Devoir surveillé 2

Lundi 12 octobre 2026 – 2h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques consignes :

- **prendre la copie de sorte que la marge se situe à droite de chaque page et l'ouverture dans le sens habituel,**
- **laisser la première page de la copie vierge pour les appréciations,**
- **numéroter et ranger toutes les pages de la copie dans l'ordre de lecture,**
- **mettre en évidence les résultats finaux (souligner ou encadrer),**
- **présenter les questions d'un même exercice dans l'ordre du sujet,**
- **débuter chaque nouvel exercice sur une nouvelle page.**

Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera importés les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"*Aucune violence n'a jamais ajouté à la grandeur des hommes.*"
Jean Guéhenno

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments mis en évidence ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

Exercice 1 – Fait maison

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x tf(t)dt + x^2 \quad (\star)$$

1. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$.

1.a. Calculer $f(0)$.

Conclusion : $f(0) = 0$.

Important !
Il faut travailler autant que nécessaire cette question pour savoir la faire, et parfaitement !

1.b. Démontrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer, pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $g : t \longmapsto tf(t)$ est également continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, par théorème fondamental de l'analyse, la fonction g admet des primitives $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons G l'une d'elles, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = G(x) - G(0) + x^2$$

Dès lors, la fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(x) + 2x \\ &= xf(x) + 2x \end{aligned} \qquad \text{↙ } G \text{ est une primitive de } x \longmapsto xf(x)$$

Remarque
On peut aller un peu plus vite en disant que puisque $t \longmapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par théorème fondamental de l'anayse, la fonction $x \longmapsto \int_0^x tf(t)dt$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à $t \longmapsto tf(t)$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = xf(x) + 2x$.

On note (E_1) l'équation différentielle $y' - xy = 2x$ et (E_2) l'équation différentielle $y' - xy = 0$.
Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

1.c. Soit $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que y est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction $z : x \longmapsto y(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
Raisonnons par double implication.

Remarque
Si on a suffisamment bossé les questions classiques, on reconnaît un cas particulier de QUESTION CLASSIQUE 23 !

⇐ Supposons que la fonction z est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y'(x) - xy(x) &= \lambda x \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - \lambda x \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc y est solution de (E_2).

⇒ Supposons que y est solution de (E_2). Ainsi, la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - xy(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(y'(x) - xy(x)\right) \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \text{↙ } y \text{ est solution de } (E_2)$$

Puisque z est dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, qui est un intervalle, la fonction z est constante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : y est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction $z : x \longmapsto y(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Ou alors...

En fait, il est possible de raisonner par équivalences...

$$\begin{aligned} &\left(y \text{ est solution de } (E_2)\right) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - xy(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - xy(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \qquad \text{↙ } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = 0 \qquad \text{↙ } \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = y'(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - xy(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\ &\iff \left(z \text{ est constante sur } \mathbb{R}\right) \qquad \text{↙ } z \text{ est dérivable, de dérivée nulle sur un intervalle} \end{aligned}$$

1.d. Donner alors l'ensemble des solutions de (E_2).
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \left(y \text{ est solution de } (E_2)\right) &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

1.e. Déterminer une solution constante de (E_1), notée u.

Conclusion : la fonction $u : x \longmapsto -2$ est une solution constante de (E_1).

1.f. Soit $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Établir l'équivalence : y est solution de (E_1) si, et seulement si, $y - u$ est solution de (E_2).

$$\begin{aligned}
\big(y - u \text{ est solution de } (E_2)\big) &\iff (y-u)' - x(y-u) = 0 \\
&\iff y' - xy = u' - xu \qquad \text{(linéarité de la dérivation)} \\
&\iff y' - xy = 2x \qquad \text{(u est solution de (E_1), donc $u' - xu = 2x$)}
\end{aligned}$$

Remarque

Si on a suffisamment bossé les questions classiques, on reconnaît un cas particulier de QUESTION CLASSIQUE 24 !

Conclusion : y est solution de (E_1) si, et seulement si, $y - u$ est solution de (E_2).

1.g. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 2$$

D'après la question **1.b.**, la fonction f est solution de l'équation différentielle (E_1).
Ainsi, d'après la question précédente et la question **1.e.**, la fonction $f + 2$ est solution de (E_2).
D'après la question **1.d.**, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + 2 = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}} - 2$$

Or, d'après la question **1.a.**, $f(0) = 0$... D'où :

$$\lambda = 2$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 2$.

2. Vérifier que la fonction trouvée en question **1.g.** satisfait la relation $(\star)$.

Notons $f : x \longmapsto 2e^{\frac{x^2}{2}} - 2$.

- Déjà, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x tf(t)dt + x^2 &= \int_0^x \left(2te^{\frac{t^2}{2}} - 2t\right)dt + x^2 \\
&= \left[2e^{\frac{t^2}{2}} - t^2\right]_0^x + x^2 \\
&= 2e^{\frac{x^2}{2}} - x^2 - 2 + 0 + x^2 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $x \longmapsto 2e^{\frac{x^2}{2}} - 2$ vérifie $(\star)$.

3. Conclure quant à l'objectif de l'exercice.

En question **1.**, on a démontré que si f vérifie $(\star)$, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 2$.
Réciproquement en question **2.**, on a démontré que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 2$, alors f vérifie $(\star)$.

Conclusion : le problème initial possède une unique solution : la fonction $x \longmapsto 2e^{\frac{x^2}{2}} - 2$.

Exercice 2 - EDHEC 2004 E

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée (donnant PILE avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec la même probabilité), les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si aucun PILE n'est obtenu sur ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend la valeur du rang du premier PILE obtenu.
Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on note P_j l'évènement "obtenir PILE au j-ième lancer" et $F_j = \overline{P_j}$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simul_Z(n)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z.

```
def simul_Z(n):
    for k in range(1,n+1):
        if rd.random()<0.5:
            return k
    return 0
```

2. 2.a. Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.
Montrons que $Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Raisonnons pas double inclusion.

⊂ Puisque Z prend la valeur 0 ou la valeur du rang du premier PILE obtenu sur n lancers de pièce, on a $Z(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.

⊃ Montrons que $[\![0;n]\!] \subset Z(\Omega)$. Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

* Si $k = 0$: l'issue consistant à n'obtenir que des FACE réalise l'évènement $[Z = 0]$.
* Si $k \in [\![1;n]\!]$: l'issue (que l'on assimile à un n-uplet) $(\underbrace{F,\dots,F}_{k-1},P,\dots,P)$ réalise l'évènement $[Z = k]$ (même si $k = 1$ et que l'on a alors aucun FACE avant le premier PILE).

Dans les deux cas, on a $[Z = k] \neq \varnothing$, donc $k \in Z(\Omega)$.

Conclusion : $Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

2.b. Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}([Z = k])$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geqslant 1$.
Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

- Si $k = 0$:

$$[Z = 0] = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

Puis, par indépendance des lancers, on obtient :

$$\mathbb{P}([Z = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Si $k \in [\![1;n]\!]$:

$$[Z = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$$

Puis, par indépendance des lancers, on obtient :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Z = 0]) = \frac{1}{2^n}$ et, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{1}{2^k}$.

2.c. Vérifier par le calcul que $\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z = k]) \underset{\text{!}}{=} \mathbb{P}([Z = 0]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z = k])$$

$$= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad \text{↙ } \frac{1}{2} \neq 1$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$= 1$$

♣ Méthode !
Montrons :
$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ k \in Z(\Omega)$$
Pour montrer que $k \in Z(\Omega)$, il faut montrer l'existence de $\omega \in \Omega$ telle que $k = Z(\omega)$.
Autrement dit, il faut trouver une issue réalisant l'évènement $[Z = k]$.

✓ Rigueur !
Une issue consiste ici en n lancers ! Il serait incorrect que le descriptif de l'issue s'arrête à l'obtention du premier PILE. Pour la définir entièrement, il faut préciser les n tirages... Mais on accepte moins de détails !

Remarque
Il n'est pas nécessaire d'exclure le cas $k = 1$ si on prend comme convention $\bigcap_{i=1}^{0} F_i = \Omega$.
- une intersection d'évènements indexée sur un ensemble vide est Ω (le neutre pour $\cap$)
- une union d'évènements indexée sur un ensemble vide est $\varnothing$ (le neutre pour $\cup$).

✘ Attention !
Pour calculer $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, deux possibilités :
- formule directe, sans oublier de multiplier par le premier terme !
- $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1$.

2.d. Démontrer : $\forall x \in [0;1[,\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

Considérons la fonction f définie sur $[0;1[$ par : $\forall x \in [0;1[,\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$.

- f est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $[0;1[$.
- Par linéarité de la dérivation, on a déjà :

$$\forall x \in [0;1[,\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

- Mais également, pour tout $x \in [0;1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k - 1 \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 \end{aligned} \qquad \text{↙ } x \neq 1$$

En dérivant f sous cette expression, on obtient, pour tout $x \in [0;1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in [0;1[,\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

2.e. En déduire que Z admet une espérance et la déterminer.

On sait que $Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Ainsi, puisque $Z(\Omega)$ est fini Z admet une espérance ; et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([Z=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([Z=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad \text{↙ question précédente, licite car } \frac{1}{2} \in [0;1[\\ &= \frac{1}{2}\frac{n\frac{1}{2^{n+1}} - (n+1)\frac{1}{2^n} + 1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= 2\left(n\frac{1}{2^{n+1}} - (n+1)\frac{1}{2^n} + 1\right) \\ &= 2 + \frac{n}{2^n} - \frac{2n+2}{2^n} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n} \end{aligned}$$

Conclusion : Z possède une espérance et $\mathbb{E}(Z) = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de pièce décrits en début d'exercice la variable aléatoire Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire successivement et avec remise k balles dans l'urne U_k.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de l'expérience.
Si la variable aléatoire Z a pris la valeur 0, alors on considère qu'aucun tirage de boule n'est effectué et que X prend la valeur 0.

3. Justifier soigneusement que $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

Raisonnons pas double inclusion.

⊂ Puisque X prend la valeur du nombre de balles blanches obtenues et que les urnes contiennent entre 0 et n balles blanches, on a $X(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.

⊃ Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Démontrons que $[X=k] \neq \varnothing$.

♣ Méthode !

Le résultat étant donné, il est bien évidemment possible de procéder par récurrence… À faire pour s'entraîner ! Sinon, la méthode proposée dans QUESTION CLASSIQUE 2 ou dans EXERCICE 15 DU LIVRE.

♥ Astuce du chef ♥

Comme précédemment, deux façons de calculer $\sum_{k=1}^{n} x^k$… on préfère celle façon ici, qui rend le calcul de la dérivée plus rapide.

Remarque

$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z) = 2$: on retrouve l'espérance d'une VA suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$… C'est cohérent !

♣ Méthode !

Montrons :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ k \in X(\Omega)$$

Pour montrer que $k \in X(\Omega)$, il faut montrer l'existence de $\omega \in \Omega$ telle que $k = X(\omega)$.
Autrement dit, il faut trouver une issue réalisant l'évènement $[X = k]$.

* Si $k = 0$:
  L'issue consistant à :
  × n'obtenir que des FACE lors des n premiers lancers,
  × ne piocher aucune boule dans l'urne U_0,
  réalise l'évènement $[X = 0]$. Ainsi $[X = 0] \neq \varnothing$.
* Si $k \neq 0$:
  L'issue consistant à :
  × obtenir le premier PILE au k-ème lancer puis que des FACE,
  × piocher donc k boules dans l'urne U_k et y piocher k boules blanches puis $n - k$ noires,
  réalise l'évènement $[X = k]$. Ainsi $[X = k] \neq \varnothing$.

D'où :

$$[\![0; n]\!] \subset X(\Omega)$$

Conclusion : $X(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

Important !
Il ne faut pas oublier de traiter le cas $k = 0$... Et, dans cette expérience, il n'y a pas de choix d'urne qui permette de piocher, pour tout k, k boules blanches.

4. 4.a. Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $i \in [\![1; n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i])$.
Soit $i \in [\![0; n]\!]$. Supposons l'évènement $[Z = 0]$ réalisé. Autrement dit, on a obtenu que des FACE aux lancers de pièce et, dans ce cas, l'énoncé indique que X prend la valeur 0.

Conclusion : pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on a : $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \in [\![1; n]\!] \end{cases}$.

4.b. Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $i \in [\![0; n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i])$.
Soit $i \in [\![0; n]\!]$. Supposons l'évènement $[Z = n]$ réalisé. Dans ce cas, on pioche n balles dans l'urne U_n, qui n'est composée que de balles blanches. X prendra donc nécessairement la valeur n.

Conclusion : pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on a : $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{si } i \in [\![0; n-1]\!] \end{cases}$.

4.c. Démontrer que, pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } i \in [\![0; k]\!] \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Soit $i \in [\![0; n]\!]$. Supposons l'évènement $[Z = k]$ réalisé. Dans ce cas, on pioche k balles dans l'urne U_k qui contient k balles blanches sur n balles au total.

✓ Dans ces conditions, cette partie de l'expérience consiste alors en k répétitions indépendantes (tirages avec remise sans changement de composition de l'urne) de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir une balle blanche" est de probabilité $\frac{k}{n}$ (par équiprobabilité du choix de balle dans l'urne).
✓ X compte le nombre de succès ainsi obtenus.

Par conséquent, la loi conditionnelle de X sachant l'évènement $[Z = k]$ est la loi $\mathscr{B}\left(k; \frac{k}{n}\right)$.

Remarques
• On détaille bien cette partie, d'autant plus que le résultat est donné.
• On pourrait distinguer les cas $i > k$ et $i \in [\![0; k]\!]$, mais ce n'est pas nécessaire.

Conclusion : pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on a :
$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } i \in [\![0; k]\!] \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$.

5. En utilisant la fonction créée en question 1., écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simul_X(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
On remarque que les trois cas précédents peuvent se regrouper...

```
def simul_X(n):
    k=simul_Z(n)
    X=rd.binomial(k,k/n)
    return X
```

6. 6.a. Démontrer que $\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $([Z = k])_{k \in [\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0]) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = 0]) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = 0]) \end{aligned}$$

✘ Attention !
Il faut indexer correctement le SCE !
La famille $([Z = k])_{k \in [\![1;n-1]\!]}$ n'est pas un SCE.

↳ $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\mathbb{P}([Z = k]) \neq 0$

✘ Attention !
Il y a 3 cas pour les valeurs de $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = 0])$...

$$= \mathbb{P}([Z=0])\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=0]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=0]) + \mathbb{P}([Z=n])\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=0])$$

↙ questions 2.b.,4.a., 4.b. et 4.c.

$$= \frac{1}{2^n} \times 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{0} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-0} + \frac{1}{2^n} \times 0$$

$$= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^k$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$.

6.b. Démontrer que $\mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{2^n}$.

$[X=n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n boules blanches

si, et seulement si, on a obtenu le premier PILE au lancer n et on a ensuite tiré n boules blanches

si, et seulement si, on a obtenu le premier PILE au lancer n (car on tire alors nécessairement n blanches ensuite)

D'où :

$$[X=n] = [Z=n]$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=n]) = \mathbb{P}([Z=n]) = \frac{1}{2^n}$.

Ou alors...

D'après la formule des probabilités totales, avec $([Z=k])_{k\in[\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\mathbb{P}([X=n]) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k]\cap[X=n])$$

↙ $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([Z=k]) \neq 0$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=n])$$

✘ Attention ! Il y a 3 cas pour les valeurs de $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=n])$...

$$= \mathbb{P}([Z=0])\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=n]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=n]) + \mathbb{P}([Z=n])\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=n])$$

↙ questions 2.b.,4.a., 4.b. et 4.c.

$$= \frac{1}{2^n} \times 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \times 0 + \frac{1}{2^n} \times 1$$

$$= \frac{1}{2^n}$$

6.c. Exprimer, pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([X=i])$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

Soit $i \in [\![1;n-1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([Z=k])_{k\in[\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\mathbb{P}([X=i]) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k]\cap[X=i])$$

↙ $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([Z=k]) \neq 0$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i])$$

✘ Attention ! Il y a 4 cas pour les valeurs de $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i])$...

$$= \mathbb{P}([Z=0])\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) + \mathbb{P}([Z=n])\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=i])$$

↙ questions 2.b.,4.a., 4.b. et 4.c. car $i<n$ et si $k<i$, $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) = 0$...

$$= \frac{1}{2^n} \times 0 + \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \times \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} + \frac{1}{2^n} \times 0$$

$$= \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=i]) = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.

7. Vérifier, à partir des expressions trouvées à la question précédente, que $\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) = 1$.

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) = \mathbb{P}([X=0]) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}([X=i]) + \mathbb{P}([X=n])$$

↙ questions 6.

$$= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$$
$$= \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} = \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n-1} \frac{1}{2^k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right)$$ ↙ formule du binôme de Newton
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}\left(1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$$ ↙ $\frac{1}{2} \neq 1$
$$= \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$$
$$= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$$

Réflexe !
Si on manque d'inspiration pour calculer une somme double (et surtout si l'on ne sait pas calculer celle de l'intérieur…), alors on intervertit les deux sommes !

En reprenant le calcul précédent, on obtient finalement :

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) = \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$= 1$$

8. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}$. En quelques lignes, proposer une méthode qui permettrait de calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}$.

- On sait que $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Ainsi $X(\Omega)$ est fini, donc X admet une espérance ; et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} i\mathbb{P}([X=i])$$ ↙ comme précédemment
$$= \sum_{i=0}^{n} i\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i])\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i])$$ ↙ question 4.c.
$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$$ ↙ on reconnaît l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}\left(k;\frac{k}{n}\right)$
$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\frac{k^2}{n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\frac{k^2}{n}$$ ↙ question 2.b.
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}$$

- Pour calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}$, on peut :
  - reprendre ce qui a été fait en question 2.d.…

* on a donc : $\forall x \in [0;1[,\ \sum_{k=1}^{n} kx^k = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$

* on pose $g : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} kx^k$ et :

  × on a alors :

  $$\forall x \in [0;1[,\ g'(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$$

  × on dérive g sous sa forme de quotient...

  Puis, en multipliant par x, on obtient une expression de $\sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$ valable pour tout $x \in [0;1[$.

* ne reste qu'à l'évaluer en $\dfrac{1}{2}$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★