

L'idée est d'utiliser les techniques puissantes sur les intégrales (primitive, IPP, changement de variable), que nous n'avons pas sur les séries, dans le but d'étudier une série.

Plus précisément, une comparaison série / intégrale est utile pour :

- étudier la nature de la série $\sum_{n \geq a} f(n)$ en se ramenant à la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$,
- déterminer un équivalent de la somme partielle d'une série divergente ou du reste d'une série convergente (avec utilisation du théorème d'encadrement).

Puisque le théorème de comparaison série / intégrale (qui, lui, fait appel aux intégrales impropres) est hors programme, voyons simplement trois cas classiques d'application, tous basés sur une des deux observations graphiques ci-dessous (qu'il faudra démontrer rigoureusement à chaque fois tout de même).

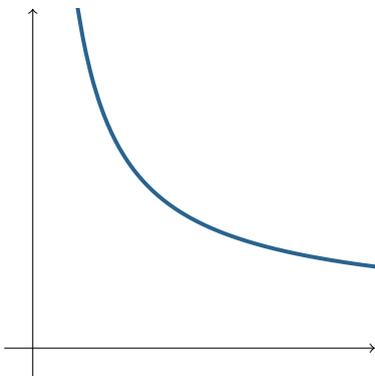
★ Classique ! ★

Il est assez fréquent de voir des comparaisons séries / intégrales aux concours.

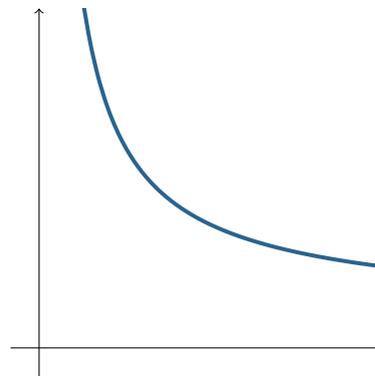
Important !

Un cas classique a déjà été vu : équivalent de la somme partielle de la série harmonique (QC15).

Considérons une fonction f définie, continue, positive et décroissante sur un certain intervalle.



$$\forall n \in [\dots], f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$$



$$\forall n \in [\dots], \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)dt$$

♥ Astuce du chef ! ♥

Si tu veux sortir du lot et plaire au correcteur : fais un petit schéma lors de l'obtention d'un tel encadrement !

UN ENCADREMENT CLASSIQUE (AMORCE DE COMPARAISON SÉRIE/INTÉGRALE)

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in [n; n+1]$:

$$n \leq x \leq n+1$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_*^+ , donc en particulier sur $[n; n+1]$:

$$\forall x \in [n; n+1], \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $n \leq n+1$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[n; n+1]$) :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{n} \geq [\ln(x)]_n^{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

Et ainsi :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

★ Classique ! ★

Cet encadrement est très classique aux concours. On voit parfois seulement l'inégalité de gauche ou celle de droite.

Petite remarque

On peut aussi débiter le raisonnement par cet encadrement, en mentionnant bien la décroissance de la fonction inverse tout de même.

ÉQUIVALENT DU RESTE D'UNE SÉRIE DE RIEMANN CONVERGENTE

On sait que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^2}$

✎ **Pour info...**

La méthode sert également à étudier la nature des séries de Riemann... C'est un excellent exercice d'entraînement !

est également convergente. On note ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Objectif : obtenir un équivalent de R_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Établir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On a, pour tout $t \in [k; k+1]$:

$$k \leq t \leq k+1$$

D'où, par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur \mathbb{R}_*^+ , donc en particulier sur $[k; k+1]$:

$$\forall t \in [k; k+1], \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{(k+1)^2}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $k \leq k+1$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[k; k+1]$) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2} dt$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

Petite remarque

On peut aussi débiter le raisonnement par cet encadrement, en mentionnant bien la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ tout de même.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer :

$$\forall N \in [n+1; +\infty[, \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}$$

puis :

$$R_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq R_n$$

- Soit $N \in [n+1; +\infty[$. On a établi à la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

En sommant de n à N , on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}$$

Or :

- * par changement d'indice $i = k+1$:

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{i=n+2}^{N+1} \frac{1}{i^2}$$

- * d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt &= \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{-1}{t} \right]_{n+1}^{N+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}$$

- On vient d'établir :

$$\forall N \in \llbracket n+1; +\infty \llbracket, \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}$$

Or :

* la série $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^2}$ est une troncature d'une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = 2 > 1$); par

conséquent, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}$ existe et est finie. Il en est de même de $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+2}^N \frac{1}{k^2}$.

* par opérations : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{n+1}$

Le passage à la limite dans l'encadrement est donc légitime et on obtient ainsi :

$$R_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq R_n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, R_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq R_n$.

3. Conclure que : $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On vient d'établir à la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq R_n$$

En particulier :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} \leq R_n$
- de $\forall n \in \mathbb{N}, R_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, on tire :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, R_m \leq \frac{1}{m}$$

On obtient ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{n+1} \leq nR_n \leq 1$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Par théorème d'encadrement, on obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nR_n = 1$$

Par conséquent :

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Conclusion : $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

En gros...

C'est un changement d'inconnue $m = n+1$. Attention en revanche : puisque $n \in \mathbb{N}$, on obtient $m \in \mathbb{N}^*$.

Petite remarque

On peut aller plus vite sur l'obtention de cet encadrement s'il n'est pas demandé de le détailler.

Petite remarque

Est-il encore nécessaire de détailler et justifier cette limite ?

ÉQUIVALENT DE LA SOMME PARTIELLE D'UNE SÉRIE DE BERTRAND DIVERGENTE

On considère la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{[2; +\infty[}$: $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

Objectif : montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$ est divergente et obtenir un équivalent de S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

✎ Pour info...

La méthode sert également à étudier la nature des séries

$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^a}$, dites séries de

Bertrand... C'est également un excellent exercice d'entraînement !

1. Établir :

$$\forall k \in \mathbb{[3; +\infty[}, \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

- Commençons par démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est décroissante sur $]1; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ comme produit de deux fonctions usuelles dérivables sur $]1; +\infty[$; et cette fonction ne s'annule pas sur $]1; +\infty[$.

Par conséquent, f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et, pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(\ln(x) + 1)}{(x \ln(x))^2} \\ &= \frac{-1 - \ln(x)}{(x \ln(x))^2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$$

La fonction f est décroissante sur $]1; +\infty[$.

- Soit ensuite $k \in \mathbb{[3; +\infty[}$. Soit $t \in [k-1; k]$. On a :

$$k-1 \leq t \leq k$$

D'où :

$$t \leq k \leq t+1$$

Puis, par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1; +\infty[$ donc en particulier sur $[t; t+1]$ (car $t \geq k-1 \geq 2$), on a :

$$\frac{1}{t \ln(t)} \geq \frac{1}{k \ln(k)} \geq \frac{1}{(t+1) \ln(t+1)}$$

- On vient donc d'établir :

$$\forall t \in [k-1; k], \frac{1}{(t+1) \ln(t+1)} \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \frac{1}{t \ln(t)}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, licite car $k-1 \leq k$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[k-1; k]$) :

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{(t+1) \ln(t+1)} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{k \ln(k)} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

Puis, en effectuant le changement de variable $x = t+1$ dans la première intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

$$\text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{[3; +\infty[}, \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt.$$

2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{[3; +\infty[}, \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq S_n \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{[3; +\infty[}, \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(3)) \leq S_n \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

Soit $n \in \mathbb{[3; +\infty[}$. On vient de démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{[3; +\infty[}, \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

D'où, en sommant de 3 à n :

$$\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

Or :

- par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt &= \int_3^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \\ &= \left[\ln(|\ln(t)|) \right]_3^{n+1} \\ &= \left[\ln(\ln(t)) \right]_3^{n+1} \quad \left. \vphantom{\int_3^{n+1}} \right\} \forall t \geq 3, \ln(t) > 0 \\ &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \end{aligned}$$

Petite remarque

$$\frac{1}{t \ln(t)} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln(t)}$$

- de la même façon :

$$\sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

- et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} - \frac{1}{2 \ln(2)} \\ &= S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq S_n \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

Puis, par croissance de \ln sur \mathbb{R}_*^+ (deux fois), on a :

$$\ln(\ln(n)) \leq \ln(\ln(n+1))$$

D'où le résultat voulu par transitivité.

Conclusion : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(3)) \leq S_n \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$

3. Conclure que : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$

On a :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \ln(n) > \ln(e) = 1$$

D'où, par stricte croissance de \ln sur \mathbb{R}_*^+ :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \ln(\ln(n)) > 0$$

Ainsi, d'après la question précédente, on obtient :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \frac{\frac{1}{2 \ln(2)} - \ln(\ln(3))}{\ln(\ln(n))} + \frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{\frac{1}{2 \ln(2)} - \ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + 1$$

Or, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2 \ln(2)} - \ln(\ln(3))}{\ln(\ln(n))} + 1 = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2 \ln(2)} - \ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + 1$$

Par théorème d'encadrement, on obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$$

Par conséquent :

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

Conclusion : puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$, on a également : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

La série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$ est divergente et $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$