

EXERCICES DU CHAPITRE 17

CHAÎNES DE MARKOV

TECHNIQUE

EXERCICE 1 – ●●● – Matrices stochastiques

Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est stochastique lorsque :

$$\checkmark \forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, m_{i,j} \geq 0$$

$$\checkmark \forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1.$$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs.

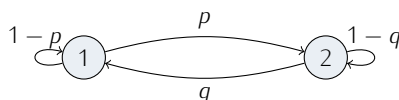
Démontrer que M est stochastique si, et seulement si, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M pour la valeur propre 1.

2. En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 2 – ●●● – Chaîne de Markov à deux états

Soient $p, q \in [0; 1]$. Considérons une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée au graphe suivant, telle que X_0 soit la variable aléatoire constante égale à 1. On note M la matrice de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n son n -ième état probabiliste.



1. Donner la matrice M .
2. Supposons $p = q = 0$.
 - 2.a. Déterminer les états stables de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - 2.b. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Supposons $p = q = 1$.
 - 3.a. Déterminer les états stables de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - 3.b. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Supposons $p, q \in]0; 1[$.
 - 4.a. Démontrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède un unique état stable et le déterminer.
 - 4.b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de la matrice M .
 - 4.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de M^n en fonction de n .
 - 4.d. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n .
 - 4.e. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

CONCOURS

EXERCICE 3 – ●●● – EML 2023 Appli Sujet 0

On considère trois points A, B, C du plan. L'objectif de l'exercice est l'étude du mouvement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces points. À l'étape 0, on suppose que le pion est en A . Ensuite, on suppose que le déplacement vérifie les règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "à l'instant n , le pion se situe en A ", et l'on définit de la même manière les évènements B_n et C_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note également $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ le n -ième état probabiliste de cette chaîne de Markov.

PARTIE I. MODÉLISATION

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition associée à la chaîne de Markov étudiée. On la notera M .
2. **2.a.** Déterminer a_0, b_0, c_0 ainsi que a_1, b_1, c_1 .
2.b. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n \times M$.
2.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 \times M^n$.

PARTIE II. CALCUL DES PUISSANCES DE M ET APPLICATIONS

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice B est diagonalisable.
4. Calculer $B^2 - 5B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
5. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $B = PDP^{-1}$.
Calculer la matrice P^{-1} .
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, B^n = PD^nP^{-1}$.
7. La chaîne de Markov introduite admet-elle un état stable? Si oui, lequel?
8. Soit $n \in \mathbb{N}$.
8.a. Démontrer que $M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$.
8.b. Démontrer que $a_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n} \right)$. Déterminer également b_n et c_n .
8.c. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Interpréter ce résultat.

PARTIE III. NOMBRE MOYENS DE PASSAGE EN A ET TEMPS D'ATTENTE AVANT LE PREMIER PASSAGE EN B

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire X_n par : $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
9.a. Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
9.b. Calculer l'espérance de X_n .
9.c. En déduire le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n .
10. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B , et dans le cas où le pion ne passe jamais en B , on pose $T_B = 0$.
Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.
10.a. Calculer les probabilités $\mathbb{P}([T_B = 1])$ et $\mathbb{P}([T_B = 2])$.
10.b. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_B = k])$.
10.c. Reconnaître alors la loi de T_B . Que dire de l'évènement $[T_B = 0]$? Donner l'espérance de T_B et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 4 - ●●○ - Ecrir 2024 Appli

PARTIE I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1.

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

1. Étude du cas $n = 3$.

Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1.a.** Justifier que la matrice M est diagonalisable.
- 1.b.** Calculer $(M + I_3)^2$, puis en déduire un polynôme annulateur de M .
- 1.c.** Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de M .

Dans les questions qui suivent, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1.d.** Montrer que P est inversible et que :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$.

- 1.e.** Déterminer les coefficients de la matrice D .

- 1.f. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k , $M^k = PD^kP^{-1}$.
- 1.g. Soit k un entier naturel. On admet qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$.
En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer a_k et b_k .
2. **Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.**
On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$.

2.b. Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n .

2.c. En déduire, pour tout entier naturel k non nul

$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n$$

où :

$$c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$$

2.d. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$$

où c_k est le réel défini à la question précédente.

2.e. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k .

PARTIE II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe non orienté K_n à n sommets numérotés de 1 à n , dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui-même par une arête.

3. Représenter graphiquement les graphes K_2 , K_3 , K_4 et K_5 .
4. 4.a. Déterminer la matrice d'adjacence du graphe K_n .
- 4.b. Dans le graphe K_4 , combien existe-t-il de chaînes (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même?
On pourra utiliser le résultat de la question 2.e.
5. Déterminer le degré de chaque sommet du graphe K_n .
6. Montrer que le nombre total d'arêtes du graphe K_n est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

PARTIE III

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et K_n le graphe défini dans la partie II. On parcourt les sommets du graphe K_n de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k = 0$, on se trouve sur le sommet numéro 1.
- À chaque étape, on change de sommet en suivant au hasard, avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout entier naturel k , on note X_k la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel on se trouve à la k -ième étape (c'est-à-dire à l'issue du k -ième déplacement). En particulier, X_0 est une variable aléatoire constante égale à 1.

Pour tout entier naturel k , on note V_k la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_k = (\mathbb{P}([X_k = 1]) \quad \mathbb{P}([X_k = 2]) \quad \cdots \quad \mathbb{P}([X_k = n]))$$

7. Déterminer V_0 et V_1 .
8. Déterminer la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
9. 9.a. Rappeler la définition d'un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

9.b. Soit V la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$:

$$V = \left(\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \cdots \quad \frac{1}{n} \right)$$

Montrer que V est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

10. 10.a. Pour tout entier naturel k , rappeler sans démonstration une expression de V_{k+1} en fonction de V_k , M_n et n , où M_n est la matrice définie en introduction de la partie I.

10.b. En déduire, pour tout entier naturel k :

$$V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k$$

10.c. En utilisant le résultat de la question 2.e., en déduire que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on reconnaîtra la loi.

11. Comparer et commenter les résultats des questions 9.b. et 10.c..