

TECHNIQUE

EXERCICE 1 – ●●● – Matrices stochastiques

Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est stochastique lorsque :

$$\checkmark \forall (i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, m_{i,j} \geq 0$$

$$\checkmark \forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1.$$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs.

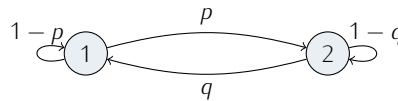
Démontrer que M est stochastique si, et seulement si, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M pour la valeur propre 1.

2. En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 2 – ●●● – Chaîne de Markov à deux états

Soient $p, q \in [0; 1]$. Considérons une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée au graphe suivant, telle que X_0 soit la variable aléatoire constante égale à 1. On note M la matrice de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n son n -ième état probabiliste.



- Donner la matrice M .
- Supposons $p = q = 0$.
 - Déterminer les états stables de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Supposons $p = q = 1$.
 - Déterminer les états stables de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Supposons $p, q \in]0; 1[$.
 - Démontrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède un unique état stable et le déterminer.
 - Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de la matrice M .
 - En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de M^n en fonction de n .
 - Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n .
 - Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

CONCOURS

EXERCICE 3 – ●●● – EML 2023 Appli Sujet 0

On considère trois points A, B, C du plan. L'objectif de l'exercice est l'étude du mouvement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces points. À l'étape 0, on suppose que le pion est en A . Ensuite, on suppose que le déplacement vérifie les règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "à l'instant n , le pion se situe en A ", et l'on définit de la même manière les évènements B_n et C_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note également $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ ainsi que $V_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ le n -ième état probabiliste de cette chaîne de Markov.

PARTIE I. MODÉLISATION

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition associée à la chaîne de Markov étudiée. On la notera M .
2. **2.a.** Déterminer a_0, b_0, c_0 ainsi que a_1, b_1, c_1 .
2.b. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n \times M$.
2.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 \times M^n$.

PARTIE II. CALCUL DES PUISSANCES DE M ET APPLICATIONS

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice B est diagonalisable.
4. Calculer $B^2 - 5B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
5. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $B = PDP^{-1}$.
Calculer la matrice P^{-1} .
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, B^n = PD^nP^{-1}$.
7. La chaîne de Markov introduite admet-elle un état stable? Si oui, lequel?
8. Soit $n \in \mathbb{N}$.
8.a. Démontrer que $M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$.
8.b. Démontrer que $a_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n} \right)$. Déterminer également b_n et c_n .
8.c. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Interpréter ce résultat.

PARTIE III. NOMBRE MOYENS DE PASSAGE EN A ET TEMPS D'ATTENTE AVANT LE PREMIER PASSAGE EN B

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire X_n par : $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
9.a. Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
9.b. Calculer l'espérance de X_n .
9.c. En déduire le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n .
10. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B , et dans le cas où le pion ne passe jamais en B , on pose $T_B = 0$.
Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.
10.a. Calculer les probabilités $\mathbb{P}([T_B = 1])$ et $\mathbb{P}([T_B = 2])$.
10.b. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_B = k])$.
10.c. Reconnaître alors la loi de T_B . Que dire de l'évènement $[T_B = 0]$? Donner l'espérance de T_B et interpréter le résultat obtenu.