CONVERGENTE, DIVERGENTE

Soit  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  une solution de  $X' = AX$ .

**D1** La trajectoire  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$  est **convergente** lorsqu'il existe  $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que :  
 $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \ell_i$ .  
On dit alors que la trajectoire  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$  converge vers  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ .

**D2** La trajectoire  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) / t \in \mathbb{R}\}$  est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

#### EXEMPLE 4

Voyons comment résoudre le système différentiel 
$$\begin{cases} x' = & y + z \\ y' = x & + z \\ z' = x + y \end{cases}.$$

- Justifions que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.
- Déterminons les valeurs propres de  $A$  ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

- Soient  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $V$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . Montrons que l'application  $Y : t \mapsto e^{\lambda t} V$  est solution de  $X' = AX$ .
- Déduisons-en l'ensemble des solutions de  $X' = AX$ .
- Donnons finalement une trajectoire convergente non constante et une trajectoire divergente de  $X' = AX$ .

## II CAS OÙ $A$ EST DIAGONALISABLE

L'objectif est de résoudre le système différentiel  $X' = AX$  dans le cas où  $A$  est une matrice diagonalisable. Nous allons donner l'ensemble des solutions et voir deux démonstrations du résultat, dont la première utilise le lemme 1 ci-dessous.

### LEMME 1

(HP)

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $V$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ .  
La fonction  $t \mapsto e^{\lambda t} V$  est solution de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$ .

★ DÉMONSTRATION : Notons  $Y : t \mapsto e^{\lambda t} V$ . Puisque  $V$  est constant, chaque composante de  $Y$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \lambda e^{\lambda t} V \\ &= e^{\lambda t} \lambda V \\ &= e^{\lambda t} AV \\ &= A \times (e^{\lambda t} V) \\ &= AY(t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} V \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda$$

La fonction  $t \mapsto e^{\lambda t} V$  est donc solution de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$ . ★

### Important !

- Dans le cas où  $A$  est diagonalisable, l'énoncé pourra ne donner aucune étape intermédiaire dans la résolution de  $X' = AX$ . Il faudra alors mettre en œuvre la méthode de l'exemple 5 (et la seconde méthode de démonstration du théorème 2).
- Dans le cas où  $A$  n'est pas diagonalisable, l'énoncé guidera.

### Remarque

On peut s'imaginer la tête de  $Y$  sinon, pour se rendre compte de l'expression de  $Y'(t)$ ...

### THÉORÈME 2

RÉSOLUTION DE  $X' = AX$ , CAS OÙ  $A$  EST DIAGONALISABLE (HP)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable.

Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$  une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $V_i$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

On a ainsi :

$$(X \text{ est solution de } X' = AX) \iff (\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de  $X' = AX$  est  $\{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\}$ .

### Important !

Puisque  $A$  est diagonalisable, il existe bien une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .

★ DÉMONSTRATION : Voyons deux démonstrations de ce résultat. Notons  $S$  l'ensemble des solutions du système différentiel  $X' = AX$ .

1. On sait déjà que  $S$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  (conséquences de Propriétés 1 - P2). Notons, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $Y_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$ .

- D'après le lemme précédent, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $Y_i$  est solution de  $X' = AX$ .
- Montrons que la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est une famille libre de  $S$ .  
Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Supposons  $a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n = 0$ . Autrement dit, supposons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 Y_1(t) + \dots + a_n Y_n(t) = 0_{n,1}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + a_n e^{\lambda_n t} V_n = 0_{n,1}$$

En particulier, pour  $t = 0$ , on obtient :

$$a_1 V_1 + \dots + a_n V_n = 0_{n,1}$$

Or, la famille  $(V_1, \dots, V_n)$  est libre (car c'est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ). D'où :

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

Et ainsi, la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est libre.

Par conséquent, la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est une famille de  $S$  qui est :

- ✓ libre d'après ce qui précède,
- ✓ de cardinal  $n$ , égal à  $\dim(S)$ .

**Conclusion :** la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est une base de  $S$  et donc :

$$\begin{aligned} S &= \text{Vect}(Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \{t \mapsto c_1 Y_1(t) + \dots + c_n Y_n(t), (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

### Attention !

Il s'agit d'une égalité d'applications (définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ...).

Ce théorème est hors programme, en revanche, les deux démonstrations fournissent deux méthodes classiques pour résoudre des systèmes différentiels. Mettons en application la seconde méthode sur l'exemple suivant :

#### EXEMPLE 5

Réolvons le système différentiel  $(E) : \begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= 3x + 6y \end{cases}$  d'inconnues  $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

★

#### ♣ Méthode !

La première méthode serait guidée. En revanche, pour la seconde, une fois la matrice  $A$  diagonalisée, elle est à savoir faire en autonomie.

Et si la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable, mais seulement semblable à une matrice triangulaire ?  
 Dans ce cas, au moins une des équations différentielles sur les  $z_i$  aura un second membre non constant...  
 Ce n'est pas nécessairement problématique !

Pour terminer, voici une conséquence du théorème précédent qui fournit un résultat sur le comportement des trajectoires quand  $t \rightarrow +\infty$  :

### THÉORÈME 3

### COMPORTEMENT DES TRAJECTOIRES, CAS OÙ $A$ EST DIAGONALISABLE

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable.

- T1** Si  $A$  possède au moins une valeur propre strictement positive, alors  $X' = AX$  possède des trajectoires divergentes.
- T2** Si les valeurs propres de  $A$  sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de  $X' = AX$  convergent vers un équilibre (pas nécessairement le même).
- T3** Si les valeurs propres de  $A$  sont strictement négatives, alors toutes les trajectoires de  $X' = AX$  convergent vers  $(0, \dots, 0)$ , seul équilibre du système différentiel.

#### Confusion d'objets !

Une trajectoire est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  et un équilibre est un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (ou plus précisément une application constante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , assimilée à un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ )... On comprend bien l'idée tout de même !

★ DÉMONSTRATION : Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$  une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  (licite, car  $A$  est diagonalisable) telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $V_i$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,
- pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $x_k$  la  $k$ -ième composante de  $X$  (où  $X$  est une solution de  $X' = AX$ ) et, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $v_{i,k}$  la  $k$ -ième composante de  $V_i$ .

**T1.** Supposons que  $A$  possède au moins une valeur propre strictement positive. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons que  $\lambda_1 > 0$ .

D'après le lemme 1, la fonction  $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$  est solution de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$ .

Or :

- $\lambda_1 > 0$ , donc par produit et composition :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} = +\infty$$

- $V_1$  est vecteur propre de  $A$ , donc  $V_1$  est non nul. Il existe donc  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , que nous considérons ensuite, tel que la  $k$ -ième composante de  $V_1$  soit non nulle.

Par produit, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} v_{1,k} = \pm\infty$$

Par conséquent : la trajectoire associée à  $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$  est divergente.

**T2.** Supposons que les valeurs propres de  $A$  sont négatives ou nulles. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i = 0 \quad ; \quad \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lambda_i < 0$$

Soit  $X$  une solution de  $X' = AX$ . D'après le théorème 6, il existe des réels  $c_1, \dots, c_n$  tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i$$

Or :

- Pour tout  $i \in \llbracket p+1; n \rrbracket$ ,  $\lambda_i < 0$ . D'où, par produit et composition :

$$\forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_i t} = 0$$

D'où :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = 0$$

- Pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $\lambda_i = 0$ . D'où :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, c_i e^{\lambda_i t} V_i = c_i V_i$$

Et ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = c_i v_{i,k}$$

#### Remarque

Les cas où 0 est seule VP et où 0 n'est pas VP sont inclus (en considérant  $p = n$  et  $p = 0$  respectivement).  
 Dans le cas où  $p = 0$ , chaque somme  $\sum_{i=1}^p (\dots)$  sera nulle, par convention.

On obtient finalement par somme :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = \sum_{i=1}^p c_i v_{i,k}$$

Par conséquent : la trajectoire associée à  $X$  converge vers  $\sum_{i=1}^p c_i V_i$ .

Notons  $V = \sum_{i=1}^p c_i V_i$  et montrons que  $V$  est un équilibre de  $X' = AX$ .

On sait que, pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $V_i$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 0.

Donc :  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $V_i \in \ker(A)$ . Mais  $\ker(A)$  est un espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi :

$$V \in \ker(A)$$

D'après la propriété 3, on en déduit que la fonction  $t \mapsto V$  est un équilibre de  $X' = AX$ .

**Conclusion** : toutes les trajectoires de  $X' = AX$  convergent vers un équilibre.

**T3.** Cas particulier de la démonstration précédente, dans le cas où  $p = 0$ ...

On obtient :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = 0$$

Par conséquent : la trajectoire associée à  $X$  converge vers  $(0, \dots, 0)$ .

Bien évidemment,  $t \mapsto 0_{n,1}$  est un équilibre de  $X' = AX$ . Et c'est le seul ! En effet, les valeurs propres de  $A$  sont strictement négatives, donc 0 n'est pas valeur propre de  $A$ . Ainsi,  $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$ . Et donc, d'après la propriété 3,  $t \mapsto 0_{n,1}$  est le seul équilibre de  $X' = AX$ .

★