Devoir surveillé 2

Lundi 12 octobre 2026 – 2h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques consignes :

- **prendre la copie de sorte que la marge se situe à droite de chaque page et l'ouverture dans le sens habituel,**
- **laisser la première page de la copie vierge pour les appréciations,**
- **numéroter et ranger toutes les pages de la copie dans l'ordre de lecture,**
- **mettre en évidence les résultats finaux (souligner ou encadrer),**
- **présenter les questions d'un même exercice dans l'ordre du sujet,**
- **débuter chaque nouvel exercice sur une nouvelle page.**

Pour toutes les questions `Python` du sujet, on supposera importés les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"*Aucune violence n'a jamais ajouté à la grandeur des hommes.*"
Jean Guéhenno

Exercice 1

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x tf(t)dt + x^2 \qquad (\star)$$

1. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$.

   1.a. Calculer $f(0)$.

   1.b. Démontrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer, pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.

   On note (E_1) l'équation différentielle $y' - xy = 2x$ et (E_2) l'équation différentielle $y' - xy = 0$.
   Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

   1.c. Soit $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que y est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction $z : x \longmapsto y(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est constante sur $\mathbb{R}$.

   1.d. Donner alors l'ensemble des solutions de (E_2).

   1.e. Déterminer une solution constante de (E_1), notée u.

   1.f. Soit $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Établir l'équivalence : y est solution de (E_1) si, et seulement si, $y - u$ est solution de (E_2).

   1.g. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 2$$

2. Vérifier que la fonction trouvée en question 1.g. satisfait la relation $(\star)$.
3. Conclure quant à l'objectif de l'exercice.

Exercice 2

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée (donnant PILE avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec la même probabilité), les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si aucun PILE n'est obtenu sur ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend la valeur du rang du premier PILE obtenu.
Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, on note P_j l'évènement "obtenir PILE au j-ième lancer" et $F_j = \overline{P_j}$.

1. Écrire une fonction **`Python`** telle que l'exécution de **`simul_Z(n)`** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z.
2. 2.a. Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

   2.b. Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}\big([Z = k]\big)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geqslant 1$.

   2.c. Vérifier par le calcul que $\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}\big([Z = k]\big) = 1$.

   2.d. Démontrer : $\forall x \in [0; 1[,\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

   2.e. En déduire que Z admet une espérance et la déterminer.

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de pièce décrits en début d'exercice la variable aléatoire Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire successivement et avec remise k balles dans l'urne U_k.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de l'expérience.
Si la variable aléatoire Z a pris la valeur 0, alors on considère qu'aucun tirage de boule n'est effectué et que X prend la valeur 0.

3. Justifier soigneusement que $X(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
4. 4.a. Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $i \in [\![1; n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}\big([X = i]\big)$.

   4.b. Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $i \in [\![0; n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}\big([X = i]\big)$.

   4.c. Démontrer que, pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}\big([X = i]\big) = \begin{cases} \binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } i \in [\![0; k]\!] \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

5. En utilisant la fonction créée en question 1., écrire une fonction **`Python`** telle que l'exécution de **`simul_X(n)`** renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
6. 6.a. Démontrer que $\mathbb{P}\big([X = 0]\big) = \dfrac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k$.

   6.b. Démontrer que $\mathbb{P}\big([X = n]\big) = \dfrac{1}{2^n}$.

   6.c. Exprimer, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}\big([X = i]\big)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

7. Vérifier, à partir des expressions trouvées à la question précédente, que $\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big([X = i]\big) = 1$.
8. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{2^k}$. En quelques lignes, proposer une méthode qui permettrait de calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{2^k}$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★