Exercices du chapitre 18
Espaces vectoriels

Exercice 1 - ●○○ - Pas des sous-espaces vectoriels !

Dans chaque cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Justifier pourquoi.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 1\}$
2. $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ / \ y = x^2 \right\}$
3. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ M^2 = 0_n\}$

Exercice 2 - ●●○ - Sous-espaces vectoriels

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AMA = 0_n\}$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $F_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda X\}$. Démontrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ainsi que F le sous-ensemble de E constitué des fonctions paires.
   Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Notons E l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ ainsi que F le sous-ensemble de E constitué des suites qui convergent vers 0.
   Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 - ●○○ - Manipulation sur des combinaisons linéaires

On considère les matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que Y_1 et Y_2 sont des combinaisons linéaires de X_1 et X_2.
2. Vérifier que X_1 et X_2 sont des combinaisons linéaires de Y_1 et Y_2.
3. En déduire que $\text{Vect}(X_1, X_2) = \text{Vect}(Y_1, Y_2)$.
4. La matrice $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\text{Vect}(X_1, X_2)$?

Exercice 4 - ●●○

Dans chaque cas, démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base et préciser sa dimension.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\}$
4. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0_{n,1}\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
5. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0\}$
7. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & b & b \\ 0 & a - b & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 5 - ●○○

Soient a, b, c trois réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a + c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et on note F l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$.

1. Démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base ainsi que la dimension.
2. Exprimer A^2 en fonction de I, A et J puis établir que $F = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.
3. En déduire que la famille (I, A, A^2) est une base de F.
4. Déterminer la matrice des coordonnées de J dans la base (I, A, A^2).

Exercice 6 - ●●○

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ JMJ = M\}$.
Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Exercice 7 - ●●○ - EV de fonctions polynomiales

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ P(x) - xP'(x) = 0\}$. Justifier que E est un espace vectoriel, en déterminer une base ainsi que la dimension.

Exercice 8 - ●●○ - EV de fonctions polynomiales (bis)

On note $u : x \longmapsto x^2$.

1. Donner les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Démontrer que la famille $\big(x \longmapsto 1, x \longmapsto x, x \longmapsto x(x-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer les coordonnées de u dans cette base.
3. Démontrer que la famille $\big(x \longmapsto 1, x \longmapsto x+1, x \longmapsto (x+1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer les coordonnées de u dans cette base.

Exercice 9 - ●●○

Déterminer le rang de chacune des familles ci-dessous.

1. $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
3. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
4. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
5. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 10 - ●●○ - Type concours

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $\mathscr{E}_1(A)$ et $\mathscr{E}_2(A)$ suivants :

$$\mathscr{E}_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = M\} \ \ ; \ \ \mathscr{E}_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ A^2M = AM\}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{E}_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $\mathscr{E}_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. 2.a. Établir : $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)$.
   2.b. Montrer que si A est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \mathscr{E}_2(A)$.
3. 3.a. Établir que si $A - I_3$ est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \{0_3\}$.
   3.b. Un exemple. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathscr{E}_1(B)$ et $\mathscr{E}_2(B)$.

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer $C^2 - C$.
5. Notons $E = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = 0_{3,1}\}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = X\}$. Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base de chaque.
6. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
7. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

8. Déterminer la matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C = PDP^{-1}$.
9. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$. Établir :
$$M \in \mathscr{E}_1(C) \iff N \in \mathscr{E}_1(D)$$
10. Montrer que $N \in \mathscr{E}_1(D)$ si, et seulement si, il existe six réels a, b, c, d, e, f tels que $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
11. En déduire une base de $\mathscr{E}_1(D)$ puis une base de $\mathscr{E}_1(C)$.
12. Déterminer $\mathscr{E}_2(C)$.

Exercice 11 – ●●● – Famille de fonctions ou de suites

1. Posons $f_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $f_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $f_3 : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x}$. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   - 1.a. Démontrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E. En déduire le rang de la famille (f_1, f_2, f_3).
   - 1.b. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle génératrice de E ?
2. Considérons les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2^n$. Notons E l'espace vectoriel des suites réels.
   - 2.a. Démontrer que la famille (u, v) est une famille libre de E.
   - 2.b. Notons $F = \{w \in E \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - w_{n+1} - 2w_n = 0\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

Exercice 12 – ●●● – Matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$A^k = 0 \ ; \ A^{k-1} \neq 0$$

1. Justifier l'existence d'une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A^{k-1}X \neq 0_{n,1}$ et en donner une.
2. Soit X une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A^{k-1}X \neq 0_{n,1}$. Démontrer que la famille $\left(X, AX, \ldots, A^{k-1}X\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Quelle information peut-on en déduire sur p ?