

CONSIGNES À LIRE !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,
- la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.
- un aide-mémoire **Python** est donné en fin de sujet.
Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"La confiance est le ciment invisible qui conduit une équipe à la victoire."
Bud Wilkinson

EXERCICE 0

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Énoncer les résultats concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
2. Définition, propriétés et représentation graphique de la fonction partie entière.
3. Famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on dire de son cardinal ?
4. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton sur les réels.
5. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un entier naturel non nul n et renvoyant la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}$.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x$.

1. Écrire une fonction **Python** d'en-tête **def f(x)** qui prend un réel x en argument d'entrée et renvoie $f(x)$ en sortie.
2. Étude de f .
 - 2.a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - 2.b. Dresser le tableau de variations complet de f et étudier sa convexité.
 - 2.c. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α , dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.
3. Étude d'une première suite.
On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- 3.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
 - 3.b. Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$.
 - 3.c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.
 - 3.d. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
 - 3.e. Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée à 10^{-10} près de α . Donnée : $\ln(10) \simeq 2,303$.
 - 3.f. Créer une fonction **Python** d'en-tête **def u(n)** : qui prend n en valeur d'entrée et renvoie u_n en sortie.
4. Étude d'une seconde suite.
 - 4.a. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1} .
 - 4.b. Écrire une fonction **Python** nommée **dicho** qui prend la valeur d'un réel strictement positif p en argument d'entrée et renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à p près, à l'aide de l'algorithme de dichotomie.
L'exécution de **dicho(0.01)** renvoie 2,11.
 - 4.c. Déduire de la question 4.a. que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre, noté x_n , tel que $f(x_n) = \frac{1}{n}$.
 - 4.d. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0; 3]$.
 - 4.e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer x_n en fonction de n et f^{-1} .
 - 4.f. En déduire les variations et la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 2

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$ avec $p \in]0; 1[$.

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
 - 1.a. Reconnaître la loi de T . Donner son espérance et sa variance.
 - 1.b. Exprimer U en fonction de T . En déduire que U possède une espérance et une variance et les donner.
2. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note :
 - X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués,
 - Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues,
 - Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues,
 - pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement "obtenir une boule blanche au i -ème tirage" et $N_i = \overline{B_i}$.
- 2.a. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel $p \in]0; 1[$, simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X .

2.b. Loi de X .

2.b.i. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = k]) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

2.b.ii. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$.

2.b.iii. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

2.c. Loi de Y .

2.c.i. Pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1])$. On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.

2.c.ii. En déduire que $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.

2.c.iii. Déterminer la loi de Y .

2.d. Donner la loi de Z .

EXERCICE 3

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Justifier que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que F est impaire.

3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leq 1$. En déduire que la fonction F possède une limite finie en $+\infty$, notée ℓ .

5. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.

5.a. Démontrer que la fonction G est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5.b. En déduire que $\ell = 2F(1)$.

EXERCICE 4

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose également, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a & a+3b \\ a+b & a+b & a+b \\ a+2b & a+2b & a-b \end{pmatrix}$; et on note E l'ensemble des matrices de la forme $M(a, b)$ où a et b sont des réels.

1. 1.a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.b. Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.

2. Justifier que les matrices de E ne sont pas inversibles.

3. 3.a. On pose $E_3(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$. Démontrer que $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

3.b. On pose $E_0(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{3,1}\}$. Démontrer que $E_0(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

3.c. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3.d. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

3.e. Déterminer la matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

4. On admet que $B = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.a. Déterminer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $D(a, b) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$.

4.b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $M(a, b)^n$ sous forme matricielle.

5. On note $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ et $C_D = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid DM = MD\}$. On note également, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté le coefficient situé en i -ème ligne et j -ième colonne, qui vaut 1.

5.a. Démontrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5.b. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Établir :

$$M \in C_A \iff N \in C_D$$

5.c. Démontrer que $C_D = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ et en déduire que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une base de C_D .

5.d. Déduire des questions précédentes une base de C_A ainsi que sa dimension.