

CONSIGNES À LIRE !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,
- la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.
- un aide-mémoire **Python** est donné en fin de sujet.
Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"La confiance est le ciment invisible qui conduit une équipe à la victoire."
Bud Wilkinson

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✗ Attention !

Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de base ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

EXERCICE 0

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Énoncer les résultats concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
Voir [Question de cours 7](#).
2. Définition, propriétés et représentation graphique de la fonction partie entière.
Voir [Question de cours 17](#).
3. Famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on dire de son cardinal ?
Voir [Question de cours 79](#).
4. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton sur les réels.
Voir [Question classique 1](#).
5. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un entier naturel non nul n et renvoyant la valeur de
$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x$.

1. Écrire une fonction **Python** d'en-tête **def f(x)** qui prend un réel x en argument d'entrée et renvoie $f(x)$ en sortie.

```
1 import numpy as np
2
3 def f(x):
4     y=np.exp(-x)-x**2/2+x
5     return y
```

2. Étude de f .

2.a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

• En $-\infty$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, suffisamment proche de $-\infty$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x \\ &= e^{-x} \left(1 - \frac{x^2}{2e^{-x}} + \frac{x}{e^{-x}} \right) \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2e^{-x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0$.

D'où, par opérations :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

• En $+\infty$:

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2} + x = -\infty$... D'où, par opérations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2.b. Dresser le tableau de variations complet de f et étudier sa convexité.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = -e^{-x} - x + 1 ; \quad f''(x) = e^{-x} - 1$$

Et :

$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 &\iff e^{-x} - 1 \geq 0 \\ &\iff e^{-x} \geq 1 \\ &\iff -x \geq 0 \\ &\iff x \leq 0 \end{aligned}$$

↙ stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$

D'où le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
f'	↗ 0 ↘		

Ainsi, puisque le maximum de f' sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en 0, on en déduit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
f	↘ 1 ↘		

Convexité :

On vient d'obtenir le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$...

Conclusion : f est convexe sur $\mathbb{R}^-$, concave sur $\mathbb{R}^+$, et $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion en $(0; 1)$.

♣ Méthode !

On ne transforme l'écriture que si elle présente une FI. De façon générale, on cherche à factoriser *par ce qui domine*. Ici, on factorise donc plutôt par e^{-x} : une factorisation par x^2 conviendrait également, mais on prend le risque de ne pas lever la FI en factorisant par un terme moins 'dominant'.

Important !

La **stricte** croissance est nécessaire pour remonter l'équivalence !

Remarque

On aurait aussi pu avoir le signe de $f'(x)$ en utilisant : $\forall y \in \mathbb{R}, e^y \geq 1 + y$, avec $y = -x$...

2.c. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α , dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.

On pose $g : x \mapsto f(x) - x = e^{-x} - \frac{x^2}{2}$. On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = x \iff g(x) = 0$.

- On sait que :
 - ✓ g est continue sur $\mathbb{R}$,
 - ✓ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto -x$ également. Ainsi, g est une somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$; elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, d'après le théorème de bijection, g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- De plus, puisque $0 \in g(\mathbb{R})$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$; ce qui est donc le cas de l'équation $f(x) = x$. Notons α cette solution.
- Enfin :
 - * $g(0) = 1$, donc $g(0) > 0$.
 - * $g(1) = e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} = \frac{2-e}{2e}$. Mais $e > 2$, donc $g(1) < 0$.
 - * $g(\alpha) = 0$.

Ainsi :

$$g(0) > g(\alpha) > g(1)$$

Et, par **stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}$** , on obtient :

$$0 < \alpha < 1$$

Conclusion : l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution réelle α , et $\alpha \in [0; 1]$.

✗ Attention !

Ce n'est pas sur f qu'il faut appliquer le théorème de bijection... C'est sur g !

Remarques

- Sinon, on dérive, et on remarque que $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$...
- f est strictement décroissante car de dérivée négative et qui ne s'annule qu'en un nombre fini de points.

➡ Réflexe !

On mets sous même dénominateur pour justifier simplement le signe.

Remarque

On a le choix : 'désappliquer' la fonction g ; ou appliquer la fonction g^{-1} ...

3. Étude d'une première suite.

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

3.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.

Procédons par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
Immédiat, car $u_0 = 0$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
Par hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

D'où, puisque f est décroissante sur $[0; 1]$:

$$f(0) \geq f(u_n) \geq f(1)$$

Or $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-1} + \frac{1}{2}$. Ainsi $f(1) \geq 0$, et donc, par transitivité :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.

3.b. Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

Soit $x \in [0; 1]$. Puisque f' est décroissante sur $[0; 1]$, on a :

$$f'(0) \geq f'(x) \geq f'(1)$$

Autrement dit :

$$0 \geq f'(x) \geq \frac{-1}{e}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{e} > 0 \geq f'(x) \geq \frac{-1}{e}$$

Conclusion : pour tout $x \in [0; 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

➡ Réflexe !

$\forall X \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+, |X| \leq a \iff -a \leq X \leq a$

3.c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

- On sait que :
 - ✓ f est dérivable sur $[0; 1]$,
 - ✓ $\forall x \in [0; 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{e}$ (question précédente).

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{e} |x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

En prenant $x = u_n$ et $y = \alpha$, **licite car** $u_n \in [0; 1]$ (question 3.a.) **et** $\alpha \in [0; 1]$ (question 2.c.), on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

Et, d'après la question 2.c., $f(\alpha) = \alpha$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$.

- Procédons ensuite par récurrence.

* **Initialisation.** Pour $n = 0$:

On a : $|u_0 - \alpha| = \alpha$. Or, on a vu que $\alpha \in [0; 1]$. On a donc bien : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^0$. L'initialisation est vérifiée.

* **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ et montrons $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

D'où, en multipliant par $\frac{1}{e} > 0$:

$$\frac{1}{e} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

Et ainsi d'après le point précédent et par transitivité :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

3.d. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

✓ D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

✓ De plus, $\frac{1}{e} \in]-1; 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$. Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha = 0$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

3.e. Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée à 10^{-10} près de α . *Donnée : $\ln(10) \simeq 2,303$.*

D'après le résultat de la question 3.c., il suffit de trouver un n à partir duquel $\left(\frac{1}{e}\right)^n < 10^{-10}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par **stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$** :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e}\right)^n &\leq 10^{-10} \iff n \ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq -10 \ln(10) \\ &\iff -n \leq -10 \ln(10) \\ &\iff n \geq 10 \ln(10) \end{aligned}$$

Conclusion : pour $n \geq 24$, on peut affirmer que $|u_n - \alpha| < 10^{-10}$; ce qui répond à la question.

3.f. Créer une fonction **Python** d'en-tête **def u(n)** : qui prend n en valeur d'entrée et renvoie u_n en sortie.

```
1 def u(n):
2     u=0
3     for k in range(1,n+1):
4         u=f(u) #où f est la fonction de la question 1
5     return u
```

4. Étude d'une seconde suite.

✗ Attention !

Tout serait différent si on avait $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| \neq 0$: on ne pourrait même pas conclure que (u_n) converge...

★ Subtil... ★

On ne demande pas le premier rang à partir duquel c'est le cas...

4.a. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1} .

On sait que :

- ✓ f est continue sur $\mathbb{R}$,
- ✓ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (question 2.b.)

Ainsi, d'après le théorème de bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

On a également :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations de f^{-1}	$+\infty$	0	$-\infty$

4.b. Écrire une fonction **Python** nommée **dicho** qui prend la valeur d'un réel strictement positif p en argument d'entrée et renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à p près, à l'aide de l'algorithme de dichotomie.

L'exécution de **dicho(0.01)** renvoie 2,11.

On sait que $f(0) = 1$ et on remarque que $f(3) = e^{-3} - \frac{3}{2} < 0$. D'où :

$$f(0) > 0 > f(3)$$

Et ainsi, par stricte décroissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$0 < f^{-1}(0) < 3$$

Ceci nous permet d'obtenir un premier intervalle sur lequel débiter !

Remarque

L'intervalle $[2; 3]$ convenait également...

```

1 def dico(p):
2     a=0
3     b=3
4     while b-a>p:
5         m=(a+b)/2
6         if f(m)==0: #où f est la fonction de la question 1
7             a,b=m,m
8         elif f(m)*f(a)<0:
9             b=m
10        elif f(m)*f(a)>0:
11            a=m
12    return (a+b)/2

```

4.c. Dédire de la question 4.a. que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre, noté x_n , tel que $f(x_n) = \frac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ et que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique antécédent à $\frac{1}{n}$ par f , noté x_n .

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel x_n tel que $f(x_n) = \frac{1}{n}$.

4.d. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0; 3]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $f(x_n) = \frac{1}{n}$, donc $f(x_n) \in]0; 1]$,
- $f(0) = 1$,
- $f(3) < 0$.

D'où par transitivité :

$$f(0) \geq f(x_n) \geq f(3)$$

Et par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$0 \leq x_n \leq 3$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0; 3]$.

4.e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer x_n en fonction de n et f^{-1} .

On a $f(x_n) = \frac{1}{n}$, et comme f est bijective : $x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

4.f. En déduire les variations et la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Important !

La stricte décroissance permet de "désappliquer" f ...
Autre argument possible : "dé-croissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$ ".

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$n \leq n+1$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, licite car $n, n+1 > 0$:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$$

Puis, par décroissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Autrement dit :

$$x_n \leq x_{n+1}$$

Conclusion : la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et que f^{-1} est continue en 0, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = f^{-1}(0)$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = f^{-1}(0) \simeq 2,11$.

Remarque

On peut aussi dire que

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$$

Autrement dit

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$$

D'où, par stricte décroissance de f :

$$x_{n+1} \geq x_n$$

Important !

La continuité de f garantit que l'on peut faire rentrer la limite à l'intérieur de f .

Pourquoi ?

dicho(0.01) renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 2

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$ avec $p \in]0; 1[$.

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1.a. Reconnaître la loi de T . Donner son espérance et sa variance.

- ✓ **Expérience.** L'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir une boule noire" a pour probabilité q .
- ✓ **Variable aléatoire.** La variable aléatoire T prend alors comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : T suit la loi géométrique de paramètre q et :

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^* ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad \mathbb{P}(T = n) = qp^{n-1} ; \quad \mathbb{E}(T) = \frac{1}{q} ; \quad \mathbb{V}(T) = \frac{p}{q^2}$$

1.b. Exprimer U en fonction de T . En déduire que U possède une espérance et une variance et les donner.

- Puisque U prend comme valeur le nombre de balles blanches obtenues, on a :

$$U = T - 1$$

- La variable aléatoire U admet alors une espérance et une variance, comme transformée affine d'une variable aléatoire admettant espérance et variance ; et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}(T - 1) \\ &= \mathbb{E}(T) - 1 && \swarrow \text{linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{1}{q} - 1 \\ &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(U) &= \mathbb{V}(T - 1) \\ &= \mathbb{V}(T) \\ &= \frac{p}{q^2} \end{aligned}$$

Conclusion : U admet une espérance et une variance, et : $\mathbb{E}(U) = \frac{p}{q}$, $\mathbb{V}(U) = \frac{p}{q^2}$.

2. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués,
- Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues,
- Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues,
- pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement "obtenir une boule blanche au i -ème tirage" et $N_i = \overline{B_i}$.

2.a. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel $p \in]0; 1[$, simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X .

Une première proposition :

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simule_X(p):
4     t=rd.random()
5     X=1
6     if t<p:
7         t=rd.random()
8         X=2
9         while t<p:
10             X=X+1
11             t=rd.random()
12     else :
13         t=rd.random()
14         X=2
15         while t>p:
16             X=X+1
17             t=rd.random()
18     return X
```

Une seconde, en comparant deux valeurs successives : on simule une loi de Bernoulli de paramètre p . Le succès est "on tire boule blanche", l'échec est "on tire une boule noire".

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def simule_X(p):
4     t1=rd.binomial(1,p)
5     t2=rd.binomial(1,p)
6     X=2
7     while t1==t2:
8         t1=t2
9         t2=rd.binomial(1,p)
10        X=X+1
11    return X

```

2.b. Loi de X .

2.b.i. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = k]) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

Soit $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

$[X = k]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient la deuxième couleur de boule pour la première fois au k -ième tirage
 si, et seulement si, les tirages 1 à $k-1$ ont donné la même couleur et le k -ième tirage l'autre couleur
 si, et seulement si, (les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule blanche et le k -ième tirage une boule noire) ou (les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule noire et le k -ième tirage une boule blanche)

D'où :

$$[X = k] = (B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}\left((B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)\right) \\
 &= \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \times \mathbb{P}(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) \\
 &= p^{k-1}q + q^{k-1}p
 \end{aligned}$$

incompatibilité de N_1 et B_1 , donc des événements en jeu
 tirages avec remise, donc mutuelle indépendance des événements en jeu

Conclusion : pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = k]) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

2.b.ii. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$.

On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=2}^{+\infty} (qp^{k-1} + pq^{k-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} (qp^i + pq^i) \quad \text{changement d'indice } i = k-1 \\
 &= q \sum_{i=1}^{+\infty} p^i + p \sum_{i=1}^{+\infty} q^i \quad \text{linéarité de la somme, licite car puisque } p, q \in]0; 1[, \text{ les séries } \sum_{i \geq 1} p^i \text{ et } \sum_{i \geq 1} q^i \text{ sont des séries géométriques convergentes} \\
 &= q \left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i - 1 \right) + p \left(\sum_{i=1}^{+\infty} q^i - 1 \right) \\
 &= q \left(\frac{1}{1-p} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) \quad q = 1-p, p = 1-q \\
 &= 1 - q + 1 - p \\
 &= 1 - q + q \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Important !
 Il est indispensable de justifier (ou à défaut mentionner) la convergence des séries en jeu lorsqu'on utilise la linéarité (pour décomposer) sur des sommes infinies.

2.b.iii. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

- D'après la question précédente, on considère que $X(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Ainsi :
 X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \in X(\Omega)} |n \mathbb{P}([X = n])|$ est convergente
 si, et seulement si, la série $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([X = k])$ est convergente, car $\forall k \geq 2, k \mathbb{P}([X = k]) \geq 0$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^N k\mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{k=2}^N k(qp^{k-1} + pq^{k-1}) \\ &= q \sum_{k=2}^N kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^N kq^{k-1}\end{aligned}$$

Or $p, q \in]0; 1[$, donc les séries $\sum_{k \geq 2} kp^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 2} kq^{k-1}$ sont des troncatures de séries géométriques convergentes. Par conséquent, la série $\sum_{k \geq 2} k\mathbb{P}([X=k])$ est convergente.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= q \sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= q \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} - 1 \right) + p \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} - 1 \right) \\ &= q \left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1 \right) \quad \leftarrow q = 1-p, p = 1-q \\ &= \frac{1}{q} - 1 + \frac{1}{p} - p \\ &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

2.c. Loi de Y .

- 2.c.i.** Pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}([X=k] \cap [Y=1])$. On distinguera les cas $k=2$ et $k \geq 3$.

Soit $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

- Si $k=2$:
 $[X=2] \cap [Y=1]$ est réalisé si, et seulement si, on a tiré deux boules dont une blanche si, et seulement si, (on tire une blanche puis une noire) ou (on tire une noire puis une blanche)

D'où :

$$[X=2] \cap [Y=1] = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1]) &= \mathbb{P}((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)) \\ &= \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{incompatibilité de } B_1 \text{ et } N_1, \text{ donc des évènements en jeu} \\ \text{tirages avec remise, donc mutuelle indépendance des évènements en jeu} \end{array} \\ &= 2pq\end{aligned}$$

- Si $k \geq 3$:
 $[X=k] \cap [Y=1]$ est réalisé si, et seulement si, on a tiré k boules dont une blanche si, et seulement si, on a tiré une seule blanche et $k-1$, avec $k-1 \geq 2$, noires si, et seulement si, les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule noire et le tirage k donne une boule blanche

D'où :

$$[X=k] \cap [Y=1] = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

Par conséquent, par indépendance des évènements $N_1, \dots, N_{k-1}, B_k$, on obtient :

$$\mathbb{P}([X=k] \cap [Y=1]) = q^{k-1}p$$

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=1]) = \begin{cases} 2pq & \text{si } k=2 \\ q^{k-1}p & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$.

- 2.c.ii.** En déduire que $\mathbb{P}([Y=1]) = q(1+p)$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X=k])_{k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{k \geq 2} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=1])$ est convergente et :

$$\mathbb{P}([Y=1]) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=1])$$

✗ Attention !

On fait attention en remplaçant : il y a deux expressions différentes de $\mathbb{P}([X=k] \cap [Y=1])$, selon que $k=2$ ou $k \geq 3$. C'est une erreur que l'on rencontre souvent ; on peut y remédier en concluant précisément et visiblement la question précédente.

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1]) \quad \leftarrow \text{question précédente} \\
&= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} pq^{k-1} \quad \leftarrow \text{changement d'indice } i = k - 1 \\
&= 2pq + p \sum_{i=2}^{+\infty} q^i \\
&= 2pq + p \left(\sum_{i=2}^{+\infty} q^i - 1 - q \right) \\
&= 2pq + p \left(\frac{1}{1-q} - 1 - q \right) \quad \leftarrow 1 - q = p \\
&= 2pq + 1 - p - pq \\
&= pq + 1 - p \\
&= pq + q \quad \leftarrow 1 - p = q \\
&= q(1 + p)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.

2.c.iii. Déterminer la loi de Y .

- Puisque l'évènement "n'obtenir que des boules noires" est quasi-impossible, on peut considérer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- * On a déjà $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.
- * Soit ensuite $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$.
 $[Y = n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n blanches à la fin du jeu
 si, et seulement si, on obtient n blanches, avec $n \geq 2$, et les deux couleurs
 si, et seulement si, on obtient n blanches et une noire
 si, et seulement si, les tirages 1 à n ont donné une blanche et le $(n + 1)$ -ième tirage a donné une noire

D'où :

$$[Y = n] = B_1 \cap \dots \cap B_n \cap N_{n+1}$$

Puis, par indépendance des évènements $B_1, \dots, B_n, N_{n+1}$ (tirages avec remise), on obtient :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = p^n q$$

Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$ et pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$, $\mathbb{P}([Y = n]) = p^n q$.

♥ L'avis du chef ! ♥

Exercice un peu répétitif sur la fin... Mais il faut bien cela pour ancrer les méthodes !

2.d. Donner la loi de Z .

En échangeant les rôles des boules noires et blanches, on échange Y et Z ...

Par conséquent, Z a la même loi que celle de Y , en échangeant p et q .

Conclusion : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = 1]) = p(1 + q)$ et pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$, $\mathbb{P}([Z = n]) = q^n p$.

EXERCICE 3

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Justifier que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; donc en particulier sur le segment $[0; x]$ (ou $[x; 0]$). Ainsi, l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ existe.

Conclusion : la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que F est impaire.

- L'ensemble de définition de F est $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2}$$

Effectuons le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale $\int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2}$:

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \\ t = -u \end{array} \right| ; \quad \left| \begin{array}{l} du = -dt \\ dt = -du \end{array} \right| ; \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t & 0 & -x \\ \hline u & 0 & x \\ \hline \end{array}$$

Ce changement de variable est bien licite, puisque la fonction $u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; x]$ (ou $[x; 0]$). On a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} &= \int_0^x \frac{-du}{1+(-u)^2} \\ &= - \int_0^x \frac{du}{1+u^2} \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) = -F(x)$$

Conclusion : la fonction F est impaire.

3. Etudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons G l'une d'elles. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(x) - G(0)$$

Or, la fonction G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc F également et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(x) - 0 \\ &= f(x) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.

DEUX AUTRES MÉTHODES POSSIBLES

1# On peut utiliser directement le théorème fondamental de l'analyse...
Mais la méthode mise en place dans la question a le bon goût d'être utile dans d'autres cas !

2# On pourrait même revenir à la définition en démontrant que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x \leq y \implies F(x) \leq F(y)$$

En effet, il serait assez immédiat de comparer $F(x)$ et $F(y)$ (en calculant $F(y) - F(x)$ par exemple).

Cette méthode serait utile s'il nous était impossible de calculer $F'(x)$ (dans le cas où la variable x serait à l'intérieur de l'intégrale par exemple...).

4. Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leq 1$. En déduire que la fonction F possède une limite finie en $+\infty$, notée ℓ .

Important !

On veut démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) = F(x)$$

L'écrire, ou du moins écrire ce que vaut $F(-x)$ est un bon début pour voir le changement de variable à poser !

★ Subtil... ★

Si t est la variable initiale et que l'on pose $u = h(t)$, alors h doit être bijective et c'est la fonction h^{-1} qui doit être $\mathcal{C}^1$ (regarder le théorème de changement de variable).

Pour ne pas se tromper, si t est la variable initiale, on devrait toujours poser $t = \dots$ même si c'est parfois moins naturel !

✗ Attention !

$G(0)$ ne dépend pas de x ... Donc la fonction $x \mapsto G(0)$ est bien évidemment $\mathcal{C}^1$ et de dérivée nulle !

➡ Réflexe !

- Pour majorer une intégrale, on majore son intégrande.
- Pour majorer $\frac{1}{b}$, on minore b ...

- Soit $x \in [1; +\infty[$. On a :

$$\forall t \in [1; x], 1 + t^2 \geq t^2 > 0$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{++}$:

$$\forall t \in [1; x], \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, licite car $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt &= \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= 1 - \frac{1}{x} \\ &\leq 1 \end{aligned} \quad \leftarrow x > 0$$

Conclusion : pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leq 1$.

- On sait que
 - ✓ F est croissante,
 - ✓ pour tout $x \in \mathbb{R}$, suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} && \leftarrow \text{relation de Chasles} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= F(1) + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} && \leftarrow \text{point précédent, licite car } x \geq 1 \text{ (x suffisamment proche de } +\infty) \\ &\leq F(1) + 1 \end{aligned}$$

La fonction F est donc majorée...

Conclusion : par théorème de limite monotone, la fonction F possède une limite finie en $+\infty$, notée ℓ .

5. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^{++}$, $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.

5.a. Démontrer que la fonction G est constante sur $\mathbb{R}^{++}$.

On sait que :

- ✓ $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$,
- ✓ F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par composition, la fonction $x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$. Par conséquent, G est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) - \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x) - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction G est de dérivée nulle sur un intervalle ; elle est donc constante sur cet intervalle.

Conclusion : la fonction G est constante sur $\mathbb{R}^{++}$.

5.b. En déduire que $\ell = 2F(1)$.

On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

Et :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et F est continue en 0, donc :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) &= F(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \ell$$

Mais comme G est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) &= G(1) \\ &= 2F(1)\end{aligned}$$

Conclusion : $\ell = 2F(1)$.

EXERCICE 4

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose également, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a & a+3b \\ a+b & a+b & a+b \\ a+2b & a+2b & a-b \end{pmatrix}$; et on note E l'ensemble des matrices de la forme $M(a, b)$ où a et b sont des réels.

1. 1.a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Remarquons que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$M(a, b) = aA + bB$$

$$\begin{aligned} E &= \{M(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{aA + bB, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(A, B) \end{aligned}$$

Or, $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.b. Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.

La famille (A, B) est une famille de E qui est :

- ✓ génératrice de E (car d'après la question précédente, $E = \text{Vect}(A, B)$);
- ✓ libre car seulement constituée de deux matrices non colinéaires.

Conclusion : la famille (A, B) est une base de E et ainsi $\dim(E) = \text{Card}((A, B)) = 2$.

2. Justifier que les matrices de E ne sont pas inversibles.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que les deux premières colonnes de $M(a, b)$ sont égales; donc $M(a, b)$ n'est pas inversible.

Conclusion : les matrices de E ne sont pas inversibles.

✗ Attention !

La somme de deux matrices non inversibles peut être une matrice inversible...

Prendre $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple...

3. 3.a. On pose $E_3(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 3X\}$. Démontrer que $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_3(A) &\iff AX = 3X \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = x \\ x + y + z = y \\ x + y + z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\overset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + y = -z \\ 3y = 3z \\ z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \\ &\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de $E_3(A)$ qui est :

- ✓ génératrice de $E_3(A)$ d'après ce qui précède,
- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_3(A)$.

Conclusion : $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ en est une base.

3.b. On pose $E_0(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0_{3,1}\}$. Démontrer que $E_0(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_0(A) &\iff AX = 0_{3,1} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Or $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc $E_0(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de $E_0(A)$ qui est :

- ✓ génératrice de $E_0(A)$ d'après ce qui précède,
- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_0(A)$.

Conclusion : $E_0(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ en est une base.

3.c. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Notons $\mathcal{F}$ cette famille et démontrons qu'elle est libre.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{aligned} & \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \\
& \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{aligned} & \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 3c = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi $a = b = c = 0$: la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Par conséquent, la famille $\mathcal{F}$ est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :

- ✓ libre d'après ce qui précède,
- ✓ de cardinal 3, égal à $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3.d. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

Mettons en place la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Puis avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ensuite, avec $\begin{cases} L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Avec $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Reste à diviser chaque ligne par 3...

Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.e. Déterminer la matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Soit $D \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}AP$$

On trouve :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

♥ Conseil du chef ♥
On évite de faire apparaître des fractions !

POURQUOI CALCULER AP ET PAS $P^{-1}A$?

Deux raisons :

1# Si le barème fournit 1 point pour le calcul intermédiaire et 1 point pour le résultat final, il vaut mieux calculer AP en intermédiaire plutôt que $P^{-1}A$ qui dépend des bons calculs dans la question précédente...

2# Mais la meilleure raison est la suivante : aucun calcul n'est nécessaire pour donner AP ...
Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de la matrice P .

- Remarquons que $C_1 = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$... Mais, puisque $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(A)$ et que $E_0(A)$ est un ev, on a $C_1 \in E_0(A)$, et donc $AC_1 = 0_{3,1}$.
- De même $C_2 = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ainsi $AC_2 = 0_{3,1}$.
- $C_3 \in E_3(A)$, donc $AC_3 = 3C_3$.

Enfin, on sait, par définition du produit matriciel, que les colonnes de la matrice AP sont les colonnes AC_1, AC_2, AC_3 ...
D'où le résultat !

4. On admet que $B = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.a. Déterminer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $D(a, b) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} M(a, b) &= aA + bB \\ &= aPDP^{-1} + bP\Delta P^{-1} && \swarrow \text{question 3.e. et résultat admis} \\ &= P(aD + b\Delta)P^{-1} \\ &= PD(a, b)P^{-1} && \swarrow \text{en posant } D(a, b) = aD + b\Delta \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$, où :

$$D(a, b) = aD + b\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3b & 0 \\ 0 & 0 & 3a + 3b \end{pmatrix}$$

4.b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $M(a, b)^n$ sous forme matricielle.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M(a, b)^n = PD(a, b)^n P^{-1}$.

* **Initialisation.** Pour $n = 1$:

Immédiat d'après la question précédente : l'initialisation est vérifiée.

* **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que $M(a, b)^n = PD(a, b)^n P^{-1}$ et démontrons que $M(a, b)^{n+1} = PD(a, b)^{n+1} P^{-1}$.

On a :

$$\begin{aligned} M(a, b)^{n+1} &= M(a, b) \times M(a, b)^n \\ &= PD(a, b)P^{-1}PD(a, b)^n P^{-1} && \swarrow \text{hypothèse de récurrence et question précédente} \\ &= PD(a, b)^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M(a, b)^n = PD(a, b)^n P^{-1}$.

- Puisque $D(a, b)$ est diagonale, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D(a, b)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (3a + 3b)^n \end{pmatrix}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} M(a, b)^n &= PD(a, b)^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (3a + 3b)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & (-3b)^n & (3a + 3b)^n \\ 0 & 0 & (3a + 3b)^n \\ 0 & -(-3b)^n & (3a + 3b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

★Subtil...★

De façon générale, l'expression fournie pour M^n évaluée avec $n = 0$ donne l'identité si, et seulement si, la matrice M est inversible. En pratique donc, si M est inversible, on demande souvent une expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$; et si M n'est pas inversible, on demande une expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-3b)^n + (3a+3b)^n & (-3b)^n + (3a+3b)^n & -2(-3b)^n + (3a+3b)^n \\ (3a+3b)^n & (3a+3b)^n & (3a+3b)^n \\ -(-3b)^n + (3a+3b)^n & -(-3b)^n + (3a+3b)^n & 2(-3b)^n + (3a+3b)^n \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$M(a, b)^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-3b)^n + (3a+3b)^n & (-3b)^n + (3a+3b)^n & -2(-3b)^n + (3a+3b)^n \\ (3a+3b)^n & (3a+3b)^n & (3a+3b)^n \\ -(-3b)^n + (3a+3b)^n & -(-3b)^n + (3a+3b)^n & 2(-3b)^n + (3a+3b)^n \end{pmatrix}$$

Vérification

Après tous ces calculs, on vérifie que le résultat est valable pour $n = 1 \dots$ Ouf !

5. On note $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ et $C_D = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid DM = MD\}$. On note également, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté le coefficient situé en i -ème ligne et j -ième colonne, qui vaut 1.

5.a. Démontrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- ✓ Par définition : $C_A \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.
- ✓ La matrice nulle commute avec A , donc $0_3 \in C_A$: C_A est non vide.
- ✓ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in C_A$. Montrons que $\lambda M + \mu N \in C_A$.
 - * On a déjà $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - * Ensuite :

$$\begin{aligned} A(\lambda M + \mu N) &= \lambda AM + \mu AN \\ &= \lambda MA + \mu NA \\ &= (\lambda M + \mu N)A \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} M \in C_A, \text{ donc } AM = MA; \text{ et } N \in C_A, \text{ donc } AN = NA \end{array}$$

Par conséquent :

$$\lambda M + \mu N \in C_A$$

Conclusion : C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5.b. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Établir :

$$M \in C_A \iff N \in C_D$$

On a :

$$\begin{aligned} M \in C_A &\iff AM = MA \\ &\iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{question 3.e. : } N = P^{-1}MP, \text{ donc } M = PNP^{-1} \\ &\iff PDNP^{-1} = PNDP^{-1} \\ &\iff DN = ND \\ &\iff N \in C_D \end{aligned}$$

5.c. Démontrer que $C_D = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ et en déduire que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une base de C_D .

Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} N \in C_D &\iff DN = ND \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & 0 & 3f \\ 0 & 0 & 3i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 3c = 0 \\ 3f = 0 \\ 3g = 0 \\ 3h = 0 \\ 3i = 3i \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = i \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = 0 \\ d = d \\ e = e \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = i \end{cases} \\ \iff & N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} C_D &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, (a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\ &= \{aE_{1,1} + bE_{1,2} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + iE_{3,3}, (a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}^5\} \\ &= \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3}) \end{aligned}$$

Par conséquent C_D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est :

- ✓ génératrice de C_D ,
- ✓ libre comme sous-famille d'une famille libre, puisqu'il s'agit d'une sous-famille de la base canonique.

Remarque

On peut aussi dire 'libre car constituée de matrices échelonnées'.

Conclusion : la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une base de C_D .

5.d. Dédurre des questions précédentes une base de C_A ainsi que sa dimension.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après la question 5.b. :

$$M \in C_A \iff P^{-1}MP \in C_D$$

$$\iff \exists!(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \mid P^{-1}MP = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{2,1} + dE_{2,2} + eE_{3,3}$$

$$\iff \exists!(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \mid M = aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{2,1}P^{-1} + dPE_{2,2}P^{-1} + ePE_{3,3}P^{-1}$$

↙ $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une base de C_D

Conclusion : la famille $(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{2,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})$ est une base de C_A ; donc $\dim(C_A) = 5$.

★★★★★★ FIN ★★★★★★