Exercices du chapitre 19
Applications linéaires

Exercice 1 - ●○○
Dans chaque cas : démontrer que f est une application linéaire (en précisant les espaces vectoriels de départ et d'arrivée). Déterminer ensuite $\ker(f)$, puis le rang de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

1. $f : (x, y, z) \longmapsto x + y + z$.
2. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$.
3. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$.
4. $f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a+b+d \\ a+c+d \\ a-b+c \\ a+b-c \end{pmatrix}$

Exercice 2 - ●○○
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que l'application linéaire

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

1. Calculer $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que dire ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire la dimension de $\ker(f)$ puis une base de $\ker(f)$.
4. Retrouver autrement le résultat de la question précédente.

Exercice 3 - ●○○
Considérons l'application f qui à $P \in \mathbb{R}_2[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x) - xP'(x)$$

1. Soit $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer $f(P)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 - ●○○
Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AMA$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $f(I_2)$ puis en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Déterminer le noyau de f. Que peut-on en conclure ?
4. En procédant autrement, démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et exprimer, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f^{-1}(M)$ en fonction de M et A.
5. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 5 - ●●○ - À avoir en tête
Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Établir :

$$f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$$

Exercice 6 - ●●○ - Projecteurs
Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que $f \circ f = f$. Établir

$$\forall y \in E,\ \big(y \in \mathrm{Im}(f) \iff f(y) = y\big)$$

Exercice 7 - ●●●
Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. *On note* $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
2. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.