

EXERCICES DU CHAPITRE 23

LOIS DISCRÈTES USUELLES

EXERCICE 1 – ●●○ – QCM

Un élève répond au hasard à un QCM composé de 20 questions, chacune comprenant quatre propositions dont une seule est correcte. On note X le nombre de bonnes réponses obtenues à la fin du QCM.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k])$ pour $k \in X(\Omega)$, son espérance et sa variance.
2. Le barème est constitué ainsi : 1 point par bonne réponse et $-1/2$ point par mauvaise réponse. On note N la variable aléatoire donnant la note obtenue par l'élève.
 - 2.a. Écrire N en fonction de X .
 - 2.b. En déduire que N possède une espérance et une variance puis les calculer.
 - 2.c. On attribue toujours un point par bonne réponse. Déterminer la pénalité à appliquer à chaque mauvaise réponse de sorte que l'espérance de N soit nulle.

EXERCICE 2 – ●●○ – Jusqu'au premier PILE

Une pièce a la probabilité p (avec $p \in]0; 1[$) de tomber sur PILE. On la lance jusqu'à obtenir PILE pour la première fois. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus et Y celle donnant le rang du premier PILE.

1. Sans utiliser la commande `rd.geometric()`, écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel $p \in]0; 1[$ puis qui simule l'expérience et renvoie une réalisation de la variable aléatoire X .
2. Quelle est la loi de Y ? Donner $Y(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y = k])$ pour $k \in Y(\Omega)$, son espérance et sa variance.
3. En déduire la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair de FACE.

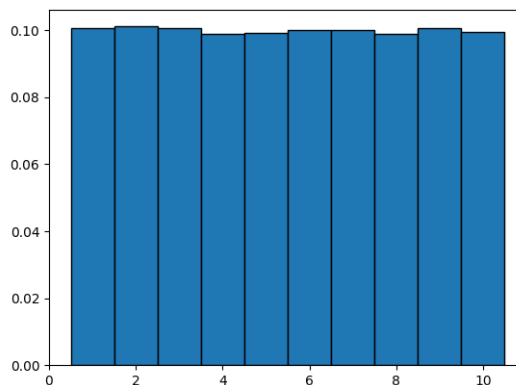
EXERCICE 3 – ●●○ – À partir d'un programme Python

1. On considère la fonction `simuleX()` suivante qui prend en argument un entier naturel non nul n .
Proposer une expérience aléatoire ainsi qu'une variable aléatoire X de sorte que `simuleX(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X .

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simuleX(n):
4     N=n
5     X=1
6     while rd.randint(1,N+1)!=1:
7         N=N-1
8         X=X+1
9     return X
```

2. On exécute le programme ci-dessous qui affiche le graphique qui suit.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 n=10
4 L=[simuleX(n) for k in range(100000)]
5 Labs=[-0.5+k for k in range(1,n+2)]
6 plt.hist(L,Labs,edgecolor='k',density=True)
7 plt.show()
```



Quelle conjecture émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

3. Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 4 - ●●○ - Loi de Poisson

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ et $Y = \frac{1}{1+X}$.

1. Démontrer que Y admet une espérance et la calculer.
2. De quelle valeur le réel renvoyé par l'exécution de la fonction **mystere(a)** ci-dessous est-il proche ?

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def mystere(a):
5     L=[rd.poisson(a) for k in range(10000)]
6     M=[1/(1+x) for x in L]
7     return np.mean(M)
```

EXERCICE 5 - ●●○

Soient a un réel strictement positif et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = n+1]) = \frac{a}{n} \mathbb{P}([X = n])$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (n-1)! \mathbb{P}([X = n])$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de a , n et $\mathbb{P}([X = 1])$.
2. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$, puis donner la loi de X .
3. On pose $Y = X - 1$. Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de X .

EXERCICE 6 - ●●○ - Deux géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètres respectifs $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$. On définit également la variable aléatoire Z par $Z = X - Y$.

1. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
2. Décrire l'évènement $[X = Y]$ puis en déduire sa probabilité.
3. Donner $\mathbb{P}([Z = 0])$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}([Z = k])$ et $\mathbb{P}([Z = -k])$.

EXERCICE 7 - ●●○ - Rang du k -ième succès

On dispose d'une pièce truquée donnant PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$ et FACE sinon. On lance indéfiniment cette pièce. On admet que l'on obtient presque-sûrement au moins deux PILE ; on note X la variable aléatoire égale au rang du premier PILE et Y celle égale au rang du second PILE. On note $q = 1 - p$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'évènement "obtenir PILE au lancer k " et $F_k = \overline{P_k}$.

1. Démontrer que $Y(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([Y = n]) = (n-1)q^{n-2}p^2$.
3. Démontrer que Y possède une espérance et la calculer.
4. On note maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire égale au rang du k -ième PILE. On a ainsi $Y_2 = Y$.
On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus sur les n premiers lancers.
 - 4.a. Reconnaître la loi de Y_1 .
Préciser $Y_1(\Omega)$ et, pour tout $n \in Y_1(\Omega)$, donner $\mathbb{P}([Y_1 = n])$.
 - 4.b. Écrire une fonction **Python** prenant en arguments un réel $p \in]0; 1[$ et un entier naturel non nul k puis renvoyant une réalisation de la variable aléatoire Y_k .
 - 4.c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n .
 - 4.d. Sans justifier, donner, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k(\Omega)$.
 - 4.e. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \llbracket k; +\infty \rrbracket$. Exprimer l'évènement $[Y_k = n]$ en fonction de P_n et d'un évènement faisant intervenir la variable aléatoire X_{n-1} . En déduire la loi de Y_k .

5. Soit $x \in]0; 1[$. On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $S_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

5.a. Calculer S_0 .

5.b. Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation de Pascal, établir :

$$(1-x)S_{k+1} = xS_k$$

5.c. Démontrer alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, S_k = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

6. Déduire des questions précédentes que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_k possède une espérance et la calculer.

EXERCICE 8 - ●●● - à partir d'une loi géométrique

Soit X une variable aléatoire suivant la géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$ définie sur un certain espace probabilisé ($\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}$).

1. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$. Déterminer la loi de Y , puis donner son espérance et sa variance.
2. Soit Z la variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 2.a.   crire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simuleZ(p)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z .
- 2.b. On considère la fonction **mystere** ci-dessous. De quelle valeur le réel renvoyé par l'exécution de **mystere(p)** est-il une valeur approchée ?

```

1 def mystere(p):
2     N=0
3     for k in range(10000):
4         Z=simuleZ(p)
5         if Z==0:
6             N=N+1
7     return N/10000

```

- 2.c. Déterminer $\mathbb{P}([Z = 0])$.
- 2.d. Déterminer la loi de Z .
- 2.e. Justifier que Z possède une espérance et la déterminer.

EXERCICE 9 - ●●● - Loi sans mémoire

Définition. Une variable aléatoire X , discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est dite **sans mémoire** lorsque :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > n]) \neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}_{[X > n]}([X > n + m]) = \mathbb{P}([X > m])$$

1. Démontrer que si X suit une loi géométrique, alors X est sans mémoire.
2. Réciproquement, supposons que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, sans mémoire.
 - 2.a.   tablir : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X > n + m]) = \mathbb{P}([X > n])\mathbb{P}([X > m])$.
 - 2.b. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}([X > n])$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
 - 2.c. Conclure que X suit une loi géométrique.

EXERCICE 10 - ●●● - Problème du collectionneur

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n balles numérotées de 1 à n , et on effectue une succession illimitée de tirages d'une balle avec remise dans l'urne.

Pour tout entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts.

1.   crire une fonction **Python** d'en-tête **simulationT(n,i)** simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de T_i .
2. Démontrer que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, T_i admet une espérance et que

$$\mathbb{E}(T_i) = n \sum_{k=n-i+1}^n \frac{1}{k}$$

On pourra poser $Z_1 = T_1$ et pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $Z_i = T_i - T_{i-1}$.