Devoir surveillé 1

Samedi 12 septembre 2026 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques consignes :

- **prendre la copie de sorte que la marge se situe à droite de chaque page et l'ouverture dans le sens habituel,**
- **laisser la première page de la copie vierge pour les appréciations,**
- **numéroter et ranger toutes les pages de la copie dans l'ordre de lecture,**
- **mettre en évidence les résultats finaux (souligner ou encadrer),**
- **présenter les questions d'un même exercice dans l'ordre du sujet,**
- **débuter chaque nouvel exercice sur une nouvelle page.**

Pour toutes les questions `Python` du sujet, on supposera importés les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"Éduquer, ce n'est pas remplir un vase, c'est allumer un feu."
William Butler Yeats

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes (les sous-questions ne le sont pas).

1. 1.a. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k k$.

   1.b. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **somme(n)** renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$.

   1.c. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k = \dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

   1.d. Que dire de la fonction **mystere** suivante ?

```
def mystere():
    n=0
    while somme(n)==((-1)**n*(2*n+1)-1)/4:
        n=n+1
    return n
```

2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Démontrer que la fonction f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0;1[$ et déterminer l'expression de sa bijection réciproque.

3. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

   3.a. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **suite_u(n)** renvoie la valeur de u_n.

   3.b. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique puis en déduire son terme général.

4. On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

   4.a. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et démontrer qu'elle est paire.

   4.b. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   4.c. À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$, démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

   4.d. Justifier que la fonction f possède une limite en 0, à droite, et en $+\infty$ et démontrer qu'elles sont égales.

5. Résoudre le système $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, d'inconnu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

6. 6.a. Sans utiliser la commande **min**, écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée une liste de réels **L** puis renvoyant le minimum de la liste **L**.

   6.b. Sans utiliser la commande **min**, écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée une liste de réels **L** puis renvoyant le minimum de la liste **L** ainsi que le rang de sa première occurrence.

Exercice 2

Soient $p \in]0;1[$ et $q = 1-p$.
On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p et on procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: "*On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce*". On suppose les résultats des lancers indépendants les uns des autres.
On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : "La pièce donne FACE lors du j-ième lancer" ; et $P_j = \overline{F_j}$;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre "FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE", alors $Y = 4$.
On admet que les variables aléatoires X_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n puis donner $\mathbb{P}([X_n = k])$ pour $k \in X_n(\Omega)$. Préciser $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
2. Donner $Y(\Omega)$.
3. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements $[Y = n]$ et $[X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$ sont égaux.
4. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = (n+1)p^2q^n$$

5. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance et la calculer.
6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

6.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de **`simuleY(k)`** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y_k.

```
def simuleY(k):
    Y=0
    nb=0
    while Y<k:
        while ...
            nb=nb+1
        ...
    return ...
```

6.b. Soit Z la variable aléatoire égale au rang du premier PILE. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

6.c. Exprimer Y_1 en fonction de Z puis en déduire la loi de Y_1 ainsi que son espérance et sa variance.

6.d. En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_k.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Écrire une fonction **`Python`** de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **`suite_u(n)`** renvoie la valeur de u_n.
4. 4.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

   4.b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   4.c. Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

   4.d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(u_n) \leqslant 2$.

   4.e. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, élément de $[2; \mathrm{e}^2]$.
5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

   5.a. Justifier que la suite $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\ell)$ et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

   5.b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

   5.c. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

   5.d. Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

   5.e. Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$.
   Conclure quant à la nature de la série de terme général $\ell - u_n$.

Exercice 4

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0; +\infty[,\ f_n(x) = x^n - nx + 1$$

1. Écrire une fonction **`Python`** de sorte que l'exécution de la commande **`f(n,x)`** renvoie la valeur de $f_n(x)$, où $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $x \in \mathbb{R}^+$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_2(x) = 0$.
3. Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0; +\infty[$.
4. 4.a. Soit $n \in [\![3; +\infty[\![$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions sur $[0; +\infty[$, notées α_n et β_n, vérifiant :

   $$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$

   4.b. Démontrer par récurrence :

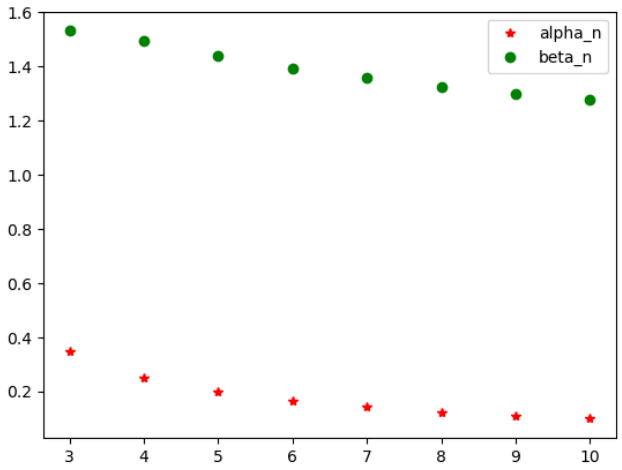
   $$\forall n \in [\![3; +\infty[\![,\ 2^n \geqslant 2n$$

   En déduire :

   $$\forall n \in [\![3; +\infty[\![,\ \beta_n < 2$$

5. 5.a. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, l'exécution de **alpha(n)** renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α_n obtenue par la méthode de dichotomie.

   5.b. On admet que l'on a écrit une fonction **beta(n)** qui renvoie une valeur approchée de β_n (pour $n \in [\![3;+\infty[\![$) à 10^{-5} près.
   Écrire un programme dont l'exécution permet d'obtenir le graphique ci-dessous (la légende n'est pas demandée).



6. 6.a. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 3} \beta_n$ est divergente.

   6.b. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 3} \alpha_n$ est divergente.

7. **Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$.**

   7.a. Démontrer que : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

   7.b. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

   7.c. Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\alpha_n \leqslant \dfrac{2}{n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

   7.d. Démontrer que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

   7.e. Pour quelles valeurs du réel c, la série $\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{\alpha_n}{n^c}$ est-elle convergente ?

8. **Convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$.**

   8.a. Établir : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$.

   8.b. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 1.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★