19

Algèbre linéaire

Applications linéaires entre espaces vectoriels

Introduction...

Quiconque parle d'applications linéaires en dimension finie pense nécessairement au célèbre Théo-Raym Durrant (1843-2017, israelo-argentino-chinois), dont un très célèbre théorème porte son nom...
Sa contribution, tout comme celle de Izo Morfyssm (1917-2043, islando-arménien), fut considérable dans l'étude des applications linéaires. En effet, on leur doit un remarquable résultat sur le dual de l'espace vectoriel des classes d'équivalences des distributions tempérées modulo les formes quadratiques réelles : il est isomorphe au corps des matrices nilpotentes sur l'anneau $\mathbb{Z}/\pi\mathbb{Z}$. La démonstration de ce théorème repose, en partie, sur l'étude des formes modulaires définies sur la Lemniscate de Kolmogorov-Smirnov, à valeurs dans le demi-plan de Poincaré. Ce résultat, qui ne sera pas démontré dans ce cours (la marge étant trop étroite pour la contenir) pourrait en revanche faire l'objet d'un problème de "TOP3" : un grand classique donc.

Bref, nous commencerons modestement par l'étude des applications linéaires (les mêmes qu'en quatrième en fait)...

Pour bien démarrer...

1. Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
   - **Définition :** f est injective lorsque
   - **Définition :** f est surjective lorsque
   - **Définition :** f est bijective lorsque
   - Caractérisations de la bijectivité de f :
2. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ est une famille libre d'un espace vectoriel E lorsque :
3. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E lorsque :
4. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ est une base d'un espace vectoriel E lorsque :
5. La dimension d'un espace vectoriel est
6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Caractérisation des bases.
7. Soient E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. **Définition :** F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

Dans tout ce chapitre, E et F sont des espaces vectoriels réels.

I Définition et premiers exemples

Définitions 1 — **Application linéaire**

D1 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une **application linéaire** lorsque :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

D2 Un **endomorphisme de E** est une application linéaire de E dans E.

D3 Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.

D4 Un **automorphisme de E** est un endomorphisme de E bijectif.

En gros...
Une application linéaire est une application compatible avec les combinaisons linéaires !

✎ Notation
On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F ; et $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$ (l'ensemble des endomorphismes de E).

Viennent naturellement quelques propriétés immédiates :

Propriétés 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

P1 $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$

P2 $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$; et en particulier : $\forall \vec{u} \in E,\ f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$

P3 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n \in E\ :\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{u}_i).$

♥ Astuce du chef ♥
Les deux premières propriétés peuvent aussi servir pour montrer qu'une application n'est pas linéaire...

⋆ Démonstration :

⋆

Exemples 1

E1 L'application $\vec{u} \in E \longmapsto \vec{u}$ est un endomorphisme de E, et même un automorphisme de E : c'est l'**identité**, notée id_E.

E2 L'application $\vec{u} \in E \longmapsto \vec{0}_F$ est une application linéaire de E dans F : c'est l'application linéaire nulle.

E3 L'application $P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

E4 Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $f : x \longmapsto ax$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Remarque

Quel scoop... on sait ça depuis la quatrième !

E5 L'application $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tA$ est une application linéaire.

E6 L'application qui, à une variable aléatoire, associe son espérance, est une application linéaire. En revanche, l'application qui, à une variable aléatoire, associe sa variance, n'est pas une application linéaire.

Pourquoi ?

On sait que $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$. Mais, de façon générale, $\mathbb{V}(aX + bY) \neq a\mathbb{V}(X) + b\mathbb{V}(Y)$...

E7 Considérons l'application $f : (x, y) \longmapsto (2x + y, x - y)$. Démontrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

E8 Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (3x - y, x + 5y + 1)$. Montrons que f n'est pas une application linéaire.

E9 Considérons l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_3[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x) - P(x + 1)$. Montrons que f est une application linéaire de $R_3[x]$ dans $\mathbb{R}_2[x]$.

E10 Considérons l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x)^2 + P'(x)$. Montrons que f n'est pas une application linéaire.

E11 Notons φ l'application définie sur $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui à toute fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} tf(t)dt$. Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Confusion d'objets !
$\varphi(f)$ est une fonction !

Théorème 1

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}\right.$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Vocabulaire
On dira que f est l'application linéaire *canoniquement associée* à A.

$\star$ Démonstration :

$\star$

Exemples 2

E1 Démontrons que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \end{pmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $f(X) = AX$.

Conclusion : l'application f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A est sa matrice canoniquement associée.

$\boxed{\text{E2}}$ Démontrons que l'application $f : x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Autrement dit : Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire... Et la composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

Propriétés 2 — Structure de $\mathscr{L}(E,F)$

Soient E, F, G trois espaces vectoriels réels.

$\boxed{\text{P1}}$ $\big(\mathscr{L}(E,F), +, .\big)$ est un espace vectoriel réel.

$\boxed{\text{P2}}$ $\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \forall g \in \mathscr{L}(F,G),\ g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Conséquence Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathscr{L}(E)$, où f^n désigne $\underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

$\star$ Démonstration :

P1. Montrons que $\big(\mathscr{L}(E,F), +, .\big)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans F.

- ✓ Par définition, $\mathscr{L}(E,F)$ est inclus dans l'espace vectoriel des applications de E dans F.
- ✓ L'application nulle est linéaire, donc $\mathscr{L}(E,F)$ est non vide.
- ✓ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$.
  - ∗ On sait déjà que $\lambda f + \mu g$ est une application définie sur E et à valeurs dans F, car f et g le sont.
  - ∗ Montrons que $\lambda f + \mu g$ est linéaire.
    Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in E$. Montrons que $(\lambda f + \mu g)(a\vec{u} + b\vec{v}) = a(\lambda f + \mu g)(\vec{u}) + b(\lambda f + \mu g)(\vec{v})$.
    On a, par linéarité de l'évaluation en $a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)(a\vec{u} + b\vec{v}) &= \lambda f(a\vec{u} + b\vec{v}) + \mu g(a\vec{u} + b\vec{v}) && f \text{ et } g \text{ sont linéaires} \\
&= \lambda\big(af(\vec{u}) + bf(\vec{v})\big) + \mu\big(ag(\vec{u}) + bg(\vec{v})\big) \\
&= a\big(\lambda f(\vec{u}) + \mu g(\vec{u})\big) + b\big(\lambda f(\vec{u}) + \mu g(\vec{u})\big)(\vec{v}) && \text{linéarité des évaluations en } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\
&= a(\lambda f + \mu g)(\vec{u}) + b(\lambda f + \mu g)(\vec{v})
\end{aligned}$$

    Donc $\lambda f + \mu g$ est linéaire.

  Par conséquent :
$$\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$$

Conclusion : $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans F ; $\mathscr{L}(E,F)$ est donc un espace vectoriel.

P2. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrons que $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

- L'application $g \circ f$ est bien définie sur E et à valeurs dans G.
- Montrons que $g \circ f$ est linéaire.
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in E$. Montrons que $g \circ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda g \circ f(\vec{u}) + \mu g \circ f(\vec{v})$.
  On a :

$$\begin{aligned}
g \circ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= g\big(f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\big) && \text{linéarité de } f \\
&= g\big(\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})\big) && \text{linéarité de } g \\
&= \lambda g\big(f(\vec{u})\big) + \mu g\big(f(\vec{v})\big) \\
&= \lambda g \circ f(\vec{u}) + \mu g \circ f(\vec{v})
\end{aligned}$$

  Donc $g \circ f$ est linéaire.

Conclusion : $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

$\star$

Propriété 3

Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

☞ Rappel... Si f est une application bijective de A dans B, alors f^{-1} est bijective de B dans A ; et on a aussi :

$f \circ f^{-1} =$; $f^{-1} \circ f =$

$\star$ Démonstration :

Pour finir sur cette première partie, un résultat parfois utile :

Propriété 4

Deux applications linéaires sur E sont égales si, et seulement si, elles coïncident sur une base de E.
Autrement dit, si en notant $n = \dim(E)$ et considérons une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ de E, on a :

$$\big(\forall x \in E,\ f(x) = g(x)\big) \iff \big(\forall i \in [\![1; n]\!],\ f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i)\big)$$

À retenir...
En particulier, une application linéaire est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

⋆ Démonstration :

⋆

II Noyau & image d'une application linéaire

Dans toute la suite, f désigne une application linéaire de E dans F.

Définition 2 — **Noyau d'une application linéaire**

Le **noyau** de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble défini par :

$$\ker(f) = \left\{\vec{u} \in E \ / \ f(\vec{u}) = \vec{0}_F\right\}$$

Propriété 5

$\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

⋆ Démonstration :

$\star$

Un résultat très utile en pratique qui relie noyau et injectivité d'une application linéaire :

PROPRIÉTÉ 6 — **INJECTIVITÉ ET NOYAU**

f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$

✘ Attention !
Cela ne veut pas dire que $\ker(f)$ est vide (un espace vectoriel n'est jamais vide) : mais seulement qu'il est *réduit au vecteur nul.*

$\star$ DÉMONSTRATION :

Remarque
On a, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$:
$f(\vec{u}) = f(\vec{v})$
$\iff f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \overrightarrow{0_F}$
$\iff f(\vec{u} - \vec{v}) = \overrightarrow{0_F}$
$\iff \vec{u} - \vec{v} \in \ker(f)$
$\iff \exists \vec{w} \in \ker(f) \ / \ \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

$\star$

EXEMPLES 3

E1 L'application $f : P \in \mathbb{R}[x] \longmapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ (la linéarité découle de la linéarité de la dérivation). Et :

$$\ker(f) =$$

Conclusion : l'application f n'est pas injective.

E2 Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'application f définie sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par : $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.
D'après le théorème 1, on sait que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminons son noyau. Qu'en dire ?

En dimension finie (ce qui sera, sauf cas très exceptionnels, toujours le cas), la recherche du noyau d'une application linéaire peut toujours se ramener à la résolution d'un système linéaire homogène.

Définition 3 — **Image d'une application linéaire**

L'**image** de f, notée $\text{Im}(f)$, est l'ensemble défini par :

$$\text{Im}(f) = \left\{\vec{v} \in F \ / \ \exists \ \vec{u} \in E, \ \vec{v} = f(\vec{u})\right\} = \left\{f(\vec{u}) \ / \ \vec{u} \in E\right\}$$

☞ **Rappels...**
• En fait : $\text{Im}(f) = f(E)$. C'est l'ensemble de toutes les images des vecteurs de E par f...
• On avait également vu que f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$. On ne peut pas faire mieux dans le cas des applications linéaires.

Voici une propriété que l'on utilisera pour déterminer l'image d'une application linéaire :

Propriété 7

$\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et même :

si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de E, alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}\big(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\big)$

♣ **Méthode !**
En pratique, on prend presque toujours la base canonique de E...

⋆ Démonstration :

$\star$

Exemple 4

Démontrons que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix}$ est linéaire et déterminons son image. Qu'en dire ?

Petite partie à la limite du programme : espaces vectoriels isomorphes et dimension

Soient E un espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_n$ des vecteurs de E. On pose f l'application suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \end{array} \right.$$

Remarque Au passage, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est l'image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^n$...

Sans difficulté, on vérifie que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$. De surcroît :

- par définition, f est surjective si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E ;
- par définition : $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_n)$ est libre. D'après la propriété 6, f est donc injective si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_n)$ est libre.

On en déduit donc : f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans E si, et seulement si, $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E. En particulier, si f est un isomorphisme, alors $\dim(E) = n$. On retient donc pour l'instant :

Vocabulaire On dit que deux EV sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme entre les deux.

$$\boxed{\text{si } \mathbb{R}^n \text{ et } E \text{ sont isomorphes, alors } \dim(E) = n}$$

La réciproque de cette implication est-elle encore valable ? Oui, c'est bien le cas !

Supposons que $\dim(E) = n$, considérons $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et posons $f : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.

D'après ce qui précède, puisque $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, f est un isomorphisme. D'où :

$$\boxed{\text{si } \dim(E) = n, \text{ alors } E \text{ est isomorphe à } \mathbb{R}^n}$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 2 — **Isomorphisme et dimension**

$\dim(E) = n$ si, et seulement si, E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...)

☞ Pour info... Et par conséquent : $\dim(E) = \dim(F)$ ssi E et F sont isomorphes.

L'impact est considérable : tout espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à un $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Autrement dit : tout vecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être vu comme une matrice ligne (ou colonne) : la matrice de ses coordonnées, une fois une base de E choisie.

Remarque Ce résultat est à la fois puissant et décevant : tous les EV de dimension finie n ont la même tête que $\mathbb{R}^n$. C'est génial et peu original à la fois...

III Théorème du rang et conséquences

Définition 4 — **Rang d'une application linéaire**

Le **rang** de f, noté $\text{rg}(f)$, est la dimension de $\text{Im}(f)$.

On a immédiatement :

Propriétés 8

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

P1 $\text{rg}(f) \leqslant \min\big(\dim(E), \dim(F)\big)$

P2 f est surjective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(F)$

Remarque

Par conséquent, si $\dim(E) < \dim(F)$, alors f ne peut pas être surjective !

⋆ Démonstration : ⋆

Et voici le fameux théorème, un des plus importants d'algèbre linéaire en dimension finie :

Théorème 3 — **Théorème du rang**

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors :

$$\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \text{rg}(f)$$

✘ Attention !

C'est la dimension de l'espace de départ qui entre en jeu !

⋆ Démonstration : Allez voir en maths appro ! ⋆

♣ Méthode 1 ♣ Pour déterminer noyau et image d'une application linéaire :

1. on commence par celui qui nous semble le plus simple (ou celui qui est demandé en premier),
2. on utilise le théorème du rang pour avoir la dimension de l'autre, et le déterminer par ensuite.

Exemple 5

Reprenons l'application f de Exemples 3 – E2. Quel est son rang ?

Conséquence importante du théorème du rang :

Propriété 9

Soient E et F deux espace vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
f \text{ injective} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & f \text{ surjective} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& f \text{ bijective} &
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathrm{rg}(f) = n \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& f \text{ bijective} &
\end{tikzcd}$$

Important !
Cas particulier important : cette propriété est vraie pour les endomorphismes en dimension finie.

Démonstration : Supposons que $\dim(E) = \dim(F)$.

- Montrons que l'injectivité de f équivaut à sa surjectivité.
  Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim\Big(\ker(f)\Big) + \mathrm{rg}(f)$$

  Ensuite :

$$\begin{aligned}
\Big(f \text{ est injective}\Big) &\iff \ker(f) = \{0_E\} \\
&\iff \dim\Big(\ker(f)\Big) = 0 \\
&\iff \mathrm{rg}(f) = \dim(E) && \text{théorème du rang} \\
&\iff \mathrm{rg}(f) = \dim(F) && \dim(E) = \dim(F) \\
&\iff \mathrm{Im}(f) = F \\
&\iff \Big(f \text{ est surjective}\Big)
\end{aligned}$$

☞ Rappels...
- Le singleton $\{0_E\}$ est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 0.
- $\mathrm{Im}(f)$ est un ssev de F
- le seul ssev de F de dimension égale à $\dim(F)$ est F lui-même

- Montrons que f est injective si, et seulement si, f est bijective.
  $\boxed{\Leftarrow}$ On sait déjà que la bijectivité de f implique son injectivité (par définition).
  $\boxed{\Rightarrow}$ D'après ce qui précède, l'injectivité de f implique sa surjectivité. Par conséquent, si f est injective, elle est également surjective et donc bijective. L'injectivité de f implique donc sa bijectivité.

  Conclusion : f est injective si, et seulement si, f est bijective.
- De la même façon, on démontre que f est surjective si, et seulement si, f est bijective.

Exemple 6

Démontrons que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.