Devoir surveillé 2

Jeudi 9 octobre 2025 - 2h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- Pour toutes les questions `Python` du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"Un bon maître a ce souci constant d'enseigner à se passer de lui."
André Gide

Exercice 0

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Base d'un espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on dire de son cardinal ?
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur I. Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.
   Démontrer :
$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Exercice 1

Soient n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $1 - p$.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Justifier que $Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$ puis reconnaître, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement $[X = k]$. On donnera, pour tout $(k,i) \in [\![1;n]\!] \times [\![0;n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y = i]\big)$ en distinguant deux cas.
3. Écrire une fonction **Python** prenant en arguments un entier naturel non nul n ainsi qu'un réel $p \in]0;1[$ puis renvoyer une réalisation des variables aléatoires X et Y.
4. **4.a.** Calculer $\mathbb{P}\big([Y = 0]\big)$.
   4.b. Écrire, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}\big([Y = i]\big)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.
5. **5.a.** Soient i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Montrer l'égalité :
$$i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$$
   5.b. En déduire, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i} p^i(1-p)^{k-i}$.
   5.c. Que dire de l'exécution de la fonction `mystere` suivante ?

```python
def mystere(k,p):
    S=0
    c=1
    for i in range(1,k+1):
        c=(k-i+1)/i*c
        S=S+i*c*(p**i)*(1-p)**(k-i)
    return S-k*p
```

6. Montrer que Y possède une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)p}{2}$.
7. **7.a.** Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   7.b. Vérifier la cohérence du résultat précédent dans le cas où $n = 1$.
   7.c. Déduire de la question **7.a.** que si $n \geqslant 2$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, admet une unique solution, notée u_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $u_n \in]0;1[$.
3. Déterminer u_1 et u_2.
4. **4.a.** Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de la commande **suite_u(n)** renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
def f(n,x):
    return 1-x-x**n

def suite_u(n):
    a=...
    b=...
    while ...
        ...
        if f(n,m)>0:
            ...
        elif f(n,m)<0:
            ...
        else:
            return m
    return (a+b)/2
```

4.b. Écrire alors un programme permettant de représenter les termes $u_1, u_2, \dots, u_{50}$.

5. 5.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\forall x \in]0;1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

5.b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

5.c. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, puis démontrer que $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

5.d. En raisonnant par l'absurde, établir que $\ell = 1$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$; et on remarque donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in]0;1[$.

6.a. Établir : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

6.b. Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$, puis démontrer que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

6.c. Déduire des deux questions précédentes un équivalent simple de v_n lorsque $n \to +\infty$.

6.d. Etudier la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n^2$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★