

EXERCICES DU CHAPITRE 16

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●●○ - Deux premiers systèmes différentiels

1. Soient $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résoudre :

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= y \end{cases}$$

2. Soient $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

EXERCICE 2 - ●●○ - De taille 2

On considère le système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= -2x - 2y \end{cases}$$

- Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.
- Montrer que les trajectoires de (S) sont convergentes.
- Trouver les équilibres de (S).
- Résoudre le système (S).
- Expliciter une trajectoire non constante qui converge vers $(-2; -2)$.

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 3 - ●●○ - De taille 2

On considère le système différentiel :

$$(S) \begin{cases} x' &= 3x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

On note $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Justifier que A possède une unique valeur propre que l'on déterminera. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible puis calculer P^{-1} .
- Calculer $P^{-1}AP$. On notera T cette matrice.
- Soient $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$.

4.a. Établir :

$$X' = AX \iff Y' = TY$$

4.b. Résoudre le système $Y' = TY$.

4.c. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (S).

EXERCICE 4 - ●●○ - De taille 3

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= -2x + y + z \\ y' &= x - 2y + z \\ z' &= x + y - 2z \end{cases}$$

EXERCICE 5 - ●●○ - EDL3 homogène à coefficients constants

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 ; y''(0) = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note, pour tout réel x , $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R} : Y'(x) = AY(x)$.
2. Diagonaliser la matrice A .
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que, pour tout $x \in \mathbb{R}, Z(x) = P^{-1}Y(x)$ et $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$. On admet qu'il existe trois fonctions u, v, w , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel $x : Z(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ et $Z'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \\ w'(x) \end{pmatrix}$.
 - 3.a. Déterminer $Z(0)$.
 - 3.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} :$

$$Y'(x) = AY(x) \iff Z'(x) = DZ(x)$$
 - 3.c. Résoudre le système différentiel $Z' = DZ$.
4. Conclure sur le problème de Cauchy initial.

CONCOURS

EXERCICE 6 - ●●○ - EML 2023 Appli

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

PARTIE I – RÉDUCTION DE LA MATRICE A

1.
 - 1.a. Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.
 - 1.b. Donner une base de E_2 .
 - 1.c. Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?
2.
 - 2.a. Dans cette sous-question M est une matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Que représente les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?
 - 2.b. En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
3. Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversibles telles que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

PARTIE II – UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

On considère le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x' &= 3x + y + z \\ y' &= x + 3y + z \\ y' &= x + y + 3z \end{cases}$$

où x, y, z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).
5.
 - 5.a. Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - 5.b. Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

PARTIE III – UN SECOND SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B .
7. La matrice B est-elle diagonalisable ?
8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.
 - 8.a. Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
 - 8.b. Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?
 - 8.c. Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.
9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.