Devoir surveillé 1

Samedi 12 septembre 2026 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques consignes :

- **prendre la copie de sorte que la marge se situe à droite de chaque page et l'ouverture dans le sens habituel,**
- **laisser la première page de la copie vierge pour les appréciations,**
- **numéroter et ranger toutes les pages de la copie dans l'ordre de lecture,**
- **mettre en évidence les résultats finaux (souligner ou encadrer),**
- **présenter les questions d'un même exercice dans l'ordre du sujet,**
- **débuter chaque nouvel exercice sur une nouvelle page.**

Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera importés les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"*Éduquer, ce n'est pas remplir un vase, c'est allumer un feu.*"
William Butler Yeats

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments mis en évidence ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes (les sous-questions ne le sont pas).

1. 1.a. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k k$.

   1.b. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **somme(n)** renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$.

   1.c. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k = \dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

   1.d. Que dire de la fonction **mystere** suivante ?

```
def mystere():
    n=0
    while somme(n)==((-1)**n*(2*n+1)-1)/4:
        n=n+1
    return n
```

   Voir question classique 2 et exercice 11 du livre.

2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Démontrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0;1[$ et déterminer l'expression de sa bijection réciproque.
   Voir exercice 24 du livre.

3. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

   3.a. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **suite_u(n)** renvoie la valeur de u_n.

   3.b. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique puis en déduire son terme général.

   Voir exercice 39 du livre.

4. On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$.

   4.a. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et démontrer qu'elle est paire.

   4.b. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   4.c. À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$, démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

   4.d. Justifier que la fonction f possède une limite en 0, à droite, et en $+\infty$ et démontrer qu'elles sont égales.

   Voir question classique 5.

5. Résoudre le système $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, d'inconnu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y = -z \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z) = z(1,1,1)$$

> **Rédaction**
> Il n'est pas indispensable de conclure après une résolution de système ou d'équation...

6. 6.a. Sans utiliser la commande **min**, écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée une liste de réels **L** puis renvoyant le minimum de la liste **L**.

```python
def monmin(L):
    mini=L[0]
    for x in L:
        if x<mini:
            mini=x
    return mini

def monminbis(L): #ou en parcourant les rangs
    mini=L[0]
    for k in range(0,len(L)):
        if L[k]<mini:
            mini=L[k]
    return mini
```

6.b. Sans utiliser la commande **min**, écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée une liste de réels **L** puis renvoyant le minimum de la liste **L** ainsi que le rang de sa première occurrence.

```python
def monmin(L):
    mini=L[0]
    rang=0
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k]<mini:
            mini=L[k]
            rang=k
    return mini,rang
```

Exercice 2 - Ecricome 2014 E

Soient $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$.
On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p et on procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: "*On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce*". On suppose les résultats des lancers indépendants les uns des autres.
On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : "La pièce donne FACE lors du j-ième lancer" ; et $P_j = \overline{F_j}$;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre "FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE", alors $Y = 4$.
On admet que les variables aléatoires X_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n puis donner $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)$ pour $k \in X_n(\Omega)$. Préciser $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

   ✓ L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
   ✓ La variable aléatoire X_n prend alors comme valeur le nombre de PILE obtenus sur ces n lancers.

   Conclusion : $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$
   $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$; $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
   $\mathbb{E}(X_n) = np$ et $\mathbb{V}(X_n) = np(1-p)$.



2. Donner $Y(\Omega)$.
   On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

   Pour s'entraîner...

   Pour l'entraînement (non demandé ici, car l'énoncé dit de "donner"), démontrons cette égalité.
   Procédons par double-inclusion.

   ⊂ Y prend comme valeur le nombre de FACE avant l'apparition du second PILE, donc on a immédiatement $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

   ⊃ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $k \in Y(\Omega)$.
   L'issue consistant à obtenir k FACE puis 2 PILE puis une infinité de FACE réalise l'évènement $[Y = k]$.Par conséquent : $[Y = k] \neq \varnothing$. On a ainsi établi :

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ [Y = k] \neq \varnothing$$

   D'où :

   $$\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$$

   Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

♣ Méthode !
On s'imprègne bien de cette méthode, assez classique.

Remarques
- Il s'agit de trouver UNE issue pour justifier que $[Y = k]$ est non vide, et donc que k est bien dans $Y(\Omega)$.
- Il est indispensable de préciser ce qui se passe après les 2 PILE pour définir totalement une issue, puisque l'expérience consiste ici en une infinité de lancers.

3. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements $[Y = n]$ et $[X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$ sont égaux.
   $[Y = n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n FACE avant l'apparition du second PILE
   si, et seulement si, le $(n+2)$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu n FACE sur les $n+1$ lancers précédents
   si, et seulement si, le $(n+2)$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu 1 PILE sur les $n+1$ lancers précédents
   si, et seulement si, $P_{n+2} \cap [X_{n+1} = 1]$ est réalisé

   Conclusion : $[Y = n] = [X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$.

4. Prouver que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) = (n+1)p^2q^n$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y = n]\big) &= \mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1]\big)\mathbb{P}(P_{n+2}) \\ &= \binom{n+1}{1} p(1-p)^n \times p \\ &= (n+1)p^2q^n\end{aligned}$$

   ↙ indépendance des lancers, et X_{n+1} ne fait intervenir que les lancers 1 à $n+1$
   ↙ d'après la question 1 : $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+1;p)$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) = (n+1)p^2q^n$.

5. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance et la calculer.

- On sait que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc

  Y admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} \left|n\mathbb{P}\left([Y=n]\right)\right|$ est convergente

  si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\left([Y=n]\right)$ est convergente,

  car $\forall n \in \mathbb{N},\ n\mathbb{P}\left([Y=n]\right) \geqslant 0$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}\left([Y=n]\right) &= \sum_{n=0}^{N} n(n+1)p^2q^n \qquad \text{↘ } k=n+1\\ &= p^2\sum_{k=1}^{N+1}(k-1)kq^{k-1}\\ &= p^2q\sum_{k=1}^{N+1}(k-1)kq^{k-2}\end{aligned}$$

  Or, $p \in]0;1[$, donc $q \in]0;1[$. Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)q^{k-2}$ est une série géométrique convergente.

  Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\left([Y=n]\right)$ est convergente.

- On en déduit que Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= p^2q\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}\\ &= p^2q\frac{2}{(1-q)^3} \qquad \text{↘ } p=1-q\\ &= \frac{2q}{p}\end{aligned}$$

Conclusion : Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{2q}{p}$.

Rédaction
Il faut savoir rédiger cette question et prendre tous les points !

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

6.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de `simuleY(k)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y_k.

```
def simuleY(k,p):
    Y=0
    nb=0
    while Y<k:
        while ...
            nb=nb+1
        ...
    return ...
```

```
def simuleY(k,p):
    Y=0
    nb=0
    while Y<k:
        while rd.random()<1-p:
            nb=nb+1
        Y=Y+1
    return nb
```

6.b. Soit Z la variable aléatoire égale au rang du premier PILE. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

✓ L'expérience consiste en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.

✓ La variable aléatoire Z donne le rang du premier succès.

Conclusion : $Z \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$
$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left([Z=k]\right) = (1-p)^{k-1}p$
$\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

LE COURS, LE COURS, LE COURS !

6.c. Exprimer Y_1 en fonction de Z puis en déduire la loi de Y_1 ainsi que son espérance et sa variance.

Puisque Z est le rang du premier PILE et que Y_1 compte le nombre de FACE avant l'apparition de ce premier PILE, on a :

$$Y_1 = Z - 1$$

Ainsi :

- $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_1 = n]\big) &= \mathbb{P}\big([Z - 1 = n]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([Z = n + 1]\big) \\ &= (1-p)^n p\end{aligned}$$

($n+1 \in \mathbb{N}^*$)

- puisque Z admet une espérance et que Y_1 est une transformée affine de Z, la variable aléatoire Y_1 admet également une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1) &= \mathbb{E}(Z - 1) \\ &= \mathbb{E}(Z) - 1 \\ &= \frac{1}{p} - 1 \\ &= \frac{1-p}{p}\end{aligned}$$

(linéarité de l'espérance)

- de même, la variable aléatoire Y_1 admet également une variance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y_1) &= \mathbb{V}(Z - 1) \\ &= \mathbb{V}(Z) \\ &= \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

> **☞ Rappel...**
> Si Z admet une variance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aZ + b$ admet une variance et :
> $$\mathbb{V}(Z) = a^2\mathbb{V}(Z)$$

Conclusion : $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y_1 = n]\big) = (1-p)^n p$
$\mathbb{E}(Y_1) = \dfrac{1-p}{p}$ et $\mathbb{V}(Y_1) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

6.d. En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- De la même façon qu'à la question 2, on a : $Y_k(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $[Y_k = n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n FACE avant l'apparition du k-ième PILE

  si, et seulement si, le $(n+k)$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu n FACE sur les $n+k-1$ lancers précédents

  si, et seulement si, le $(n+k)$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu $k-1$ PILE sur les $n+k-1$ lancers précédents

  si, et seulement si, $P_{n+k} \cap [X_{n+k-1} = k-1]$ est réalisé

  D'où :

$$[Y_k = n] = [X_{n+k-1} = k-1] \cap P_{n+k}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_k = n]\big) &= \mathbb{P}\big([X_{n+k-1} = k-1] \cap P_{n+k}\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X_{n+k-1} = k-1]\big) \times \mathbb{P}(P_{n+k}) \\ &= \binom{n+k-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^n \times p \\ &= \binom{n+k-1}{k-1} p^k (1-p)^n\end{aligned}$$

(indépendance des lancers ; $X_{n+k-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+k-1; p)$)

> **⋆ Pour l'oral ⋆**
> On peut justifier autrement ce résultat :
> • les issues de $[Y_k = n]$ sont toutes équiprobables
> • chaque issue de $[Y_k = n]$ est constituée de n FACE et k PILE ; la probabilité qu'elle apparaisse est donc égale à $p^k(1-p)^n$
> • chaque issue de $[Y_k = n]$ se termine par une PILE ; pour le reste, il suffit de placer $k-1$ PILE sur les $n+k-1$ tirages précédents : il y a $\binom{n+k-1}{k-1}$ combinaisons possibles.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) = \binom{n+k-1}{k-1} p^k (1-p)^n$.

Exercice 3 - EDHEC 2010 E

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
   $u_0 = 2$
   $u_1 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3$
   $u_2 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Remarque
On peut se contenter de donner directement le résultat.

3. Écrire une fonction **Python** de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **suite_u(n)** renvoie la valeur de u_n.

```
import numpy as np

def suite_u(n):
    u=2
    for k in range(1,n+1):
        u=u*(1+1/2**k) #ATTENTION : k, pas k+1...
    return u

#autre programme possible :

def suite_u_bis(n):
    L=[1+1/2**k for k in range(0,n+1)]
    return np.prod(L)
```

4. 4.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.
   Procédons par récurrence.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     $u_0 = 2$, donc l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geqslant 2$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 2$.
     Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_n \geqslant 2$$

     D'où, en multipliant par $1 + \frac{1}{2^{n+1}}$ (strictement positif) :

$$u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \geqslant 2\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

     Autrement dit :

$$u_{n+1} \geqslant 2 + \frac{1}{2^n}$$

     Et comme $\frac{1}{2^n} > 0$, on obtient, par transitivité :

$$u_{n+1} \geqslant 2$$

     L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

4.b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n \\ &= u_n \times \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Or $u_n > 0$ (car $u_n \geqslant 2$) et $\dfrac{1}{2^{n+1}} > 0$. Ainsi

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

> **Remarque**
> Puisque l'on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs (penser à le redire), on peut aussi démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$... Mais franchement, c'est se compliquer la rédaction !

4.c. Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $]-1;+\infty[$. On sait que :

- ✓ la fonction $x \longmapsto 1+x$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ sur cet intervalle,
- ✓ la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Ainsi, la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$

Réflexe !

D'où :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	0	↘	

Ainsi :

$$\forall x > -1,\ f(x) \leqslant 0$$

Conclusion : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

> **Important !**
> Il est impensable de ne pas savoir traiter cette question, que l'on retrouve presque tous les ans aux concours.

> **Remarque**
> On peut aller plus vite pour la justification de la dérivabilité dans cette question, mais je fais le choix de détailler dans le cas des composées, pour s'entraîner.

> **Autre méthode**
> La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sa courbe est au-dessous de toutes ses tangentes ; et en particulier celle en $(1;0)$ dont l'équation réduite est $y = x - 1$.
> Par conséquent :
> $$\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(t) \leqslant t - 1$$
> Ainsi :
> $$\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$$

4.d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(u_n) \leqslant 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

↙ $\forall k \in [\![0;n]\!],\ 1 + \frac{1}{2^k} > 0$

Mais, d'après la question précédente, licite car pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\dfrac{1}{2^k} > -1$:

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$$

D'où, en sommant pour $k \in [\![0;n]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Dès lors :

$$\ln(u_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Or $\dfrac{1}{2} \neq 1$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &\leqslant 2 \end{aligned}$$

↙ $\frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 0$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \leqslant 2$.

> **✘ Attention !**
> Pour que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ il faut que $a > 0$ et $b > 0$.

> **➠Réflexe !**
> Pour majorer une somme, on commence par majorer son terme général.

4.e. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, élément de $[2;\mathrm{e}^2]$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

✓ croissante (question 4.b.) ;
✓ majorée, car d'après la question précédente et par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant e^2$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
Ensuite, d'après la question 4.a. : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant e^2$. D'où $\ell \in [2; e^2]$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, élément de $[2; e^2]$.

Rédaction
Il vaut mieux distinguer les 2 points :
• la CV, assurée par th de CV monotone
• l'encadrement de ℓ, par l'encadrement de (u_n)

5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

5.a. Justifier que la suite $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\ell)$ et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et que la fonction ln est continue en ℓ (car continue sur $]0; +\infty[$ et que $\ell \in [2; e^2]$), la suite $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\ell)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$...

Conclusion : La suite $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\ell)$ et $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

✓ Rigueur !
Ne pas oublier la continuité de ln en ℓ pour justifier que $\left(\ln(u_n)\right)$ converge vers $\ln(\ell)$!

5.b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n > 0$ et $\ell > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \quad \text{(question précédente)}\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

✘ Attention !
Pour que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ il faut que $a > 0$ et $b > 0$.

5.c. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

Ensuite, puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2^k} \geqslant 0$$

On a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$$

D'où, en sommant de $n+1$ à $+\infty$, licite car les deux séries en jeu sont convergentes :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

Or, par changement d'indice $i = k - (n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1+i}}\\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i}\\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

➠Réflexe !
Pour encadrer une somme, on commence par encadrer son terme général.

Pourquoi ?
L'une est une série géométrique... La convergence de $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ est en fait établie à la question 5.a. ; mais on pourrait la justifier par critère de comparaison sur les SATP, puisque :
$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$

5.d. Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$$

D'où par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a :

$$1 \leqslant \frac{\ell}{u_n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}}$$

Puis, par décroissance de $\frac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$1 \geqslant \frac{u_n}{\ell} \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}$$

Ensuite, puisque $\ell > 0$:

$$\ell \geqslant u_n \geqslant \ell\mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}$$

D'où :

$$-\ell \leqslant -u_n \leqslant -\ell\mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

♣ Méthode !

Si on manque d'inspiration, on peut travailler par équivalences pour transformer le résultat à établir en un résultat plus évident. Attention cependant, les arguments sont alors souvent plus forts pour conserver les équivalences (stricte croissance nécessaire par exemple).

5.e. Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $\ell - u_n$.

- On sait que la fonction exponentielle est convexe, donc sa courbe se situe partout au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier de la tangente au point d'abscisse 0 dont l'équation réduite est $y = x + 1$. D'où :

  $$\forall z \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^z \geqslant z + 1$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité précédente, en prenant $z = -x$, on obtient :

  $$\mathrm{e}^{-x} \geqslant -x + 1$$

  Conclusion : pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$.

Remarque

On peut également étudier la fonction $x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^{-x} - x$... ou utiliser le résultat de la question 4.c..

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique le résultat que l'on vient de trouver avec $x = \frac{1}{2^n}$:

  $$1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

  Or, d'après la question précédente :

  $$0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$$

  D'où, par transitivité :

  $$0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$$

- On a ainsi :
  - ✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$
  - ✓ puisque $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente ; donc c'est également le cas de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\ell}{2^n}$.

  Conclusion : par critère de comparaison (par inégalités) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}(\ell - u_n)$ est convergente.

Exercice 4 - Inspiré d'exercices de concours

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = x^n - nx + 1$$

1. Écrire une fonction `Python` de sorte que l'exécution de la commande `f(n,x)` renvoie la valeur de $f_n(x)$, où $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

```
def f(n,x):
    return x**n-n*x+1
```

Remarque
Pas nécessaire de traiter les cas où $n \notin [\![2;+\infty[\![$ et $x < 0$ en fait...

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_2(x) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f_2(x) = 0 &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff (x-1)^2 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

3. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0;+\infty[$.
La fonction f_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ car c'est une fonction polynomiale et, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1} - n \\ &= n(x^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

Réfléchir !

D'où (la limite en $+\infty$ étant obtenue en factorisant $f_n(x)$ par x^n) :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	$+\infty$

☞ Rappels...
- Si $n \geqslant 0$:
  $\forall x \in]0;1],\ x^n \leqslant 1$
  $\forall x \geqslant 1,\ x^n \geqslant 1$
- Si $n < 0$:
  $\forall x \in]0;1],\ x^n \geqslant 1$
  $\forall x \geqslant 1,\ x^n \leqslant 1$

Pour retrouver ces résultats, on peut résoudre $x^n \geqslant 1$ par équivalences en utilisant ln et exp...

4. 4.a. Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$, notées α_n et β_n, vérifiant :

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$

✓ Rigueur !
Ne pas oublier de dire que 0 et 1 ne sont pas des solutions.

- On a déjà $f_n(0) = 1 \neq 0$ et $f_n(1) = 2 - n \neq 0$ car $n \geqslant 3$.
- Sur $]0;1[$:
  La fonction f_n est :
  ✓ continue sur l'intervalle $]0;1[$,
  ✓ strictement décroissante sur $]0;1[$.
  D'après le théorème de bijection f_n est bijective de $]0;1[$ dans $f_n(]0;1[) =]2-n;1[$.
  Or, puisque $n \geqslant 3$, on a $2 - n < 0$. Ainsi, $0 \in]2-n;1[$.
  Par conséquent, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $]0;1[$.
- De même sur $]1;+\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution β_n sur $]1;+\infty[$.

✍ Rédaction
On rédige proprement un des deux cas, mais pas l'autre !

♥ Conseil du chef ♥
Si on demande des inégalités strictes, traiter le cas des bornes puis mettre en place le théorème de bijection sur les intervalles ouverts.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$, notées α_n et β_n, vérifiant : $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

4.b. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 2^n \geqslant 2n$$

En déduire :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \beta_n < 2$$

- ∗ **Initialisation.** Pour $n = 3$, c'est immédiat.
- ∗ **Hérédité.** Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Supposons que $2^n \geqslant 2n$ et montrons que $2^{n+1} \geqslant 2(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :

$$2^n \geqslant 2n$$

  D'où :

$$2^{n+1} \geqslant 4n$$

  Mais :

$$\begin{aligned} 4n - 2(n+1) &= 2(n-1) \\ &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{↙ } n \geqslant 3$$

  D'où $4n \geqslant 2(n+1)$, et par transitivité :

$$2^{n+1} \geqslant 2(n+1)$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 2^n \geqslant 2n$.

Remarque

Ceci est même valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On a déjà $f_n(\beta_n) = 0$. Ensuite :

$$\begin{aligned} f_n(2) &= 2^n - 2n + 1 \\ &\geqslant 1 \end{aligned} \qquad \text{(} 2^n \geqslant 2n, \text{ car } n \geqslant 3 \text{)}$$

Ainsi :

$$f_n(\beta_n) < f_n(2)$$

D'où, par stricte croissance de f_n sur $]1;+\infty[$ (on a bien β_n et 2 dans $]1;+\infty[$) :

$$\beta_n < 2$$

Conclusion : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \beta_n < 2$.

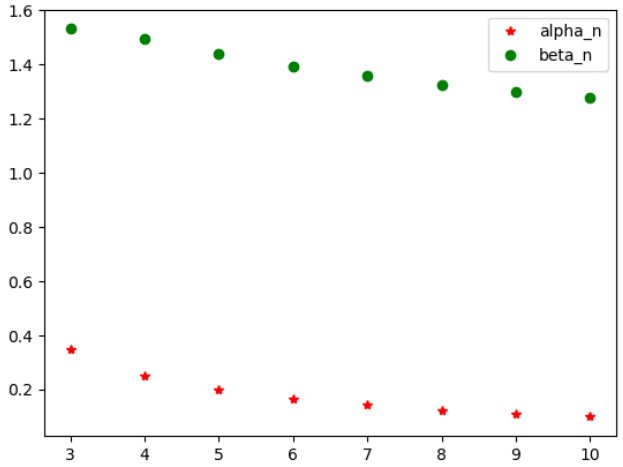
✘ Attention !

La phrase "par stricte croissance de f_n^{-1} sur $]1;+\infty[$" n'est pas rigoureuse. En fait, il n'y a pas qu'une bijection réciproque ici, il y en a 2 : la bijection réciproque de la restriction de f_n sur $]0;1[$ et celle de la restriction de f_n sur $]1;+\infty[$... On préfère donc l'argument sur f_n ici (qui est équivalent, et plus simple à énoncer).

5. **5.a.** Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, l'exécution de **alpha(n)** renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α_n obtenue par la méthode de dichotomie.

```
def alpha(n):
    a=0
    b=1
    while b-a>10**(-5):
        m=(a+b)/2
        if f(n,m)==0:
            a,b=m,m
        elif f(n,m)*f(n,a)<0:
            b=m
        elif f(n,m)*f(n,a)>0:
            a=m
    return (a+b)/2
```

5.b. On admet que l'on a écrit une fonction **beta(n)** qui renvoie une valeur approchée de β_n (pour $n \in [\![3;+\infty[\![$) à 10^{-5} près.
Écrire un programme dont l'exécution permet d'obtenir le graphique ci-dessous (la légende n'est pas demandée).




```
N=range(3,11)
A=[alpha(n) for n in N]
B=[beta(n) for n in N]
plt.plot(N,A,'r*',label="alpha_n")
plt.plot(N,B,'go',label="beta_n")
plt.legend()
plt.show()
```

6. **6.a.** Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 3} \beta_n$ est divergente.

D'après la question **4.a.**, la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1, elle ne peut donc pas converger vers 0.

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 3} \beta_n$ diverge grossièrement.

✓ Rigueur !

À ce stade, nous ne savons pas si la suite (β_n) a une limite en $+\infty$. Il ne serait donc pas rigoureux d'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n \neq 0$...

6.b. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 3} \alpha_n$ est divergente.

- Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On sait que $f_n(\alpha_n) = 0$, d'où :

$$\alpha_n = \frac{\alpha_n^n + 1}{n}$$

Or $\alpha_n \geqslant 0$, donc :

$$\alpha_n \geqslant \frac{1}{n}$$

- On a ainsi :
  - ✓ $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \alpha_n \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$,
  - ✓ $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n}$ est une troncature d'une série de Riemann divergente.

Conclusion : par critère de comparaison (par inégalités) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 3} \alpha_n$ est divergente.

7. **Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$.**

7.a. Démontrer que : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

Soient $n \in [\![3;+\infty[\![$ et $x \in]0;1[$. On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} - (n+1)x + 1 - (x^n - nx + 1) \\ &= x^{n+1} - x^n - x \\ &= x^n(x-1) - x \end{aligned}$$

Or, $x \in]0;1[$, donc :

$$x^n \geqslant 0 \ ; \ x - 1 \leqslant 0$$

Et ainsi :

$$x^n(x-1) \leqslant 0$$

Par conséquent, puisque $x \geqslant 0$:

$$x^n(x-1) - x \leqslant 0$$

Conclusion : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

7.b. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. D'après le résultat de la question précédente appliqué à α_n, licite car $\alpha_n \in]0;1[$ (question **4.a.**), on obtient :

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leqslant f_n(\alpha_n)$$

Or $f_n(\alpha_n) = 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. D'où

$$f_{n+1}(\alpha_n) \leqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

Et puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0;1[$ (α_n et α_{n+1} sont dans $]0;1[$), on obtient :

$$\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$$

Conclusion : la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

✓ Rigueur !
Ne pas oublier de mentionner que $\alpha_n \in]0;1[$ pour pouvoir utiliser la question précédente !

7.c. Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\alpha_n \leqslant \frac{2}{n}$ puis en déduire $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.

- Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On sait que $f_n(\alpha_n) = 0$. De surcroît :

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{2}{n}\right) &= \left(\frac{2}{n}\right)^n - n\frac{2}{n} + 1 \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

↳ $n \geqslant 3$, donc $\frac{2}{n} < 1$ et ainsi, par croissance de $\cdot^n$ sur $\mathbb{R}^+$: $\left(\frac{2}{n}\right)^n \leqslant 1$

Ainsi :

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) \leqslant f_n(\alpha_n)$$

Et, par stricte décroissance de f_n sur $]0;1[$ ($\frac{2}{n}$ et α_n sont dans $]0;1[$) :

$$\alpha_n \leqslant \frac{2}{n}$$

Conclusion : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \alpha_n \leqslant \frac{2}{n}$.

Ou alors...

On sait que $f_n(\alpha_n) = 0$. D'où

$$\alpha_n = \frac{\alpha_n^n + 1}{n}$$

Or $\alpha_n \in [0;1]$, donc par croissance de $.^n$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\alpha_n^n \leqslant 1$$

et donc

$$\frac{\alpha_n^n + 1}{n} \leqslant \frac{2}{n}$$

Conclusion : $\alpha_n \leqslant \frac{2}{n}$.

- Enfin :
  - ✓ d'après la question **4.a.** et le point ci-dessus : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{2}{n}$;
  - ✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Réflexe !
On obtient une majoration et on veut une limite... Théorème d'encadrement ? Relisons l'énoncé à la recherche d'une minoration.

7.d. Démontrer que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $f_n(\alpha_n) = 0$, d'où

$$n\alpha_n = \alpha_n^n + 1$$

Or

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \alpha_n^n = \exp\left(n\ln(\alpha_n)\right)$$

Et on sait, d'après la question précédente, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, donc par composition et opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(\alpha_n) = -\infty$$

Et ainsi, par composition

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln(\alpha_n)\right) = 0$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$$

Conclusion : $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

7.e. Pour quelles valeurs du réel c, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{\alpha_n}{n^c}$ est-elle convergente ?

Soit $c \in \mathbb{R}$.

- ✓ D'après la question précédente, on obtient :

$$\frac{\alpha_n}{n^c} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{c+1}}$$

- ✓ $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \frac{\alpha_n}{n^c} \geqslant 0,\ \frac{1}{n^{c+1}} \geqslant 0$.

Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{\alpha_n}{n^c}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^{c+1}}$ ont même nature.

Or, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{1}{n^{c+1}}$ est une série de Riemann qui est convergente si, et seulement si, $c+1 > 1$.

Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{\alpha_n}{n^c}$ est convergente si, et seulement si, $c > 0$.

8. Convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$.

8.a. Établir : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned} f_n\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right) &= n^{\frac{n}{n-1}} - n \times n^{\frac{1}{n-1}} + 1 \\ &= n^{\frac{n}{n-1}} - n^{1+\frac{1}{n-1}} + 1 \\ &= n^{\frac{n}{n-1}} - n^{\frac{n}{n-1}} + 1 \end{aligned}$$

$= 1$

Et comme $f_n(\beta_n) = 0$, on obtient :

$$f_n(\beta_n) < f_n\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right)$$

Puis, par stricte croissance de f_n sur $]1;+\infty[$, licite car $\beta_n > 1$ et que $n > 1$ donc, par stricte croissance de $.^{\frac{1}{n-1}}$ sur $\mathbb{R}^+$ (car $\dfrac{1}{n-1} > 0$), on a aussi $n^{\frac{1}{n-1}} > 1$, on obtient :

$$\beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$$

Conclusion : $\forall n \geqslant 3,\ \beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$.

8.b. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 1.

✓ D'après ce qui précède et la question **4.a.** : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 1 < \beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$.

✓ Or, pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$:

$$n^{\frac{1}{n-1}} = \exp\left(\frac{1}{n-1}\ln(n)\right)$$ Réflexe !

☞ **Rappel...**

∞^0 est une FI.

Et :

$$\frac{\ln(n)}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

↙ croissances comparées

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n-1}} = 1$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 1$. La suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 1.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★