



16

ANALYSE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

POUR BIEN DÉMARRER...

1. Définitions.

1. Équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels tels que $a_n \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I .

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

2. Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL :

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée.

Notons S_E l'ensemble des solutions de E , S_H l'ensemble des solutions de (E_H) .

- S_H est un espace vectoriel.
- Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H) . Autrement dit :

solution générale de l'EDL	=	solution particulière de l'EDL	+	solution générale de l'équation homogène associée
----------------------------	---	--------------------------------	---	---

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$S_E = \{f_p + f_H \mid f_H \in S_H\}$$

3. Principe de superposition dans le cas d'une EDL1 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ainsi que deux fonctions f_1 et f_2 définies et continues sur I .

Si :

- ✓ y_1 est solution de l'équation différentielle $y' + ay = f_1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$,
- ✓ y_2 est solution de l'équation différentielle $y' + ay = f_2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Alors : pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résolution de $y'' + ay' + by = c$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$:

Notons Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{x \in I \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet une solution r_0 et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{x \in I \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

4. Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ? Qu'en dire ?

- **Cas d'une EDL1.**

Soient a un réel, b une fonction continue sur I . On appelle problème de Cauchy un problème de la forme $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

- **Cas d'une EDL2.**

Soient a, b des réels et c une fonction continue sur I . On appelle problème de Cauchy un problème de la forme $\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 \text{ ; } y'(x_0) = z_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, où $x_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

Dans les deux cas, un problème de Cauchy possède toujours une et une seule solution.

I GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

I.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

DÉFINITIONS 1

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS, SOLUTION

D1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1;n]^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $b_1, \dots, b_n$ des fonctions définies et continues sur I .
On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants de taille n** tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1 \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n + b_n \end{cases}$$

où $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ sont les fonctions inconnues.

En notant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

le système différentiel peut se réécrire :

$$X' = AX + B$$

D2 Un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** est un système linéaire de la forme $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur I inconnues.

D3 Une **solution** du système différentiel $X' = AX + B$ est une application $Y : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

- ✓ chaque composante est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- ✓ $\forall t \in I, Y'(t) = AY(t) + B(t)$.

Résoudre un système différentiel, c'est trouver toutes ses solutions.

Vocabulaire

Les réels $a_{i,j}$ sont les **coefficients** du système différentiel.

Attention !

Il s'agit d'égalités de fonctions !

Pour info...

En fait, X' n'est pas qu'une notation... Si l'on définissait une **norme** sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ce n'est pas ce qui manque), on pourrait donner une définition de dérivabilité pour les fonctions $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Attention !

A est une matrice carrée de réels, X, X' et B sont des fonctions de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $X' = AX + B$ est une égalité de fonctions !

Remarque

Le programme d'ECG ne semble porter que sur les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants, mais nous donnerons quelques résultats généraux tout de même...

EXEMPLE 1

Réécrivons l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sous forme de système différentiel.

Posons $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y' \\ -ay' - by \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \\ &= AX \end{aligned} \quad \leftarrow \text{en notant } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Remarquons alors que :

$$y'' + ay' + by = 0 \iff X' = AX$$

Dans toute la suite, on considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 1

DE CAUCHY SUR SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Avec les notations précédentes, pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le problème $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ possède une et une seule solution.

Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy**, et on avait un résultat analogue dans le cas des EDL1 et EDL2.

* DÉMONSTRATION : Théorème admis.

EXEMPLE 2

Montrons que si Y est une solution non nulle de $X' = AX$ sur I , alors Y ne s'annule pas sur I .

Supposons que Y est une solution non nulle de $X' = AX$. Raisonnons par l'absurde et supposons que Y s'annule en un réel $t_0 \in I$.

Par conséquent, Y vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = 0_{n,1} \end{cases}$$

Mais, l'application $t \mapsto 0_{n,1}$ vérifie également ce problème de Cauchy.

Par théorème de Cauchy, on sait qu'un tel problème admet une unique solution. Par conséquent, Y est nulle : contradiction !

Conclusion : si Y est une solution non nulle de $X' = AX$ sur I , alors Y ne s'annule pas sur I .

I.2 STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires, on retrouve :

PROPRIÉTÉS 1	STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UN SDL
P1 S_H est un espace vectoriel P2 Pour tout $t_0 \in I$, l'application $f : \begin{cases} S_H \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto X(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme. P3 Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H). Autrement dit : solution générale du SDL = solution particulière du SDL + solution générale du SDL homogène associé Ou encore, en notant X_p une solution particulière de (E) : $S_E = \{X_p + X_H \mid X_H \in S_H\}$	Conséquence : On obtient : $\dim(S_H) = n$. Remarque Comme dans le cas des EDL, cette structure nous guide sur la méthode de résolution des SDL.

* DÉMONSTRATION :

- P1.**
- ✓ $S_H \subset \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, qui est un espace vectoriel...
 - ✓ S_H est non vide, car l'application $t \mapsto 0_{n,1}$ est solution de $X' = AX$.
 - ✓ Soient $X, Y \in S_H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda X + \mu Y \in S_H$.
 - * Puisque X et Y sont solution du système différentiel (E_H) , les composantes de X et Y sont des applications $\mathcal{C}^1$ sur I . Par conséquent, les composantes de $\lambda X + \mu Y$ également.
 - * Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (\lambda X + \mu Y)' &= \lambda X' + \mu Y' \\ &= \lambda AX + \mu AY \\ &= A(\lambda X + \mu Y) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right\} X, Y \in S_H$$

Ainsi $\lambda X + \mu Y \in S_H$.

Conclusion : S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, donc c'est un espace vectoriel.

P2. Soit $t_0 \in I$.

- **Linéarité.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X, Y \in S_H$.
On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= (\lambda X + \mu Y)(t_0) \\ &= \lambda X(t_0) + \mu Y(t_0) \\ &= \lambda f(X) + \mu f(Y) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{linéarité de l'évaluation en } t_0 \text{ pour chacune des composantes...}$$

Conclusion : f est une application linéaire.

- **Bijektivité.** Montrons :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! X \in S_H \mid f(X) = X_0$$

Cela équivaut à établir :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \mid \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Ce résultat est vrai, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Conclusion : f est bijective.

Conclusion : f est un isomorphisme. En particulier : $\dim(S_H) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$.

P3. Soit X_p une solution particulière de (E). Soit $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. On a :

$$\begin{aligned} X \in S_E &\iff X' = AX + B \\ &\iff X' = AX + X'_p - AX_p \\ &\iff (X - X_p)' = A(X - X_p) \\ &\iff X - X_p \in S_H \\ &\iff \exists X_H \in S_H \mid X - X_p = X_H \\ &\iff \exists X_H \in S_H \mid X = X_p + X_H \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \hookrightarrow B = X'_p - AX_p, \text{ car } X_p \text{ est solution de (E)} \\ \hookrightarrow \text{linéarité de la dérivation} \end{array}$$

Conclusion : $S_E = \{X_p + X_H \mid X_H \in S_H\}$.

★

PROPRIÉTÉ 2

PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que $B_1, B_2 \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Si X_1 est une solution de $X' = AX + B_1$ et X_2 est une solution de $X' = AX + B_2$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est une solution de $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$.

★ DÉMONSTRATION : Soient X_1 une solution particulière de $X' = AX + B_1$ et X_2 une solution particulière de $X' = AX + B_2$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Puisque X_1 et X_2 sont solutions respectives de $X' = AX + B_1$ et $X' = AX + B_2$, leurs composantes sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et donc celles de $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ également. Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)' &= \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' \\ &= \lambda_1 AX_1 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 AX_2 + \lambda_2 B_2 \quad \hookrightarrow X_1 \text{ est solution de } X' = AX + B_1 \text{ et } X_2 \text{ de } X' = AX + B_2 \\ &= A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est solution de $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$.

★

I.3 ÉQUILIBRES ET TRAJECTOIRES

DÉFINITION 2

ÉQUILIBRE D'UN SDL

Un **équilibre** d'un système différentiel est une solution constante de ce système.

À retenir...

La fonction $t \mapsto 0_{n,1}$ est un équilibre de tous les systèmes différentiels homogènes.

Supposons que le système $X' = AX + B$ possède un équilibre noté X_0 . Dans ce cas : $\forall t \in I, X_0'(t) = 0$, et on obtient alors :

$$AX_0 = -B$$

Nécessairement :

- B est constante,
- $B \in \text{Im}(A)$.

Intéressons-nous plus particulièrement aux équilibres des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

PROPRIÉTÉ 3

CARACTÉRISATION DES ÉQUILIBRES DES SYSTÈMES HOMOGÈNES

Soit $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
La fonction $t \mapsto Y_0$ est un équilibre de $X' = AX$ si, et seulement si $Y_0 \in \ker(A)$.

À retenir...

Si A est inversible, alors la fonction $t \mapsto 0_{n,1}$ est le seul équilibre de $X' = AX$.

★ DÉMONSTRATION : Notons $Y : t \mapsto Y_0$ définie sur $\mathbb{R}$. Chaque composante de Y étant constante, elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On a ensuite, puisqu'on sait déjà que Y est constante :

$$\begin{aligned} (Y \text{ est un équilibre de } X' = AX) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = AY(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, 0 = AY(t) \\ &\iff AY_0 = 0 \\ &\iff Y_0 \in \ker(A) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \hookrightarrow Y \text{ est constante, donc : } \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = 0 \\ \hookrightarrow Y \text{ est constante égale à } Y_0 \end{array}$$

★

♣ **MÉTHODE 1** ♣ Pour déterminer les équilibres du système $X' = AX$:

- on détermine $\ker(A)$,
- on conclut avec les bons objets : **les équilibres sont des applications de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pas des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.**

EXEMPLE 3

Déterminons les équilibres du système différentiel : $(E) : \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + z \\ z' = 2x + y + 2z \end{cases}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A) &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des équilibres de (E) est $\left\{ t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

DÉFINITION 3

TRAJECTOIRE D'UN SDL

Une **trajectoire** de $X' = AX$ est un ensemble $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$, où $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une solution de $X' = AX$.

Remarque

Une trajectoire associée à un équilibre est réduite à un point de $\mathbb{R}^n$.

PROPRIÉTÉ 4

Si deux trajectoires de $X' = AX$ ont un point commun, alors elles sont confondues.
Autrement dit, deux trajectoires de $X' = AX$ sont soit distinctes, soit confondues.

★ DÉMONSTRATION : Soient $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$ et $\{(y_1(t), \dots, y_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$ deux trajectoires associées respectivement aux solutions X et Y du système différentiel $Z' = AZ$.
Supposons que ces deux trajectoires ont un point commun ; autrement dit, supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (y_1(t_0), \dots, y_n(t_0))$.
Ainsi, en notant Z_0 ce point commun, X et Y sont deux solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Z' = AZ \\ Z(t_0) = Z_0 \end{cases}$$

Or, par théorème de Cauchy, ce problème ne possède qu'une unique solution. Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = Y(t)$$

Et donc leurs trajectoires sont égales.

Conclusion : si deux trajectoires ont un point commun, alors elles sont égales.

★

DÉFINITIONS 4

TRAJECTOIRE CONVERGENTE, DIVERGENTE

Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une solution de $X' = AX$.

D1 La trajectoire $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) / t \in \mathbb{R}\}$ est **convergente** lorsqu'il existe $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
 $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \ell_i$.
On dit alors que la trajectoire $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) / t \in \mathbb{R}\}$ converge vers $(\ell_1, \dots, \ell_n)$.

D2 La trajectoire $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) / t \in \mathbb{R}\}$ est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

EXEMPLE 4

Voyons comment résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

- Justifions que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

La matrice A est symétrique à coefficients réels, elle est donc diagonalisable.

- Déterminons les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé. Notons, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ .

* Remarquons que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$, on en déduit que 2 est valeur propre de A et

que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé et ainsi

$$\dim(E_2(A)) \geq 1$$

Mais :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - 2I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\geq 2 \end{aligned} \quad \hookrightarrow C_1 \text{ et } C_2 \text{ ne sont pas colinéaires}$$

Et donc, par théorème du rang :

$$\dim(E_2(A)) \leq 1$$

On en déduit :

$$\dim(E_2(A)) = 1$$

Et ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de $E_2(A)$ qui est :

- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
- ✓ de cardinal 1, égal à $\dim(E_2(A))$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_2(A)$.

* Ensuite :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A + I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\hookrightarrow C_1 = C_2 \text{ et } C_1 = C_3 \\ &\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \end{aligned}$$

Par conséquent, -1 est valeur propre de A et, par théorème du rang :

$$\dim(E_{-1}(A)) = 2$$

Puis, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille de $E_{-1}(A)$ qui est :

- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires,
- ✓ de cardinal 2, égal à $\dim(E_{-1}(A))$.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_{-1}(A)$.

Rappel...

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n).$$

Rappel...

Par définition, si λ est VP de A , alors $E_\lambda(A)$ est un ev non réduit au vecteur nul; donc c'est un ev de dimension au moins 1.

Astuce du chef ♥

Remarquer l'égalité $C_1 + 0C_2 - C_3 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice $A - I_3$...

En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B , on a :

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3,$$

$$\text{donc : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff$$

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0_{3,1}$$

Pourquoi ?

Voir l'astuce ci-dessus...

- Soient $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et V un vecteur propre de A associé à λ . Montrons que l'application $Y : t \mapsto e^{\lambda t} V$ est solution de $X' = AX$.

Notons $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} v_1 \\ e^{\lambda t} v_2 \\ e^{\lambda t} v_3 \end{pmatrix}$$

Les composantes de Y sont toutes des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} v_1 \\ \lambda e^{\lambda t} v_2 \\ \lambda e^{\lambda t} v_3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda e^{\lambda t} V \\ &= e^{\lambda t} AV \\ &= AY(t) \end{aligned}$$

↙ V est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

Conclusion : l'application $Y : t \mapsto e^{\lambda t} V$ est solution de $X' = AX$.

- Dédoublons-en l'ensemble des solutions de $X' = AX$.

Notons S l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$.

On sait que S est un espace vectoriel de dimension 3 (car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Notons $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ainsi que $Y_1 : t \mapsto e^{2t} V_1$, $Y_2 : t \mapsto e^{-t} V_2$ et

$Y_3 : t \mapsto e^{-t} V_3$.

* D'après le point précédent, on sait que les applications Y_1, Y_2, Y_3 sont solutions de $X' = AX$.

* Montrons que la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille libre de S .

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $aY_1 + bY_2 + cY_3 = 0$.

Autrement dit, supposons : $\forall t \in \mathbb{R}, aY_1(t) + bY_2(t) + cY_3(t) = 0_{3,1}$. En prenant $t = 0$, on obtient :

$$aV_1 + bV_2 + cV_3 = 0_{3,1}$$

Or la famille (V_1, V_2, V_3) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, car c'est la concaténation de familles libres de vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes.

D'où :

$$a = b = c = 0$$

Et ainsi, la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est libre.

Par conséquent, la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille de S qui est :

- ✓ libre d'après ce qui précède,
- ✓ de cardinal 3 égal à $\dim(S)$.

Conclusion : la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est une base de S et donc :

$$\begin{aligned} S &= \text{Vect}(Y_1, Y_2, Y_3) \\ &= \{t \mapsto aY_1(t) + bY_2(t) + cY_3(t), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{t \mapsto ae^{2t} V_1 + be^{-t} V_2 + ce^{-t} V_3, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

- Donnons finalement une trajectoire convergente non constante et une trajectoire divergente de $X' = AX$.

* Posons $Z_1 : t \mapsto e^{2t} V_1 + e^{-t} V_2 + e^{-t} V_3$.

D'après ce qui précède, Z_1 est solution de $X' = AX$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Z_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2t} = +\infty$, la trajectoire associée à Z_1 est divergente.

* Posons $Z_2 : t \mapsto e^{-t} V_1$.

D'après ce qui précède, Z_2 est solution de $X' = AX$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Z_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} -e^{-t} = 0$, la trajectoire associée à Z_2 est convergente (elle converge vers $(0, 0, 0)$).

⚠ Attention !

Il s'agit d'une égalité d'applications (définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$...).

Remarque

Il y en a une infinité qui conviennent : toutes les solutions de la forme $t \mapsto ae^{2t} V_1 + be^{-t} V_2 + ce^{-t} V_3$ avec $a \neq 0$ sont associées à des trajectoires divergentes.

Remarque

Il y en a une infinité qui conviennent : toutes les solutions de la forme $t \mapsto ae^{2t} V_1 + be^{-t} V_2 + ce^{-t} V_3$ avec $a = 0$ sont associées à des trajectoires convergentes.

II CAS OÙ A EST DIAGONALISABLE

L'objectif est de résoudre le système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est une matrice diagonalisable. Nous allons donner l'ensemble des solutions et voir deux démonstrations du résultat, dont la première utilise le lemme 1 ci-dessous.

LEMME 1

(HP)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et V un vecteur propre de A associé à λ .
La fonction $t \mapsto e^{\lambda t} V$ est solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.

★ DÉMONSTRATION : Notons $Y : t \mapsto e^{\lambda t} V$. Puisque V est constant, chaque composante de Y est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \lambda e^{\lambda t} V \\ &= e^{\lambda t} \lambda V \\ &= e^{\lambda t} AV \\ &= A \times (e^{\lambda t} V) \\ &= AY(t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} V \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda$$

La fonction $t \mapsto e^{\lambda t} V$ est donc solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$. ★

Important !

- Dans le cas où A est diagonalisable, l'énoncé pourra ne donner aucune étape intermédiaire dans la résolution de $X' = AX$. Il faudra alors mettre en œuvre la méthode de l'exemple 5 (et la seconde méthode de démonstration du théorème 2).
- Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, l'énoncé guidera.

Remarque

On peut s'imaginer la tête de Y sinon, pour se rendre compte de l'expression de $Y'(t)$...

THÉORÈME 2

RÉSOLUTION DE $X' = AX$, CAS OÙ A EST DIAGONALISABLE (HP)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.

Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i .

On a ainsi :

$$(X \text{ est solution de } X' = AX) \iff (\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de $X' = AX$ est $\{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

Important !

Puisque A est diagonalisable, il existe bien une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

★ DÉMONSTRATION : Voyons deux démonstrations de ce résultat. Notons S l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$.

1. On sait déjà que S est un espace vectoriel de dimension n (conséquences de Propriétés 1 - P2). Notons, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $Y_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$.

- D'après le lemme précédent, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, Y_i est solution de $X' = AX$.
- Montrons que la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille libre de S .
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Supposons $a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n = 0$. Autrement dit, supposons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 Y_1(t) + \dots + a_n Y_n(t) = 0_{n,1}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + a_n e^{\lambda_n t} V_n = 0_{n,1}$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient :

$$a_1 V_1 + \dots + a_n V_n = 0_{n,1}$$

Or, la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est libre (car c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). D'où :

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

Et ainsi, la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est libre.

Par conséquent, la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille de S qui est :

- ✓ libre d'après ce qui précède,
- ✓ de cardinal n , égal à $\dim(S)$.

Conclusion : la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de S et donc :

$$\begin{aligned} S &= \text{Vect}(Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \{t \mapsto c_1 Y_1(t) + \dots + c_n Y_n(t), (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Attention !

Il s'agit d'une égalité d'applications (définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...).

2. Posons P la matrice dont les colonnes sont $V_1, \dots, V_n$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La matrice P est inversible, car c'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers la base $(V_1, \dots, V_n)$, et, puisque A est diagonalisable, on a :

$$A = PDP^{-1}$$

Soit $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Posons $Z = P^{-1}X$ et notons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Puisque chaque composante de X est $\mathcal{C}^1$ et

✗ Attention !
 $z_1, \dots, z_n$ sont des fonctions !

que P^{-1} est constante, chaque composante de Z est $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Z'(t) = P^{-1}X'(t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \\ &\iff PZ' = PDZ \\ &\iff Z' = DZ \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, z'_i = \lambda_i z_i \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \exists c_i \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, z_i(t) = c_i e^{\lambda_i t} \\ &\iff \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, Z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} Z = P^{-1}X \text{ et } X' = PZ' \\ P \text{ est inversible} \\ D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{array} \right\}$

$\leftarrow P = (V_1 \dots V_n)$

Remarque

Il est inutile de calculer P^{-1} pour résoudre le système différentiel par cette méthode.

★

♣ Méthode !

La première méthode serait guidée. En revanche, pour la seconde, une fois la matrice A diagonalisée, elle est à savoir faire en autonomie.

Ce théorème est hors programme, en revanche, les deux démonstrations fournissent deux méthodes classiques pour résoudre des systèmes différentiels. Mettons en application la seconde méthode sur l'exemple suivant :

EXEMPLE 5

Résolvons le système différentiel (E) : $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$ d'inconnues $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

- Sans difficulté, on trouve que la matrice A est diagonalisable et, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, la matrice P est inversible et :

$$A = PDP^{-1}$$

- Soient $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ainsi que $Z = P^{-1}X$.

Puisque x et y sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que P^{-1} est constante, les composantes de Z sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Z'(t) = P^{-1}X'(t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x + 6y \end{cases} &\iff X' = AX \\ &\iff X' = PDP^{-1}X \\ &\iff PZ' = PDZ \\ &\iff Z' = DZ \\ &\iff \begin{cases} z'_1 = 3z_1 \\ z'_2 = 5z_2 \end{cases} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(t) = c_1 e^{3t} \\ z_2(t) = c_2 e^{5t} \end{cases} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, Z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{5t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{5t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} \\ -c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} Z = P^{-1}X \text{ et } X' = PZ' \\ P \text{ est inversible} \\ \text{en notant } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$

Important !

Il est tout à fait possible, à l'écrit comme à l'oral, que la résolution d'un système différentiel ne soit pas guidée...

- A l'écrit, on guiderait en revanche la réduction de la matrice A , pour orienter vers cette méthode.
- A l'oral, le jury peut attendre une prise d'initiative complète.

$$\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} \\ y(t) = -c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{5t} \end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} \\ -c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{5t} \end{pmatrix}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Et si la matrice A n'est pas diagonalisable, mais seulement semblable à une matrice triangulaire ?
 Dans ce cas, au moins une des équations différentielles sur les z_i aura un second membre non constant...
 Ce n'est pas nécessairement problématique !

Pour terminer, voici une conséquence du théorème précédent qui fournit un résultat sur le comportement des trajectoires quand $t \rightarrow +\infty$:

THÉORÈME 3

COMPORTEMENT DES TRAJECTOIRES, CAS OÙ A EST DIAGONALISABLE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.

- T1** Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors $X' = AX$ possède des trajectoires divergentes.
- T2** Si les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers un équilibre (pas nécessairement le même).
- T3** Si les valeurs propres de A sont strictement négatives, alors toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers $(0, \dots, 0)$, seul équilibre du système différentiel.

Confusion d'objets !

Une trajectoire est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et un équilibre est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou plus précisément une application constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, assimilée à un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...). On comprend bien l'idée tout de même !

★ DÉMONSTRATION : Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (licite, car A est diagonalisable) telle que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i ,
- pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, x_k la k -ième composante de X (où X est une solution de $X' = AX$) et, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $v_{i,k}$ la k -ième composante de V_i .

T1. Supposons que A possède au moins une valeur propre strictement positive. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons que $\lambda_1 > 0$.

D'après le lemme 1, la fonction $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$ est solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.

Or :

- $\lambda_1 > 0$, donc par produit et composition :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} = +\infty$$

- V_1 est vecteur propre de A , donc V_1 est non nul. Il existe donc $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, que nous considérons ensuite, tel que la k -ième composante de V_1 soit non nulle.

Par produit, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} v_{1,k} = \pm\infty$$

Par conséquent : la trajectoire associée à $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$ est divergente.

T2. Supposons que les valeurs propres de A sont négatives ou nulles. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i = 0 \quad ; \quad \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lambda_i < 0$$

Soit X une solution de $X' = AX$. D'après le théorème 6, il existe des réels $c_1, \dots, c_n$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i$$

Or :

- Pour tout $i \in \llbracket p+1; n \rrbracket$, $\lambda_i < 0$. D'où, par produit et composition :

$$\forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_i t} = 0$$

D'où :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = 0$$

- Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. D'où :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, c_i e^{\lambda_i t} V_i = c_i V_i$$

Et ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = c_i v_{i,k}$$

Remarque

Les cas où 0 est seule VP et où 0 n'est pas VP sont inclus (en considérant $p = n$ et $p = 0$ respectivement).
 Dans le cas où $p = 0$, chaque somme $\sum_{i=1}^p (\dots)$ sera nulle, par convention.

On obtient finalement par somme :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = \sum_{i=1}^p c_i v_{i,k}$$

Par conséquent : la trajectoire associée à X converge vers $\sum_{i=1}^p c_i V_i$.

Notons $V = \sum_{i=1}^p c_i V_i$ et montrons que V est un équilibre de $X' = AX$.

On sait que, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Donc : $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $V_i \in \ker(A)$. Mais $\ker(A)$ est un espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi :

$$V \in \ker(A)$$

D'après la propriété 3, on en déduit que la fonction $t \mapsto V$ est un équilibre de $X' = AX$.

Conclusion : toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers un équilibre.

T3. Cas particulier de la démonstration précédente, dans le cas où $p = 0$...

On obtient :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = 0$$

Par conséquent : la trajectoire associée à X converge vers $(0, \dots, 0)$.

Bien évidemment, $t \mapsto 0_{n,1}$ est un équilibre de $X' = AX$. Et c'est le seul ! En effet, les valeurs propres de A sont strictement négatives, donc 0 n'est pas valeur propre de A . Ainsi, $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$. Et donc, d'après la propriété 3, $t \mapsto 0_{n,1}$ est le seul équilibre de $X' = AX$.

★