

CONSIGNES À LIRE !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,
- la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.
- Pour toutes les questions Python du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"Un bon maître a ce souci constant d'enseigner à se passer de lui."
André Gide

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir.

✗ Attention !

Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de base ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés.

EXERCICE 0

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Base d'un espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on dire de son cardinal ?

Question de cours 81.

2. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $a \in I$ et f une fonction définie sur I . Supposons que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
Démontrer :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Question classique 3.

EXERCICE 1 - INSPIRÉ DE EDHEC 2020 E

Soient n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $1 - p$.

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

- ✓ L'expérience consiste au tirage d'une boule de façon équiprobable parmi n boules numérotées de 1 à n .
- ✓ La variable aléatoire X prend comme valeur le numéro de la boule tirée.

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ et ainsi

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket ; \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n} ; \quad \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

2. Justifier que $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ puis reconnaître, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement $[X = k]$. On donnera, pour tout $(k, i) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 0; n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])$ en distinguant deux cas.

- Démontrons par double inclusion que $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

□ La variable aléatoire Y prend comme valeurs le nombre de boules blanches obtenues lors d'au plus n tirages dans l'urne V . Ainsi :

$$Y(\Omega) \subset \llbracket 0; n \rrbracket$$

□ Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Démontrons que $i \in Y(\Omega)$, autrement dit, démontrons que $[Y = i] \neq \emptyset$.

Notons ω l'issue consistant à :

- × piocher la boule numérotée n dans l'urne U ;
- × piocher ensuite, dans l'ordre, i boules blanches puis $n - i$ boules noires.

On a ainsi $Y(\omega) = i$ et donc $\omega \in [Y = i]$. Par conséquent :

$$[Y = i] \neq \emptyset$$

Conclusion : $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

- Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Supposons l'évènement $[X = k]$ réalisé. Autrement dit, la boule numéro k a été piochée dans l'urne U ; et on pioche donc k boules dans l'urne V . Dans ce cas :

- ✓ l'expérience s'assimile à k répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "tirer une boule blanche" est de probabilité p ;
- ✓ la variable aléatoire Y compte alors le nombre de succès sur ces k répétitions.

Conclusion : pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement $[X = k]$ est la loi binomiale de paramètres k et p .

$$\forall (k, i) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

Important !

Fournir une issue c'est expliciter un déroulement complet de l'expérience qui n'aboutit qu'à une seule issue ! On ne peut donc pas se contenter de "piocher la boule numéro n dans U puis piocher i boules blanches dans l'urne V ", car ceci ne définit pas une issue ! C'est un évènement qui contient plusieurs issues...

X Attention !

Il n'existe pas de boule numéro 0 dans l'urne U ... Si on choisit de considérer l'issue consistant à tirer la boule numéro k dans U puis à tirer k boules blanches sur les k tirages de V , il faut alors distinguer le cas $k = 0$ et proposer une issue réalisant $[Y = 0]$ séparément.

Vocabulaire

On n'invente ni vocabulaire ni notation ! On dit bien la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement $[X = k]$ est la loi... : rien d'autre !

3. Écrire une fonction Python prenant en arguments un entier naturel non nul n ainsi qu'un réel $p \in]0; 1[$ puis renvoyer une réalisation des variables aléatoires X et Y .

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simuleXY(n,p):
4     X=rd.randint(1,n+1)
5     Y=rd.binomial(X,p)
6     return X,Y
```

4. 4.a. Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 0]) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0]) && \hookrightarrow \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0 \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 0]) && \hookrightarrow \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 0]) = (1-p)^k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (1-p)^k && \hookrightarrow 1-p \neq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n}(1-p) \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\
 &= \frac{q}{n} \frac{1-q^n}{p}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{q(1-q^n)}{np}$.

4.b. Écrire, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}([Y = i])$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ comme système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y = i]) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = i]) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) \\
 &= \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) + \sum_{k=i}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) \\
 &= \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}
 \end{aligned}$$

$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0$
 question 2. : $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket,$
 $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } k \geq i \\ 0 & \text{si } k < i \end{cases}$

Attention !
 On sait qu'il y a souvent une difficulté à cette étape. On prend le temps, si nécessaire, de décomposer la somme en 2 : les 2 cas définissant la loi conditionnelle.

Astuce du chef
 On réécrit la loi conditionnelle en lisant les conditions sur i et k de "droite à gauche"...

Conclusion : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([Y = i]) = \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$.

5. 5.a. Soient i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 i \binom{k}{i} &= i \frac{k!}{i!(k-i)!} \\
 &= \frac{k!}{(i-1)!((k-1)-(i-1))!} \\
 &= k \binom{k-1}{i-1}
 \end{aligned}$$

$i \geq 1$
 $k \geq 1$

Conclusion : $i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$.

5.b. En déduire, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, une expression simplifiée de $\sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$.

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a, d'après la question précédente :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} = k \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i}$$

D'où, en sommant de 1 à k :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} &= \sum_{i=1}^k k \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i} \\
 &= k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{k-(j+1)} \\
 &= kp \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^j (1-p)^{k-1-j} \\
 &= k(p + (1-p))^k \\
 &= kp
 \end{aligned}$$

$j = i - 1$
 formule du binôme de Newton

Conseil du chef
 Pour éviter de se tromper "bêtement", il vaut peut-être mieux écrire la formule du binôme de Newton au brouillon et voir comment elle s'applique ici...

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} = kp$.

5.c. Que dire de l'exécution de la fonction **mystere** suivante ?

```

1 def mystere(k,p):
2     S=0
3     c=1
4     for i in range(1,k+1):
5         c=(k-i+1)/i*c
6         S=S+i*c*(p**i)*(1-p)**(k-i)
7     return S-k*p

```

Remarquons que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$:

$$\binom{k}{i} = \frac{k-i+1}{i} \binom{k}{i-1}$$

Par conséquent, lors de l'exécution de `mystere(k,p)` :

- la variable `c` prendra successivement les valeurs $\binom{k}{i}$ pour i allant de 0 à k ...
- et ainsi, à l'issue de la boucle `for`, la variable `S` prend comme valeur la somme $\sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$.

Conclusion : d'après la question précédente, l'exécution de `mystere(k,p)` renvoie toujours 0.

6. Montrer que Y possède une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

On sait que $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$. Ainsi $Y(\Omega)$ est fini donc Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \sum_{i=0}^n i \mathbb{P}([Y = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}([Y = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \right) \quad \leftarrow \text{question 4.b.} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \right) \quad \leftarrow \text{question 5.b., licite car } k \text{ parcourt } \llbracket 1; n \rrbracket \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k p \\
 &= \frac{p}{n} \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{(n+1)p}{2}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

7. 7.a. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

- On sait que $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$. Ainsi $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, donc X et Y admettent un moment d'ordre 2. Par conséquent, $\text{Cov}(X, Y)$ existe.
- Ensuite puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, XY admet une espérance et par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(XY) &= \sum_{(k,i) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 0; n \rrbracket} k i \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = i]) \\
 &= \sum_{(k,i) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 0; n \rrbracket} k i \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) \quad \leftarrow \text{question 2.} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \frac{1}{n} k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{i=0}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \right) \quad \leftarrow \text{question 5.b., licite car } k \text{ parcourt } \llbracket 1; n \rrbracket
 \end{aligned}$$

► Réflexe !

On commence chaque question de calcul d'espérance / variance / moment, par rappeler l'ensemble image :

- s'il est fini, cela assure l'existence;
- sinon, on met en place la rédaction habituelle.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \times kp \\
&= \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \\
&= \frac{p}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{p(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

- Ainsi (X, Y) admet une covariance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \frac{p(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2} \frac{(n+1)p}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \text{questions 1., 6. et point précédent} \end{array} \right. \\
&= \frac{(n+1)p}{2} \left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2} \right) \\
&= \frac{(n+1)p}{2} \frac{n-1}{6} \\
&= \frac{(n^2-1)p}{12}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Cov}(X, Y) = \frac{(n^2-1)p}{12}$.

7.b. Vérifier la cohérence du résultat précédent dans le cas où $n = 1$.

Supposons $n = 1$.

Dans ce cas la variable aléatoire X est alors constante égale à 1. D'où :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

Ce qui est cohérent avec le résultat trouvé à la question précédente...

7.c. Dédire de la question **7.a.** que si $n \geq 2$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Supposons $n \geq 2$.

D'après la question **7.a.** :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{(n^2-1)p}{12}$$

Ainsi, puisque $n \geq 2$ et $p \neq 0$, on a :

$$\text{Cov}(X, Y) \neq 0$$

Conclusion : si $n \geq 2$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Rappel...

Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (réciproque fausse).
On utilise ici la contraposée de ce résultat.

EXERCICE 2 – FAIT MAISON

Pour tout entier naturel non nul n , on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, admet une unique solution, notée u_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est :

- ✓ continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$, car polynomiale ;
- ✓ strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ comme somme de $x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto -x^n$ toutes deux strictement décroissantes sur \mathbb{R}^+ .

Ainsi, par théorème de bijection, f_n est bijective de $[0; +\infty[$ dans $f_n([0; +\infty[) =]-\infty; 1]$. Or $0 \in]-\infty; 1]$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0; +\infty[$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive, notée u_n .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $u_n \in]0; 1[$.

On a : $f_n(0) = 1$, $f_n(1) = -1$ et $f_n(u_n) = 0$.

D'où :

$$f_n(0) > f_n(u_n) > f_n(1)$$

Et par stricte décroissance de f_n sur \mathbb{R}^+ , **licite car** $0, u_n, 1 \in \mathbb{R}^+$, on obtient :

$$0 < u_n < 1$$

Conclusion : $u_n \in]0; 1[$.

3. Déterminer u_1 et u_2 .

- u_1 est l'unique solution positive de $f_1(x) = 0$.

Conclusion : $u_1 = \frac{1}{2}$.

- u_2 est l'unique solution positive de $f_2(x) = 0$

Conclusion : $u_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. 4.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de la commande `suite_u(n)` renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```
1 def f(n, x):
2     return 1-x-x**n
3
4 def suite_u(n):
5     a=...
6     b=...
7     while ...
8         ...
9         if f(n,m)>0:
10            ...
11            elif f(n,m)<0:
12                ...
13            else:
14                return m
15    return (a+b)/2
```

```
1 def f(n, x):
2     return 1-x-x**n
3
4 def suite_u(n):
5     a=0
6     b=1
7     while b-a>10**(-3):
8         m=(a+b)/2
9         if f(n,m)>0:
10            a=m
11            elif f(n,m)<0:
12                b=m
13            else:
14                return m
15    return (a+b)/2
```

Remarque

Bien évidemment, on peut aussi étudier le signe de $f'_n(x)$...

Rappel...

Théorème de bijection :
Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors :
• f est bijective sur I ,
• $f(I)$ est un intervalle (c'est la continuité de f qui le garantit),
• f^{-1} a même stricte monotonie sur $f(I)$

Important !

Cet algorithme ne fonctionne que parce-que la fonction f_n est décroissante. Ne pas hésiter à faire un schéma pour s'aider...

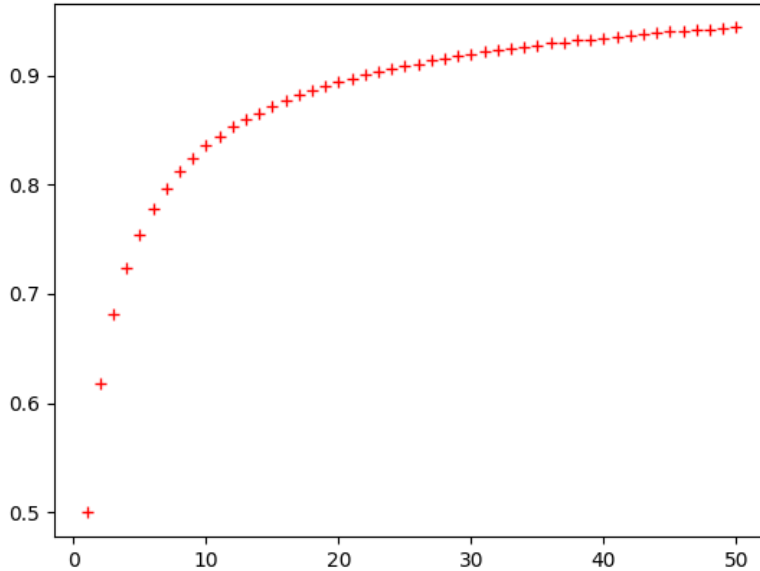
4.b. Écrire alors un programme permettant de représenter les termes u_1, u_2, \dots, u_{50} .

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 U=[suite_u(n) for n in range(1,51)]
4 plt.plot(range(1,51),U,'r+')
5 plt.show()

```

Et on obtient le graphique suivant :



5. 5.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\forall x \in]0; 1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

Soit $x \in]0; 1[$. On a :

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(x) - f_n(x) &= 1 - x - x^{n+1} - (1 - x - x^n) \\
 &= x^n - x^{n+1} \\
 &= x^n(1 - x)
 \end{aligned}$$

Révisé !

Mais $x \in]0; 1[$, donc $x^n > 0$ et $1 - x > 0$. D'où :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$$

Conclusion : $\forall x \in]0; 1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

➡ Réflexe !
 On étudie le signe de la différence !

Remarque
 Je trouve un peu rapide, d'autant plus que le résultat est donné, de commencer directement de "Puisque $x \in]0; 1[$, on a $x^{n+1} < x^n$. C'est vrai, mais il vaut mieux le justifier en partant de $x < 1$ puis en multipliant par x^n , avec $x^n > 0$...

5.b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, avec $x = u_n$, licite car $u_n \in]0; 1[$:

$$f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$$

Mais $f_n(u_n) = 0$. D'où :

$$f_{n+1}(u_n) > 0$$

Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Ainsi :

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$$

Et par stricte décroissance de f_{n+1} sur \mathbb{R}^+ , licite car $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$, on obtient :

$$u_n < u_{n+1}$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante.

5.c. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ , puis démontrer que $\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est :
 - ✓ croissante d'après la question précédente,
 - ✓ majorée (par 1) d'après la question 2..

Ainsi, par théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .

- Ensuite :
 - * $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1 (d'après la question 2.), donc $\ell \leq 1$.

✗ Attention !
 Les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite !

* Et comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, elle est minorée par son premier terme. Or $u_1 = \frac{1}{2}$ (question 3.);

d'où : $\ell \geq \frac{1}{2}$.

Par conséquent :

$$\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$$

Conclusion : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

5.d. En raisonnant par l'absurde, établir que $\ell = 1$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq 1$. Puisque l'on sait que $\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$, on a ainsi $\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right[$.

• Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - u_n - u_n^n = 0 \quad (*)$$

• Or on sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, minorée par 0 et converge vers ℓ ; ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \ell$$

D'où, par croissance de \cdot^n sur \mathbb{R}^+ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n^n \leq \ell^n$$

Or $\ell \in]-1; 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n = 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$$

D'où, en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans (*), on obtient :

$$1 - \ell = 0$$

Donc $\ell = 1$: absurde !

Conclusion : $\ell = 1$; la suite (u_n) converge vers 1.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$; et on remarque donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in]0; 1[$.

6.a. Établir : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(u_n) = 0$, donc :

$$u_n^n = 1 - u_n$$

et ainsi :

$$(1 - v_n)^n = v_n$$

Ensuite, puisque $v_n > 0$ et $1 - v_n > 0$:

$$n \ln(1 - v_n) = \ln(v_n)$$

• Or :

✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0; 1[$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -v_n \neq 0$;

✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -v_n = 0$.

Ainsi :

$$\ln(1 - v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -v_n$$

D'où :

$$n \ln(1 - v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$$

Conclusion : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

6.b. Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$, puis démontrer que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

• D'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{-nv_n} = 1$.

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0$$

Et comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(v_n) = +\infty$$

Par quotient, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$$

Attention !

Dire
~~" $u_n \in]-1; 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$ "~~
 est faux !

En effet, on sait que pour tout
 $n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} \in]-1; 1[$ et
 pourtant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$$

(en passant à l'écriture avec exp et ln)...

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $-\ln(v_n) > 0$, $n > 0$ et $v_n > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} &= \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} \\ &= \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = -\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + 1$$

* Or :

$$\checkmark \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(v_n) = +\infty$$

$$\checkmark \text{ par croissances comparées : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0$$

$$\text{* Et on vient d'établir } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1$$

Conclusion : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

6.c. Dédire des deux questions précédentes un équivalent simple de v_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

D'après les résultats des questions 6.a. et 6.b., on obtient :

$$-nv_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$$

Conclusion : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

6.d. Etudier la nature des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$, $\sum_{n \geq 1} v_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n^2$.

- On sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge grossièrement.

- On sait que :

$$\checkmark v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n};$$

$$\checkmark \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 0, \frac{\ln(n)}{n} \geq 0.$$

Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, les séries

$\sum_{n \geq 1} v_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ sont de même nature.

Or :

$$\checkmark \forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0;$$

$$\checkmark \text{ la série } \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n} \text{ est une série de Riemann divergente (série harmonique).}$$

Ainsi, par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est divergente.

- On sait que :

$$\checkmark v_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n^2};$$

$$\checkmark \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n^2 \geq 0, \frac{\ln(n)^2}{n^2} \geq 0.$$

Rédaction

Lorsque l'on doit mettre en place 2 critères successifs pour étudier la nature d'une série, on rédige au mieux pour bien différencier les 2 critères. Comme toujours, on évite le "fourre-tout d'arguments" qui ne renvoie pas une très bonne image...

Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, les séries

$\sum_{n \geq 1} v_n^2$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$ sont de même nature.

Or :

- ✓ par croissances comparées :

$$\ln(n)^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (n^{1/2})$$

D'où :

$$\frac{\ln(n)^2}{n^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{n} \geq 0, \frac{1}{n} \geq 0$;
- ✓ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente ($\frac{3}{2} > 1$).

Ainsi, par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} v_n^2$ est convergente.

SI ON NE SAIT PAS COMMENT DÉBUTER ?

Soit $a > 0$. Par croissances comparées, on a :

$$\ln(n)^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (n^a)$$

D'où :

$$\frac{\ln(n)^2}{n^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^{2-a}} \right)$$

Posons maintenant $a = \frac{1}{2}$ de sorte que :

- ✓ $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$
- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{n} \geq 0, \frac{1}{n} \geq 0$;
- ✓ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente ($\frac{3}{2} > 1$).

Conclusion : par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$ est convergente.

Remarque

C'est l'entraînement qui nous aide à savoir de quelle puissance démarrer dans $\underset{n \rightarrow +\infty}{o} ()$. Sinon, voir le commentaire en fin de question.

★★★★★★★★ FIN ★★★★★★★★