



19

ALGÈBRE LINÉAIRE

APPLICATIONS LINÉAIRES ENTRE ESPACES VECTORIELS

INTRODUCTION...

Quiconque parle d'applications linéaires en dimension finie pense nécessairement au célèbre Théo-Raym Durrant (1843-2017, israélo-argentin-chinois), dont un très célèbre théorème porte son nom...

Sa contribution, tout comme celle de Izo Morfyssm (1917-2043, islando-arménien), fut considérable dans l'étude des applications linéaires. En effet, on leur doit un remarquable résultat sur le dual de l'espace vectoriel des classes d'équivalences des distributions tempérées modulo les formes quadratiques réelles : il est isomorphe au corps des matrices nilpotentes sur l'anneau $\mathbb{Z}/\pi\mathbb{Z}$. La démonstration de ce théorème repose, en partie, sur l'étude des formes modulaires définies sur la Lemniscate de Kolmogorov-Smirnov, à valeurs dans le demi-plan de Poincaré. Ce résultat, qui ne sera pas démontré dans ce cours (la marge étant trop étroite pour la contenir) pourrait en revanche faire l'objet d'un problème de "TOP3" : un grand classique donc.

Bref, nous commencerons modestement par l'étude des applications linéaires (les mêmes qu'en quatrième en fait)...

POUR BIEN DÉMARRER...

1. Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

- **Définition** : f est injective lorsque $\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x') \implies x = x')$

- **Définition** : f est surjective lorsque $\forall y \in F, \exists ! x \in E / y = f(x)$

- **Définition** : f est bijective lorsque $\forall y \in F, \exists ! x \in E / y = f(x)$

• Caractérisations de la bijectivité de f :

f est bijective si, et seulement si, f est injective et surjective

si, et seulement si, $\forall y \in F, \exists ! x \in E / y = f(x)$

si, et seulement si, il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$

2. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre d'un espace vectoriel E lorsque :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n), \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{e}_k = \vec{0}_E \implies \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = 0 \right)$$

3. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E lorsque :

$$\forall \vec{u} \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \vec{u} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{e}_k$$

4. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base d'un espace vectoriel E lorsque :

$$\forall \vec{u} \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \vec{u} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{e}_k$$

5. La dimension d'un espace vectoriel est le cardinal commun à toutes ses bases.

6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Caractérisation des bases.

Une famille de E est une base si, et seulement si, elle est libre et génératrice

si, et seulement si, elle est libre et de cardinal égal à $\dim(E)$

si, et seulement si, elle est génératrice et de cardinal égal à $\dim(E)$

7. Soient E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E . **Définition** : F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

✓ $F \subset E$;

✓ $F \neq \emptyset$ (on vérifie que $\vec{0}_E \in F$);

✓ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$.

Dans tout ce chapitre, E et F sont des espaces vectoriels réels.

I DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

DÉFINITIONS 1

APPLICATION LINÉAIRE

D1 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une **application linéaire** lorsque :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

D2 Un **endomorphisme de E** est une application linéaire de E dans E .

D3 Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.

D4 Un **automorphisme de E** est un endomorphisme de E bijectif.

En gros...

Une application linéaire est une application compatible avec les combinaisons linéaires !

Notation

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F ; et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ (l'ensemble des endomorphismes de E).

Viennent naturellement quelques propriétés immédiates :

PROPRIÉTÉS 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

P1 $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

P2 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in E, f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$; et en particulier : $\forall \vec{u} \in E, f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$

P3 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in E : f \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{u}_i)$.

♥ Astuce du chef ♥

Les deux premières propriétés peuvent aussi servir pour montrer qu'une application n'est pas linéaire...

★ DÉMONSTRATION :

P1. Puisque f est une application linéaire, on a : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

En prenant $\lambda = \mu = 0$ et $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}_E$, on a :

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}_E ; \quad \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \vec{0}_F$$

Conclusion : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

P2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in E$. Puisque f est une application linéaire, on a : $\forall \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in E, f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

En prenant $\mu = 0$ et $\vec{v} = \vec{0}_E$, on a :

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \lambda \vec{u} ; \quad \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \lambda f(\vec{u})$$

Conclusion : $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$. D'où le cas particulier, en prenant $\lambda = -1$.

P3. Procédons par récurrence...

• **Initialisation.** Pour $n = 1$: immédiat d'après **P2**.

• **Héritérité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons " $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in E : f \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{u}_i)$ ".

Montrons " $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n+1} \in E : f \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{u}_i \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(\vec{u}_i)$ ".

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n+1} \in E$. On a :

$$\begin{aligned} f \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{u}_i \right) &= f \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i + \lambda_{n+1} \vec{u}_{n+1} \right) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= f \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i \right) + \lambda_{n+1} f(\vec{u}_{n+1}) && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{u}_i) + \lambda_{n+1} f(\vec{u}_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(\vec{u}_i) \end{aligned}$$

L'héritérité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in E : f \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{u}_i)$.

EXEMPLES 1

- E1** L'application $\vec{0} \in E \mapsto \vec{0}$ est un endomorphisme de E , et même un automorphisme de E : c'est l'**identité**, notée id_E .
- E2** L'application $\vec{0} \in E \mapsto \vec{0}_F$ est une application linéaire de E dans F : c'est l'application linéaire nulle.
- E3** L'application $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- E4** Les applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont les applications $f : x \mapsto ax$, avec $a \in \mathbb{R}$.
- E5** L'application $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mapsto {}^t A$ est une application linéaire.
- E6** L'application qui, à une variable aléatoire, associe son espérance, est une application linéaire. En revanche, l'application qui, à une variable aléatoire, associe sa variance, n'est pas une application linéaire.
- E7** Considérons l'application $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$. Démontrons que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

✓ On a déjà : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

✓ Montrons que f est linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = \lambda f(x, y) + \mu f(x', y')$.

On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (2(\lambda x + \mu x') + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - (\lambda y + \mu y')) \\ &= (\lambda(2x + y) + \mu(2x' + y'), \lambda(x - y) + \mu(x' - y')) \\ &= \lambda(2x + y, x - y) + \mu(2x' + y', x' - y') \\ &= \lambda f(x, y) + \mu f(x', y') \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Conclusion : l'application $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

- E8** Considérons l'application f définie sur \mathbb{R}^2 par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x - y, x + 5y + 1)$. Montrons que f n'est pas une application linéaire.

Remarquons que $f(0, 0) \neq (0, 0)$.

Conclusion : f n'est pas linéaire.

- E9** Considérons l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_3[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(P)(x) = P(x) - P(x + 1)$. Montrons que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[x]$ dans $\mathbb{R}_2[x]$.

✓ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[x]$. Montrons que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Autrement dit, montrons : $\forall x \in \mathbb{R}, f(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x) - (\lambda P + \mu Q)(x + 1) \\ &= \lambda P(x) + \mu Q(x) - \lambda P(x + 1) - \mu Q(x + 1) \quad \curvearrowleft \text{ linéarité de l'évaluation en } x \text{ et } x + 1 \\ &= \lambda(P(x) - P(x + 1)) + \mu(Q(x) - Q(x + 1)) \\ &= \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

✓ Soit $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d - (a(x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1) + d) \\ &= a(x^3 - (x + 1)^3) + b(x^2 - (x + 1)^2) + c(x - (x + 1)) \\ &= a(-3x^2 - 3x - 1) + b(-2x - 1) - c \\ &= -3ax^2 - (3a + 2b)x - a - b - c \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$f(P) \in \mathbb{R}_2[x]$$

Conclusion : $\forall P \in \mathbb{R}_3[x], f(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.

Conclusion : f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[x]$ dans $\mathbb{R}_2[x]$.

Confusion d'objets !

$f(P)$ est une fonction !

- E10** Considérons l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(P)(x) = P(x)^2 + P'(x)$. Montrons que f n'est pas une application linéaire.

Considérons la fonction polynomiale $P : x \mapsto x$. On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-f(P)(x) = -(x^2 + 1) \quad ; \quad f(-P)(x) = x^2 - 1$$

Les fonctions polynomiales $x \mapsto x^2 - 1$ et $x \mapsto -(x^2 + 1)$ sont différentes. D'où : $f(-P) \neq -f(P)$.

Conclusion : f n'est pas linéaire.

✓ Pour s'entraîner...

En définissant f sur $\mathbb{R}_n[x]$ (avec $n \geq 1$), on peut démontrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

E11 Notons φ l'application définie sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(f)(x) = \int_0^{x^2} tf(t)dt$. Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Confusion d'objets !
→ $\varphi(f)$ est une fonction !

✓ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $t \mapsto tf(t)$ est un produit de deux fonctions continues sur \mathbb{R} , elle est donc également continue sur \mathbb{R} . Par conséquent, la fonction $t \mapsto tf(t)$ admet des primitives, qui sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Notons G l'une d'elles. On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(f)(x) &= \int_1^{x^2} tf(t)dt \\ &= G(x^2) - G(1)\end{aligned}$$

Or G est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , donc par composition, la fonction $x \mapsto G(x^2)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Par conséquent, la fonction $\varphi(f)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , donc en particulier continue sur \mathbb{R} .

Conclusion : φ est définie sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

✓ Montrons que φ est linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrons que $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$. Autrement dit, montrons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(\varphi(f) + \mu\varphi(g))(x)$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_1^{x^2} t(\lambda f(t) + \mu g(t))dt \\ &= \lambda \int_1^{x^2} tf(t)dt + \mu \int_1^{x^2} tg(t)dt \\ &= \lambda\varphi(x)f(x) + \mu\varphi(x)g(x)\end{aligned}$$

) par linéarité de l'intégrale

On a établi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x)$$

D'où :

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

Conclusion : φ est linéaire.

Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

THÉORÈME 1

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Vocabulaire

On dira que f est l'application linéaire *canoniquement associée* à A .

* **DÉMONSTRATION :** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Puisque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a déjà : $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), f(X) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Montrons que f est linéaire.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrons que $f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y)$.
On a :

$$\begin{aligned}f(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X + \mu Y) \\ &= \lambda AX + \mu AY \\ &= \lambda f(X) + \mu f(Y)\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

EXEMPLES 2

E1 Démontrons que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \end{pmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $f(X) = AX$.

Conclusion : l'application f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A est sa matrice canoniquement associée.

E2 Démontrons que l'application $f : x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ de sorte que $f(X) = AX$.

Conclusion : l'application f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A est sa matrice canoniquement associée.

PROPRIÉTÉS 2

STRUCTURE DE $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E, F, G trois espaces vectoriels réels.

P1 $(\mathcal{L}(E, F), +, .)$ est un espace vectoriel réel.

P2 $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Autrement dit :

Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire... Et la composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

Conséquence

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{L}(E)$, où f^n désigne $\underbrace{f \circ f \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$

DÉMONSTRATION :

P1. Montrons que $(\mathcal{L}(E, F), +, .)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans F .

- ✓ Par définition, $\mathcal{L}(E, F)$ est inclus dans l'espace vectoriel des applications de E dans F .
- ✓ L'application nulle est linéaire, donc $\mathcal{L}(E, F)$ est non vide.
- ✓ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$.

- * On sait déjà que $\lambda f + \mu g$ est une application définie sur E et à valeurs dans F , car f et g le sont.
- * Montrons que $\lambda f + \mu g$ est linéaire.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in E$. Montrons que $(\lambda f + \mu g)(a\vec{u} + b\vec{v}) = a(\lambda f + \mu g)(\vec{u}) + b(\lambda f + \mu g)(\vec{v})$.

On a, par linéarité de l'évaluation en $a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(a\vec{u} + b\vec{v}) &= \lambda f(a\vec{u} + b\vec{v}) + \mu g(a\vec{u} + b\vec{v}) \\ &= \lambda (af(\vec{u}) + bf(\vec{v})) + \mu (ag(\vec{u}) + bg(\vec{v})) \quad \begin{matrix} \text{f et g sont linéaires} \\ \text{f et g sont linéaires} \end{matrix} \\ &= a(\lambda f(\vec{u}) + \mu g(\vec{u})) + b(\lambda f(\vec{u}) + \mu g(\vec{u}))(\vec{v}) \quad \begin{matrix} \text{linéarité des évaluations en } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{linéarité des évaluations en } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \end{matrix} \\ &= a(\lambda f + \mu g)(\vec{u}) + b(\lambda f + \mu g)(\vec{v}) \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + \mu g$ est linéaire.

Par conséquent :

$$\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$$

Conclusion : $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans F ; $\mathcal{L}(E, F)$ est donc un espace vectoriel.

P2. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrons que $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

- L'application $g \circ f$ est bien définie sur E et à valeurs dans G .
- Montrons que $g \circ f$ est linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in E$. Montrons que $g \circ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda g \circ f(\vec{u}) + \mu g \circ f(\vec{v})$.

On a :

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= g(f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})) \\ &= g(\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})) \quad \begin{matrix} \text{linéarité de } f \\ \text{linéarité de } f \end{matrix} \\ &= \lambda g(f(\vec{u})) + \mu g(f(\vec{v})) \quad \begin{matrix} \text{linéarité de } g \\ \text{linéarité de } g \end{matrix} \\ &= \lambda g \circ f(\vec{u}) + \mu g \circ f(\vec{v}) \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est linéaire.

Conclusion : $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

PROPRIÉTÉ 3

Si f est un isomorphisme de E dans F , alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

DÉMONSTRATION : Supposons que f est un isomorphisme de E dans F .

- Puisque f est bijective de E dans F , on sait que f^{-1} est bijective de F dans E .

Rappel...

Si f est une application bijective de A dans B , alors f^{-1} est bijective de B dans A ; et on a aussi : $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$; $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$

- Montrer que f^{-1} est une application linéaire de F dans E .

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in F$.

Puisque $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et que f est bijective de E dans F , il existe des uniques vecteurs \vec{x} et \vec{y} dans E , que nous considérons ensuite, tels que $\vec{u} = f(\vec{x})$ et $\vec{v} = f(\vec{y})$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= f^{-1}(\lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})) \\
 &= f^{-1}(f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})) \\
 &= \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \\
 &= \lambda f^{-1}(\vec{u}) + \mu f^{-1}(\vec{v})
 \end{aligned}$$

↘ linéarité de f
 ↘ $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$
 ↘ $f(\vec{x}) = \vec{u}$ et $f(\vec{y}) = \vec{v}$, donc $\vec{x} = f^{-1}(\vec{u})$ et $\vec{y} = f^{-1}(\vec{v})$

L'application f^{-1} est donc linéaire.

Conclusion : f^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

*

Pour finir sur cette première partie, un résultat parfois utile :

PROPRIÉTÉ 4

Deux applications linéaires sur E sont égales si, et seulement si, elles coïncident sur une base de E . Autrement dit, si en notant $n = \dim(E)$ et considérons une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de E , on a :

$$(\forall x \in E, f(x) = g(x)) \iff (\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i))$$

À retenir...

En particulier, une application linéaire est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

DÉMONSTRATION :

⇒ Immédiat.

⇐ Supposons : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i)$. Montrons $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = g(\vec{x})$.

Soit $\vec{x} \in E$. Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E , il existe des uniques réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i. \text{ On a alors :}$$

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x}) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{e}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i g(\vec{e}_i) \\
 &= g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i\right) \\
 &= g(\vec{x})
 \end{aligned}$$

↘ linéarité de f
 ↘ hypothèse
 ↘ linéarité de g

On a ainsi établi : $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = g(\vec{x})$.

Remarque

Puisque l'unicité des λ_i n'a pas été utilisée, seul le caractère générateur de la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ suffit.

*

II NOYAU & IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Dans toute la suite, f désigne une application linéaire de E dans F .

DÉFINITION 2

NOYAU D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Le **noyau** de f , noté $\ker(f)$, est l'ensemble défini par :

$$\ker(f) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$$

PROPRIÉTÉ 5

$\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

DÉMONSTRATION :

- ✓ Par définition : $\ker(f) \subset E$.
- ✓ Puisque f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Donc $0_E \in \ker(f)$. Ainsi, $\ker(f)$ est non vide.

✓ Montrons que $\ker(f)$ est stable par combinaison linéaire.

Soient $u, v \in \ker(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda u + \mu v \in \ker(f)$.

* On a déjà $u, v \in E$ et E étant un espace vectoriel, on obtient : $\lambda u + \mu v \in E$.

* Ensuite :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= \lambda f(u) + \mu f(v) && \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda \times 0_F + \mu \times 0_F && \text{car } u, v \in \ker(f) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda u + \mu v \in \ker(f)$$

Conclusion : $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Un résultat très utile en pratique qui relie noyau et injectivité d'une application linéaire :

PROPRIÉTÉ 6

INJECTIVITÉ ET NOYAU

f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$

Attention !
Cela ne veut pas dire que $\ker(f)$ est vide (un espace vectoriel n'est jamais vide) : mais seulement qu'il est réduit au vecteur nul.

* **DÉMONSTRATION** : Raisonnons par double implication...

⇒ Supposons que f est injective. Montrons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Raisonnons par double-inclusion.

□ Immédiat, car f est linéaire, donc $f(0_E) = 0_F$. D'où :

$$0_E \in \ker(f)$$

□ Soit $x \in \ker(f)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0_F \\ &= f(0_E) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{linéarité de } f \\ \curvearrowleft \end{array}$$

Par injectivité de f , on obtient : $x = 0_E$. D'où :

$$\ker(f) \subset \{0_E\}$$

Par conséquent : $\ker(f) = \{0_E\}$.

⇐ Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\implies f(x) - f(x') = 0_F \\ &\implies f(x - x') = 0_F \quad \begin{array}{l} \text{linéarité de } f \\ \curvearrowleft \end{array} \\ &\implies x - x' \in \ker(f) \\ &\implies x - x' = 0_E \quad \begin{array}{l} \text{ker}(f) = \{0_E\} \\ \curvearrowleft \end{array} \\ &\implies x = x' \end{aligned}$$

Par conséquent : f est injective.

Rappel...
 f injective sur E :
 $\forall x, x' \in E, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

EXEMPLES 3

E1 L'application $f : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ (la linéarité découle de la linéarité de la dérivation). Et :

$$\ker(f) = \mathbb{R}_0[x] \neq \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$$

Conclusion : l'application f n'est pas injective.

E2 Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'application f définie sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par : $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = AX$.

D'après le théorème 1, on sait que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminons son noyau. Qu'en dire ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in \ker(f) &\iff f(X) = 0_{3,1} \\ &\iff AX = 0_{3,1} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque
On a, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$:
 $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$
 $\iff f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0}_F$
 $\iff f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}_F$
 $\iff \vec{u} - \vec{v} \in \ker(f)$
 $\iff \exists \vec{w} \in \ker(f) / \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

$$\begin{aligned}
 & \iff L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
 & \iff L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
 & \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} x + y = -z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \\ z = z \end{cases} \\
 & \iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

☞ **Rédaction**
La question porte sur X , on termine donc avec $X = \dots$

Conclusion : $\ker(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; et puisque $\ker(f) \neq \{0_{3,1}\}$, l'application f n'est pas injective.

En dimension finie (ce qui sera, sauf cas très exceptionnels, toujours le cas), la recherche du noyau d'une application linéaire peut toujours se ramener à la résolution d'un système linéaire homogène.

DÉFINITION 3

IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

L'**image** de f , notée $\text{Im}(f)$, est l'ensemble défini par :

$$\text{Im}(f) = \{\vec{v} \in F / \exists \vec{u} \in E, \vec{v} = f(\vec{u})\} = \{f(\vec{u}) / \vec{u} \in E\}$$

Voici une propriété que l'on utilisera pour déterminer l'image d'une application linéaire :

PROPRIÉTÉ 7

$\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et même :

si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de E , alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$

Rappels...

- En fait : $\text{Im}(f) = f(E)$. C'est l'ensemble de toutes les images des vecteurs de E par f ...
- On avait également vu que f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$. On ne peut pas faire mieux dans le cas des applications linéaires.

Méthode !

En pratique, on prend presque toujours la base canonique de E ...

DÉMONSTRATION :

- ✓ Par définition : $\text{Im}(f) \subset F$.
- ✓ Puisque f est linéaire, on a $f(0_E) = 0_F$. Donc $0_F \in \text{Im}(f)$. Ainsi, $\text{Im}(f)$ est non vide.
- ✓ Montrons que $\text{Im}(f)$ est stable par combinaison linéaire.
Soient $y, z \in \text{Im}(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda y + \mu z \in \text{Im}(f)$.

On a déjà $y, z \in F$ et F étant un espace vectoriel, on obtient : $\lambda y + \mu z \in F$.

Ensuite :

Puisque $y \in \text{Im}(f)$, il existe $u \in E$, que l'on considère ensuite, tel que $y = f(u)$.

Puisque $z \in \text{Im}(f)$, il existe $v \in E$, que l'on considère ensuite, tel que $z = f(v)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \lambda y + \mu z &= \lambda f(u) + \mu f(v) \\
 &= f(\lambda u + \mu v)
 \end{aligned}
 \quad \text{) linéarité de } f$$

Or E est un espace vectoriel, donc $\lambda u + \mu v \in E$. Et ainsi, $\lambda y + \mu z \in \text{Im}(f)$.

Conclusion : $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

- On a :

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(f) &= \{f(x), x \in E\} \\
 &= \left\{ f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{e}_k \right), (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}
 \end{aligned}$$

$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E ,
donc $E = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{e}_k, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$

Remarque

Ce résultat démontre également au passage que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F ...

$$= \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\vec{e}_k), (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$= \text{Vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$$

★

EXEMPLE 4

Démontrons que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix}$ est linéaire et déterminons son image. Qu'en dire ?

- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a : $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Par conséquent, d'après le théorème 1, l'application f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- On sait que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, car c'en est même la base canonique. Donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Or

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

- On remarque alors que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, donc $\text{Im}(f) \neq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Conclusion : f n'est pas surjective.

Remarque

On pourrait également exhiber un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui n'a pas d'antécédent par f ...
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient (et une infinité d'autres...).

PETITE PARTIE À LA LIMITÉ DU PROGRAMME : ESPACES VECTORIELS ISOMORPHES ET DIMENSION

Soient E un espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ des vecteurs de E . On pose f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \end{array}$$

Remarque

Au passage, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est l'image par f de la base canonique de \mathbb{R}^n ...

Sans difficulté, on vérifie que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$. De surcroît :

- par définition, f est surjective si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E ;
- par définition : $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est libre. D'après la propriété 6, f est donc injective si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est libre.

On en déduit donc : f est un isomorphisme de \mathbb{R}^n dans E si, et seulement si, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E . En particulier, si f est un isomorphisme, alors $\dim(E) = n$. On retient donc pour l'instant :

si \mathbb{R}^n et E sont isomorphes, alors $\dim(E) = n$

Vocabulaire

On dit que deux EV sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme entre les deux.

La réciproque de cette implication est-elle encore valable ? Oui, c'est bien le cas !

Supposons que $\dim(E) = n$, considérons $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et posons $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$.
D'après ce qui précède, puisque $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E , f est un isomorphisme. D'où :

si $\dim(E) = n$, alors E est isomorphe à \mathbb{R}^n

On obtient ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME 2

ISOMORPHISME ET DIMENSION

$\dim(E) = n$ si, et seulement si, E est isomorphe à \mathbb{R}^n (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...)

Pour info...

Et par conséquent : $\dim(E) = \dim(F)$ si E et F sont isomorphes.

L'impact est considérable : tout espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à un \mathbb{R}^n (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Autrement dit : tout vecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être vu comme une matrice ligne (ou colonne) : la matrice de ses coordonnées, une fois une base de E choisie.

Remarque

Ce résultat est à la fois puissant et décevant : tous les EV de dimension finie n ont la même tête que \mathbb{R}^n . C'est génial et peu original à la fois...

III THÉORÈME DU RANG ET CONSÉQUENCES

DÉFINITION 4

RANG D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Le **rang** de f , noté $\text{rg}(f)$, est la dimension de $\text{Im}(f)$.

On a immédiatement :

PROPRIÉTÉS 8

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

P1 $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$

P2 f est surjective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(F)$

Remarque

Par conséquent, si $\dim(E) < \dim(F)$, alors f ne peut pas être surjective !

DÉMONSTRATION :

P1. • Par définition, $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$. Or $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F , qui lui est de dimension finie.

Ainsi, $\text{Im}(f)$ est de dimension finie et donc le rang de f est fini.

• Montrons que $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$ ET $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$.

* D'après ce qui précède, on a déjà :

$$\text{rg}(f) \leq \dim(F)$$

* Notons $n = \dim(E)$ et considérons (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E . On sait que :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

Autrement dit, la famille $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$. Et par conséquent :

$$\text{Card}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \geq \dim(\text{Im}(f))$$

On a ainsi :

$$\dim(E) \geq \text{rg}(f)$$

Par conséquent :

$$\text{rg}(f) \leq (\dim(E); \dim(F))$$

P2. On sait que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F . Ainsi :

$$\text{Im}(f) = F \iff \dim(\text{Im}(f)) = \dim(F)$$

Autrement dit :

$$\text{Im}(f) = F \iff \text{rg}(f) = \dim(F)$$

Mais, par définition, f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$...

Conclusion : f est surjective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(F)$.

Rappels...

- Si \mathcal{F} est une famille libre de E , alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
- Si \mathcal{F} est une famille génératrice de E , alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.

Et voici le fameux théorème, un des plus importants d'algèbre linéaire en dimension finie :

THÉORÈME 3

THÉORÈME DU RANG

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$$

Attention !

C'est la dimension de l'espace de départ qui entre en jeu !

DÉMONSTRATION :

Allez voir en maths appro !

♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour déterminer noyau et image d'une application linéaire :

1. on commence par celui qui nous semble le plus simple (ou celui qui est demandé en premier),
2. on utilise le théorème du rang pour avoir la dimension de l'autre, et le déterminer par ensuite.

EXEMPLE 5

Reprenez l'application f de Exemples 3 - E2. Quel est son rang ?

Puisque f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$$

Or, on avait $\ker(f) = \text{Vect}(1 - 21)$. Ainsi, la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille de $\ker(f)$ qui est :

- ✓ génératrice de $\ker(f)$,
- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Par conséquent, la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker(f)$ et donc $\dim(\ker(f)) = 1$.

Conclusion : $\text{rg}(f) = 2$.

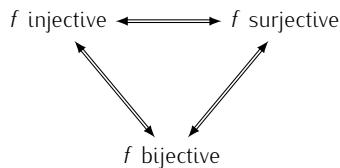
Remarque

On pourrait également déterminer $\text{Im}(f)$ pour avoir $\text{rg}(f)$...

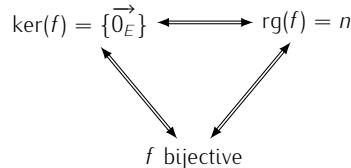
Conséquence importante du théorème du rang :

PROPRIÉTÉ 9

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors :



Autrement dit, si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors :



Important !

Cas particulier important : cette propriété est vraie pour les endomorphismes en dimension finie.

* DÉMONSTRATION : Supposons que $\dim(E) = \dim(F)$.

- Montrons que l'injectivité de f équivaut à sa surjectivité. Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
 (f \text{ est injective}) &\iff \ker(f) = \{0_E\} \\
 &\iff \dim(\ker(f)) = 0 \\
 &\iff \text{rg}(f) = \dim(E) \\
 &\iff \text{rg}(f) = \dim(F) \\
 &\iff \text{Im}(f) = F \\
 &\iff (f \text{ est surjective})
 \end{aligned}$$

théorème du rang
 $\dim(E) = \dim(F)$

Rappels...

- Le singleton $\{0_E\}$ est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 0.
- $\text{Im}(f)$ est un ssev de F .
- Le seul ssev de F de dimension égale à $\dim(F)$ est F lui-même.

- Montrons que f est injective si, et seulement si, f est bijective.

On sait déjà que la bijectivité de f implique son injectivité (par définition).

D'après ce qui précède, l'injectivité de f implique sa surjectivité. Par conséquent, si f est injective, elle est également surjective et donc bijective. L'injectivité de f implique donc sa bijectivité.

Conclusion : f est injective si, et seulement si, f est bijective.

- De la même façon, on démontre que f est surjective si, et seulement si, f est bijective.

EXEMPLE 6

Démontrons que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ainsi, d'après le théorème 1, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) &\iff f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\ker(f) = \{0_{3,1}\}$$

Donc f est injectif.

Conclusion : puisque f est un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, f est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.