

DEVOIR SURVEILLÉ 2 JEUDI 9 OCTOBRE 2025 - 2HOO

Consignes à lire!

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,
- la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.
- Pour toutes les questions Python du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

*Un bon maître a ce souci constant d'enseigner à se passer de lui." André Gide

— X Attention!
Les éléments surlignés ne sont

pas les seuls éléments de barème! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés.

EXERCICE o

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1. Base d'un espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on dire de son cardinal? Question de cours 81.
- 2. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $a \in I$ et f une fonction définie sur I. Supposons que f est de classe \mathscr{C}^{∞} sur I. Démontrer :

$$\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Question classique 3.

EXERCICE 1 - INSPIRÉ DE EDHEC 2020 E

Soient n un entier naturel non nul et p un réel de]0;1[. On pose q=1-p

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion 1 - p.

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

- 1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
 - 🗸 L'expérience consiste au tirage d'une boule de façon équiprobable parmi n boules numérotées de 1 à n.
 - ✓ La variable aléatoire X prend comme valeur le numéro de la boule tirée.

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ et ainsi $X(\Omega) = [1; n]$; $\forall k \in [1; n]$, $\mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$; $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$; $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$

- 2. Justifier que $Y(\Omega) = [0; n]$ puis reconnaître, pour tout $k \in [1; n]$, la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement [X=k]. On donnera, pour tout $(k,i) \in [1;n] \times [0;n]$, la probabilité $\mathbb{P}_{|X=k|}([Y=i])$ en distinguant deux cas.
 - Démontrons par double inclusion que $Y(\Omega) = [0; n]$.
 - La variable aléatoire Y prend comme valeurs le nombre de boules blanches obtenues lors d'au plus ntirages dans l'urne V. Ainsi :

$$Y(\Omega) \subset [0; n]$$

Soit $i \in [0; n]$. Démontrons que $i \in Y(\Omega)$, autrement dit, démontrons que $[Y = i] \neq \emptyset$.

Notons ω l'issue consistant à :

 \times piocher la boule numérotée n dans l'urne U;

 \times piocher ensuite, dans l'ordre, i boules blanches puis n-i boules noires.

On a ainsi $Y(\omega) = i$ et donc $\omega \in [Y = i]$. Par conséguent :

$$[Y=i] \neq \emptyset$$

Conclusion : $Y(\Omega) = [0; n]$

- Soit $k \in [1; n]$. Supposons l'évènement [X = k] réalisé. Autrement dit, la boule numéro k a été piochée dans l'urne U; et on pioche donc k boules dans l'urne V. Dans ce cas :
 - √ l'expérience s'assimile à k répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "tirer une boule blanche" est de probabilité p;
 - \checkmark la variable aléatoire Y compte alors le nombre de succès sur ces k répétitions.

Conclusion: pour tout $k \in [1; n]$, la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement [X = k] est la loi binomiale de paramètres k et p.

$$\forall (k,i) \in [[1;n]] \times [[0;n]], \ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) = \left\{ \begin{array}{l} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{array} \right.$$

notation! On dit bien la loi conditionnelle de Y sachant rien d'autre

3. Écrire une fonction Python prenant en arquments un entier naturel non nul n ainsi qu'un réel $p \in]0;1[$ puis renvoyer une réalisation des variables aléatoires X et Y.

```
import numpy.random as rd
def simuleXY(n,p):
    X=rd.randint(1,n+1)
    Y=rd.binomial(X,p)
    return X,Y
```

4. 4.a. Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X=k])_{k\in \llbracket 1;n\rrbracket}$ comme système complet d'évènements

$$\mathbb{P}([Y=0]) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k] \cap [Y=0])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X=k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=0])$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} (1-\rho)^{k}$$

Important! -

Fournir une issue c'est expliciter un déroulement complet de l'expérience qui n'aboutit qu'à une seule issue! On ne peut donc pas se contenter de "piocher la boule numéro n dans U puis piocher iboules blanches dans l'urne Vcar ceci ne définit pas une issue! C'est un évènement qui contient plusieurs issues

X Attention !

Il n'existe pas de boule numéro 0 dans l'urne U... Si on choisit de considérer l'issue consistant à tirer la boule numéro k dans U puis à tirer k boules blanches sur les k tirages de V, il faut alors distinguer le cas k = 0et proposer une issue réalisant [Y=0] séparément

On n'invente ni vocabulaire ni l'évènement [X = k] est la loi...

$$= \frac{1}{n}(1-p)\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}$$
$$= \frac{q}{n}\frac{1-q^n}{p}$$

Conclusion:
$$\mathbb{P}([Y=0]) = \frac{q(1-q^n)}{np}$$
.

4.b. Écrire, pour tout $i \in [1; n]$, la probabilité $\mathbb{P}([Y = i])$ sous forme d'une somme de n - i + 1 termes que l'on ne

Soit $i \in [1; n]$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in [1; n]}$ comme système complet d'évènements

$$\mathbb{P}\big([Y=i]\big) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\big([X=k] \cap [Y=i]\big)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\big([X=k]\big)\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=i]\big)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\big([X=k]\big)\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=i]\big) + \sum_{k=i}^n \mathbb{P}\big([X=k]\big)\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=i]\big)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$$

$$= \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$$

$$\text{State} = \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$$

Conclusion:
$$\forall i \in [1; n], \ \mathbb{P}([Y = i]) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^{i} (1-p)^{k-i}$$
.

On sait qu'il y a souvent une difficulté à cette étape. On prend le temps, si nécessaire, de décomposer la somme en 2 : les 2 cas

♥ Astuce du chef ♥

On réécrit la loi conditionnelle en lisant les conditions sur i et k de "droite à gauche".

5. 5.a. Soient i et k deux entiers naturels tels que $1 \le i \le k \le n$. Montrer l'égalité :

$$i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$$

On a:

$$i\binom{k}{i} = i\frac{k!}{i!(k-i)!}$$

$$= \frac{k!}{(i-1)!((k-1)-(i-1))!}$$

$$= k\binom{k-1}{i-1}$$

Conclusion :
$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$$
.

5.b. En déduire, pour tout $k \in [1; n]$, une expression simplifiée de $\sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$.

Soit $k \in [1; n]$. On a, d'après la question précédente :

$$\forall i \in [1; n], \ i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} = k \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i}$$

D'où, en sommant de $1 \grave{a} k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i} p^{i} (1-p)^{k-i} = \sum_{i=1}^{k} k \binom{k-1}{i-1} p^{i} (1-p)^{k-i}$$

$$= k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{i-1} p^{j+1} (1-p)^{k-(j+1)}$$

$$= k p \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{i-1} p^{j} (1-p)^{k-1-j}$$

$$= k (p+(1-p))^{k}$$

$$= k p$$
formule du binôme de Newton

♥ Conseil du chef ♥

Pour éviter de se tromper "bêtement", il vaut neut-être mieux écrire la formule du binôme de Newton au brouillon et voir comment elle s'applique ici.

Conclusion: $\forall k \in [1; n], \sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i} p^{i} (1-p)^{k-i} = kp.$

5.c. Que dire de l'exécution de la fonction mystere suivante?

```
def mystere(k,p):
    S=0
    c=1
    for i in range(1,k+1):
        c=(k-i+1)/i*c
        S=S+i*c*(p**i)*(1-p)**(k-i)
    return S-k*p
```

Remarquons que pour tout $k \in [1; n]$ et tout $i \in [1; k]$:

$$\binom{k}{i} = \frac{k-i+1}{i} \binom{k}{i-1}$$

Par conséquent, lors de l'exécution de mystere(k,p) :

- la variable c prendra successivement les valeurs $\binom{k}{i}$ pour i allant de 0 à k...
- et ainsi, à l'issue de la boucle for, la variable S prend comme valeur la somme $\sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$.

Conclusion : d'après la question précédente, l'exécution de mystere(k,p) renvoie toujours 0.

6. Montrer que Y possède une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

On sait que $Y(\Omega) = [0; n]$. Ainsi $Y(\Omega)$ est fini donc Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=0}^{n} i \mathbb{P}([Y = i])$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i \mathbb{P}([Y = i])$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^{i} (1-p)^{k-i} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} i \binom{k}{i} p^{i} (1-p)^{k-i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{1 \le i \le k \le n} i \binom{k}{i} p^{i} (1-p)^{k-i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i} p^{i} (1-p)^{k-i} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k p$$

$$= \frac{p}{n} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)p}{2}$$
question **4.b.**

question **5.b.**, licite car k parcourt $[1; n]$

Conclusion :
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$$
.

7. 7.a. Calculer Cov(X, Y)

- On sait que $X(\Omega) = [1; n]$ et $Y(\Omega) = [0; n]$. Ainsi $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, donc X et Y admettent un moment d'ordre 2. Par conséquent, Cov(X, Y) existe.
- Ensuite puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, XY admet une espérance et par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(k,i) \in [\![1:n]\!] \times [\![0:n]\!]} ki \mathbb{P}\left([X=k] \cap [Y=i]\right)$$

$$= \sum_{(k,i) \in [\![1:n]\!] \times [\![0:n]\!]} ki \mathbb{P}\left([X=k]\right) \mathbb{P}_{[X=k]}\left([Y=i]\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \frac{1}{n} ki \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{i=0}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}\right)$$
Question **5.b.**, licite car k parcourt $[\![1:n]\!]$

⊪Réflexe !

On commence chaque question de calcul d'espérance / variance / moment, par rappeler l'ensemble image :

- s'il est fini, cela assure l'existence;
- sinon, on met en place la rédaction habituelle.

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \times kp$$

$$= \frac{p}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{2}$$

$$= \frac{p}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{p(n+1)(2n+1)}{6}$$

• Ainsi (X, Y) admet une covariance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

Cov(X, Y) =
$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

= $\frac{p(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2}\frac{(n+1)p}{2}$
= $\frac{(n+1)p}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right)$
= $\frac{(n+1)p}{2}\frac{n-1}{6}$
= $\frac{(n^2-1)p}{12}$

Conclusion :
$$Cov(X, Y) = \frac{(n^2 - 1)p}{12}$$

7.b. Vérifier la cohérence du résultat précédent dans le cas où n = 1.

Supposons n = 1.

Dans ce cas la variable aléatoire X est alors constante égale à 1. D'où :

$$Cov(X, Y) = 0$$

Ce qui est cohérent avec le résultat trouvé à la question précédente...

7.c. Déduire de la question 7.a. que si $n \ge 2$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Supposons $n \ge 2$.

D'après la question 7.a. :

$$Cov(X, Y) = \frac{(n^2 - 1)p}{12}$$

Ainsi, puisque $n \ge 2$ et $p \ne 0$, on a :

$$Cov(X, Y) \neq 0$$

Conclusion: si $n \ge 2$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes

™ Rappel...

Si X et Y sont indépendantes, alors Cov(X, Y) = 0 (réciproque fausse).

On utilise ici la contraposée de ce résultat.

EXERCICE 2 - FAIT MAISON

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

- 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, admet une unique solution, notée u_n . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est :
 - ✓ continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$, car polynomiale;
 - ✓ strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ comme somme de $x \mapsto 1 x$ et $x \mapsto -x^n$ toutes deux strictement décroissantes sur \mathbb{R}^+ .

Ainsi, par théorème de bijection, f_n est bijective de $[0; +\infty[$ dans $f_n([0; +\infty[), \text{avec } f_n([0; +\infty[) =] -\infty; 1].$ Or $0 \in]-\infty; 1]$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0; +\infty[$.

Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive, notée u_n .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $u_n \in]0; 1[$.

```
On a : f_n(0) = 1, f_n(1) = -1 et f_n(u_n) = 0.
D'où :
```

$$f_n(0) > f_n(u_n) > f_n(1)$$

Et par stricte décroissance de f_n sur \mathbb{R}^+ , licite car $0, u_n, 1 \in \mathbb{R}^+$, on obtient :

$$0 < u_n < 1$$

```
Conclusion : u_n \in ]0;1[.
```

- 3. Déterminer u_1 et u_2 .
 - u_1 est l'unique solution positive de $f_1(x) = 0$.

```
Conclusion : u_1 = \frac{1}{2}.
```

• u_2 est l'unique solution positive de $f_2(x) = 0$

```
Conclusion : u_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.
```

4. 4.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de la commande $\mathtt{suite_u(n)}$ renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```
def f(n,x):
    return 1-x-x**n

def suite_u(n):
    a=...
    b=...
    while ...
    if f(n,m)>0:
        ...
    elif f(n,m)<0:
        ...
    else:
    return m
    return (a+b)/2</pre>
```

Remarque

Bien évidemment, on peut aussi étudier le signe de $f'_n(x)$...

🖙 Rappel...

Théorème de bijection : Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

- f est bijective sur I,
- f(I) est un intervalle (c'est la continuité de f qui le garantit),
- f^{-1} a même stricte monotonie sur f(I)

Important!

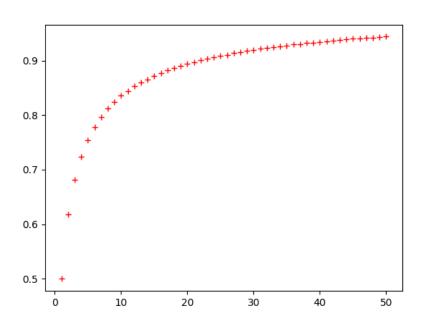
Cet algorithme ne fonctionne que parce-que la fonction f_n est décroissante. Ne pas hésiter à faire un schéma pour s'aider...

4.b. Écrire alors un programme permettant de représenter les termes $u_1, u_2, ..., u_{50}$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

U=[suite_u(n) for n in range(1,51)]
plt.plot(range(1,51),U,'r+')
plt.show()
```

Et on obtient le graphique suivant :



5. 5.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\forall x \in]0; 1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)]$.

Soit $x \in]0;1[$. On a:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 1 - x - x^{n+1} - (1 - x - x^n)$$

$$= x^n - x^{n+1}$$

$$= x^n (1 - x)$$

Mais x ∈]0; 1[, donc $x^n > 0$ et 1 - x > 0. D'où :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$$

Conclusion : $\forall x \in]0; 1[, f_{n+1}(x) > f_n(x).$

5.b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, avec $x = u_n$, licite car $u_n \in]0;1[$:

$$f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$$

Mais $f_n(u_n) = 0$. D'où :

$$f_{n+1}(u_n) > 0$$

Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Ainsi:

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$$

Et par stricte décroissance de f_{n+1} sur \mathbb{R}^+ , licite car $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$, on obtient :

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

5.c. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ , puis démontrer que $\ell\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est :
 - ✓ croissante,
 - ✓ majorée (par 1) d'après la question 2...

Ainsi, par théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .

- Ensuite :
 - * $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1 (d'après la question 2.), donc $\ell\leqslant 1$.

- ⊪Réflexe!

On étudie le signe de la différence !

Remarque

Je trouve un peu rapide, d'autant plus que le résultat est donné, de démarrer directement de "Puisque $x \in]0;1[$, on a $x^{n+1} < x^n$. C'est vrai, mais il vaut mieux le justifier en partant de x < 1 puis en multipliant par x^n , avec $x^n > 0$...

Les inégalité strictes deviennent larges en passant à la limite!

* Et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, elle est minorée par son premier terme. Or $u_1=\frac{1}{2}$ (question 3.); d'où : $\ell\geqslant\frac{1}{2}$.

Par conséquent :

$$\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$$

Conclusion: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell\in\left[\frac{1}{2}\right]$

5.d. En raisonnant par l'absurde, établir que $\ell=1$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq 1$. Puisque l'on sait que $\ell \in \left[\frac{1}{2}\right]$, on a ainsi $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

• Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 1 - u_n - u_n^n = 0 \ (\star)$$

• Or on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, minorée par 0 et converge vers ℓ ; ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant u_n \leqslant \ell$$

D'où, par croissance de ." sur \mathbb{R}^+ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant u_n^n \leqslant \ell^n$$

Or $\ell \in]-1;1[$, donc $\lim_{n \to +\infty} \ell^n = 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n^n=0$$

D'où, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (\star) , on obtient :

$$1 - \ell = 0$$

Donc $\ell = 1$: absurde!

Conclusion: $\ell = 1$; la suite (u_n) converge vers 1

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$; et on remarque donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in]0;1[$.

6.a. Établir : $\ln(v_n) \sim -nv_n$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(u_n) = 0$, donc :

$$u_n^n = 1 - u_n$$

et ainsi :

$$(1-v_n)^n=v_n$$

Ensuite, puisque $v_n > 0$ et $1 - v_n > 0$:

$$n \ln(1 - v_n) = \ln(v_n)$$

• Or :

✓
$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$
, $u_n \in]0; 1[$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-v_n \neq 0$;

$$\checkmark \lim_{n\to +\infty} u_n = 1$$
, donc $\lim_{n\to +\infty} -v_n = 0$.

Ainsi:

$$ln(1-v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$$

D'où:

$$n \ln(1-v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$$

Conclusion: $\ln(v_n) \sim -nv_n$.

6.b. Vérifier que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln \left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$, puis démontrer que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

• D'après la question précédente : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{-nv_n} = 1$

Ainsi, par composition:

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)=0$$

Et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} -\ln(v_n) = +\infty$$

Par quotient, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)}=0$$

Dire " $u_n \in]-1,1[]$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n^n =$ est faux! En effet, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} \in]-1;1[$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-1} \neq 0$$

(en passant à l'écriture avec exp et ln)... • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $-\ln(v_n) > 0$, n > 0 et $v_n > 0$, on a :

$$\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)}$$
$$= \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1$$

D'où:

$$\frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = -\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + 1$$

* Or :

$$\checkmark \lim_{n \to +\infty} -\ln(v_n) = +\infty$$

✓ par croissances comparées : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Ainsi, par composition:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)}=0$$

* Et on vient d'établir $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$

Par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1$$

Conclusion: $ln(v_n) \sim -ln(n)$.

6.c. Déduire des deux questions précédentes un équivalent simple de v_n lorsque $n \to +\infty$.

D'après les résultats des questions 6.a. et 6.b., on obtient :

$$-nv_n \sim_{+\infty} - \ln(n)$$

Conclusion: $v_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$

6.d. Etudier la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n^2$.

• On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Conclusion: la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge grossièrement.

• On sait que :

$$\checkmark v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n};$$

$$\checkmark \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n \geqslant 0, \ \frac{\ln(n)}{n} \geqslant 0.$$

Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, les séries $\sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n} \text{ sont de même nature.}$

Or

$$\checkmark \ \forall n \in [3; +\infty[, \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0;$$

✓ la série
$$\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}$$
 est une série de Riemann divergente (série harmonique).

Ainsi, par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

Conclusion: la série $\sum_{n\geqslant 1}v_n$ est divergente.

• On sait que :

$$\checkmark v_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n^2};$$

$$\checkmark \forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n^2 \geqslant 0, \ \frac{\ln(n)^2}{n^2} \geqslant 0$$

🖊 Rédaction

Lorsque l'on doit mettre en place 2 critères successifs pour étudier la nature d'une série, on rédige au mieux pour bien différencier les 2 critères. Comme toujours, on évite le 'fourre-tout d'arguments' qui ne renvoie pas une très bonne image...

Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, les séries

 $\sum_{n\geqslant 1} v_n^2 \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^2} \text{ sont de même nature.}$

✓ par croissances comparées :

$$\ln(n)^2 = \underset{n \to +\infty}{\circ} (n^{1/2})$$

D'où:

$$\frac{\ln(n)^2}{n^2} = \underset{n \to +\infty}{0} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

$$\checkmark \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{\ln(n)}{n} \geqslant 0, \ \frac{1}{n} \geqslant 0;$$

✓
$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$
, $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant 0$, $\frac{1}{n} \geqslant 0$;
✓ la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente $(\frac{3}{2} > 1)$.

Ainsi, par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^2}{n^2} \text{ est convergente.}$

Conclusion : la série $\sum v_n^2$ est convergente.

SI ON NE SAIT PAS COMMENT DÉBUTER?

Soit a > 0. Par croissances comparées, on a

$$\ln(n)^2 = \underset{n \to +\infty}{\circ} (n^a)$$

D'où:

$$\frac{\ln(n)^2}{n^2} = \underset{n \to +\infty}{\mathbf{0}} \left(\frac{1}{n^{2-a}} \right)$$

Posons maintenant $a = \frac{1}{2}$ de sorte que :

$$\checkmark \frac{\ln(n)^2}{n^2} = \mathop{\rm o}_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

$$\checkmark \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{n} \geqslant 0, \frac{1}{n} \geqslant 0$$

✓
$$\frac{\ln(n)^2}{n^2} = \int_{n \to +\infty}^{0} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{n} \geqslant 0, \frac{1}{n} \geqslant 0;$
✓ la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente $(\frac{3}{2} > 1)$.

Conclusion : par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)^2}{n^2} \text{ est convergente.}$





C'est l'entraînement qui nous aide à savoir de quelle puissance démarrer dans $\underset{n\to+\infty}{\circ}$ (). Sinon, voir le commentaire en fin de question.