Concours blanc - Épreuve 1

Samedi 15 novembre 2025 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir.

✘ Attention !
Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés.

Exercice 1 – Fait maison

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$.

On considère enfin l'application f définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe le vecteur $f(X)$ défini par :

$$f(X) = X - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) U$$

1. **Étude d'un cas particulier.**

   On prend ici $n = 3$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   1.a. Vérifier que :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ -x-z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (x+y+z)U \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y-z \\ -x-z \\ x+y+2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

✓ Rigueur !

Si on choisit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on ne doit pas voir $\sum_{i=1}^{3} x_i$...

Conclusion : $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ -x-z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$.

   1.b. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donner sa matrice canoniquement associée notée A.

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Conclusion : puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on en déduit que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A est sa matrice canoniquement associée.

   1.c. Calculer A^2 puis en déduire que $f \circ f = f$.

- On obtient immédiatement :

$$A^2 = A$$

- Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ f(X) &= f\big(f(X)\big) \\ &= f(AX) && \text{question précédente} \\ &= AAX \\ &= A^2X \\ &= AX && \text{point précédent} \\ &= f(X) && \text{question précédente} \end{aligned}$$

Remarque

C'est un résultat qui sera dans le cours après le chapitre sur les représentations matricielles des applications linéaires : ce n'était pas encore le cas !

On a établi :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f \circ f(X) = f(X)$$

Conclusion : $f \circ f = f$.

☞ Pour info...

Un endomorphisme f tel que $f \circ f = f$ est un **projecteur.**

1.d. Déterminer une base de $\ker(f)$ constituée d'un unique vecteur dont la première composante est égale à 1.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) & \iff & f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & & & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & & - & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & & - & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & & - & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & & & = & z \\ & - & y & = & z \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{array}\right. \\
& \iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\ker(f) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}(U)
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (U) est une famille de $\ker(f)$ qui est :

✓ génératrice de $\ker(f)$,

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille (U) est une base de $\ker(f)$.

♣ Méthode !

Bien évidemment que l'on commence par échanger L_2 et L_1 pour ensuite procéder comme on a l'habitude de faire !

Remarque

Il faut s'habituer à ce que les vecteurs demandés par l'énoncé ne soient pas ceux trouvés naturellement lors de la résolution, on adapte donc en disant qu'un vecteur et tous ses multiples non nuls engendrent le même espace (ou en utilisant les propriétés 3 du chapitre 1.).

1.e. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis une base de $\mathrm{Im}(f)$ constituée de deux vecteurs V, W dont les dernières composantes sont égales à 1.

- Par théorème du rang :

$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \dim\left(\ker(f)\right) + \mathrm{rg}(f)$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\mathrm{rg}(f) = 2$$

- Puisque la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$C_3 = C_1 + C_2$

Remarque

On pourrait également revenir à la définition de $\mathrm{Im}(f)$:

$\mathrm{Im}(f)$

$= \left\{ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \right\}$

$= \ldots$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Posons $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, la famille (V, W) est une famille de $\mathrm{Im}(f)$ qui est :

✓ génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,

✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Remarque

Puisqu'on connaît déjà $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$ (c'est le rang de f), on pourrait également mentionner que (V, W) est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et "de bon cardinal".

Conclusion : la famille (V, W) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, où $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.f. Démontrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $aU + bV + cW = 0_{3,1}$. On a :

$$aU + bV + cW = 0_{3,1} \iff \left\{\begin{array}{rcl} a \quad - c &=& 0 \\ a - b \quad &=& 0 \\ -a + b + c &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} a \quad - c &=& 0 \\ - b + c &=& 0 \\ b \quad &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

D'où : $a = b = c = 0$. La famille (U, V, W) est ainsi :

✓ libre d'après ce qui précède ;

✓ de cardinal 3, égal à $\dim\big(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$.

Conclusion : la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. **Cas général.** On revient au cas général défini avant la question 1..

2.a. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Démontrons que f est linéaire.
  Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans ce cas :

$$aX + bY = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(aX + bY) &= aX + bY - \left(\sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i)\right) U \\ &= aX + bY - a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) U - b\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) U \\ &= a\left(X - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) U\right) + b\left(Y - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) U\right) \\ &= af(X) + bf(Y) \end{aligned}$$

Remarque

Il est aussi possible de procéder comme en question 1.a....

Donc f est une application linéaire.

- Soit ensuite $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \in \mathbb{R} \quad ; \quad U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Ainsi :

$$X - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Par conséquent :

$$f(X) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2.b. Calculer $f(U)$ puis en déduire que f n'est pas injectif.

- $$\begin{aligned} f(U) &= U - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) U \\ &= U - U \\ &= 0_{n,1} \end{aligned}$$ $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$

- On en déduit
$$U \in \ker(f)$$
Or, puisque la somme des coordonnées de U est non nulle, on a :
$$U \neq 0_{n,1}$$
Par conséquent :
$$\ker(f) \neq \{0_{n,1}\}$$

Conclusion : f n'est pas injectif.

2.c. Démontrer que $f \circ f = f$.
Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ f(X) &= f\big(f(X)\big) \\ &= f\left(X - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) U\right) \\ &= f(X) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times f(U) \\ &= f(X) \end{aligned}$$

f est linéaire

question précédente : $f(U) = 0_{n,1}$

On a ainsi établi :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f \circ f(X) = X$$

Conclusion : $f \circ f = f$.

2.d. **2.d.i.** Justifier que $\text{rg}(f) \leqslant n - 1$.
Par théorème du rang :
$$\dim\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) = \dim\big(\ker(f)\big) + \text{rg}(f)$$
Or, d'après la question **2.a.**, $\ker(f) \neq \{0_{n,1}\}$, donc $\dim\big(\ker(f)\big) \geqslant 1$.

Conclusion : $\text{rg}(f) \leqslant n - 1$.

Remarque
On pourrait également utiliser le triangle de caractérisation des isomorphismes.

Rédaction
Cette question n'est qu'une succession de réflexes de rédaction ! Il faut s'entraîner...

2.d.ii. Établir : $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \big(f(Y) = Y \iff Y \in \text{Im}(f)\big)$.
Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $f(Y) = Y$.
Dans ce cas, on a immédiatement $Y \in \text{Im}(f)$...

($\Leftarrow$) Supposons que $Y \in \text{Im}(f)$. Il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on considère ensuite, tel que $Y = f(X)$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} f(Y) &= f\big(f(X)\big) \\ &= f(X) \\ &= Y \end{aligned}$$

question **2.b.** : $f \circ f = f$

Conclusion : $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \big(f(Y) = Y \iff Y \in \text{Im}(f)\big)$.

2.d.iii. En déduire que pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, on a $E_i - E_{i+1} \in \text{Im}(f)$.
Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$.
Par définition de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice colonne $E_i - E_{i+1}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls exceptés ceux en i-ème et $(i+1)$-ième ligne qui valent respectivement 1 et -1.
Par conséquent, la somme des coordonnées de $E_i - E_{i+1}$ est nulle.
On en déduit :

$$\begin{aligned} f(E_i - E_{i+1}) &= E_i - E_{i+1} - 0 \times U \\ &= E_i - E_{i+1} \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente :
$$E_i - E_{i+1} \in Im(f)$$

Conclusion : pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, on a $E_i - E_{i+1} \in \text{Im}(f)$.

2.d.iv. Déduire des questions précédentes une base de $\mathrm{Im}(f)$.

- La famille $(E_i - E_{i+1})_{i\in[\![1;n-1]\!]}$ est une famille de matrices colonnes échelonnées ; donc elle est libre.
Et, d'après la question précédente, c'est une famille de vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$.
Par conséquent :
$$\mathrm{Card}\Big((E_i - E_{i+1})_{i\in[\![1;n-1]\!]}\Big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$
Autrement dit :
$$n-1 \leqslant \mathrm{rg}(f)$$
Mais, d'après la question **2.d.i.**, on sait que
$$\mathrm{rg}(f) \leqslant n-1$$
Conclusion : $\mathrm{rg}(f) = n-1$.
- Par conséquent, la famille $(E_i - E_{i+1})_{i\in[\![1;n-1]\!]}$ est une famille de $\mathrm{Im}(f)$ qui est :
  ✓ libre,
  ✓ de cardinal $n-1$ égal à $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

  Conclusion : la famille $(E_i - E_{i+1})_{i\in[\![1;n-1]\!]}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2.e. Déterminer une base de $\ker(f)$.
Par théorème du rang :
$$\dim\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f)$$
Or, d'après la question précédente, $\mathrm{rg}(f) = n-1$, d'où :
$$\dim\big(\ker(f)\big) = 1$$
Par conséquent, la famille (U) est une famille de $\ker(f)$ (d'après la question **2.a.**) qui est :

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul (question **2.a.**),
✓ de cardinal 1, égal à $\dim\big(\ker(f)\big)$.

Conclusion : la famille (U) est une base de $\ker(f)$.

Exercice 2 - ESC 2004 E

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}$$

1. **Étude d'une suite d'intégrales impropres.**
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

   1.a. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale I_n.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.
   - Ensuite :
     ✓ $\forall t \in \mathbb{R}^+, \ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}$; en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:
     $$1 + t^n \geqslant 1$$
     d'où par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ et puisque pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $e^{-t} \geqslant 0$, on a :
     $$\frac{e^{-t}}{1+t^n} \leqslant e^{-t}$$
     ✓ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est une intégrale exponentielle convergente (qui vaut 1).

   Conclusion : par critère de comparaison (par inégalité), l'intégrale I_n est convergente.

Remarques
- On pourrait utiliser un critère par négligeabilité en remarquant que, si $n \geqslant 1$, alors $f_n(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-t})$. Et on traiterait f_0 séparément.
- Ou encore, on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$...

   1.b. Démontrer :
   $$\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \ \forall t \in [1; +\infty[, \ f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^n}$$
   Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Soit $t \in [1; +\infty[$. On a :
   - $1 + t^n \geqslant t^n > 0$, d'où par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$:
     $$\frac{1}{1+t^n} \leqslant \frac{1}{t^n}$$
     Ainsi, puisque $e^{-t} \geqslant 0$:
     $$\frac{e^{-t}}{1+t^n} \leqslant \frac{e^{-t}}{t^n}$$
   - $t \geqslant 0$, donc $e^{-t} \leqslant 1$ et ainsi, puisque $t^n > 0$:
     $$\frac{e^{-t}}{t^n} \leqslant \frac{1}{t^n}$$

   D'où :
   $$f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^n}$$

   Conclusion : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \ \forall t \in [1; +\infty[, \ f_n(t) \leqslant \dfrac{1}{t^n}$.

   1.c. En déduire que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)dt = 0$$
   - Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. D'après le point précédent :
     $$\forall t \geqslant 1, \ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^n}$$
     D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 \leqslant +\infty$ et que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt$ convergent (car $n \geqslant 2$) :
     $$0 \leqslant \int_1^{+\infty} f_n(t)dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt$$
     Or :
     $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt = \int_1^{+\infty} t^{-n}dt$$

$$= \left[\frac{1}{-n+1} t^{-n+1}\right]_1^{t\to+\infty}$$
$$= \left[\frac{1}{(-n+1)t^{n-1}}\right]_1^{t\to+\infty}$$
$$= -\frac{1}{-n+1}$$
$$= \frac{1}{n-1}$$

Rédaction
On rappelle que cette rédaction est autorisée uniquement puisque la convergence est déjà prouvée.

- On a ainsi :
  ✓ $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt \leqslant \frac{1}{n-1}$
  ✓ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0.$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

1.d. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}dt$. En déduire :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 1-\mathrm{e}^{-1}$$

-
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}dt = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1$$
$$= -\mathrm{e}^{-1}+1$$

Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}dt = 1-\mathrm{e}^{-1}$.

- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\int_0^1 f_n(t)dt - (1-\mathrm{e}^{-1}) = \int_0^1 f_n(t)dt - \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}dt$$
linéarité de l'intégrale
$$= \int_0^1 \left(f_n(t)-\mathrm{e}^{-t}\right)dt$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^n} - \mathrm{e}^{-t}\right)dt$$
$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\frac{-t^n}{1+t^n}dt$$

Attention !
De façon générale, on ne peut pas intervertir limite et intégrale. Voir la dernière remarque de l'exercice !

Or :
* $\forall t \in [0;1],\ \mathrm{e}^{-t}\dfrac{-t^n}{1+t^n} \leqslant 0$, d'où par croissance de l'intégrale, licite car $0 \leqslant 1$:
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\frac{-t^n}{1+t^n}dt \leqslant 0$$
* pour tout $t \in [0;1]$:
$$\frac{1}{1+t^n} \leqslant 1$$
d'où
$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^n} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$$
Et ainsi :
$$\frac{-\mathrm{e}^{-t}t^n}{1+t^n} \geqslant -t^n$$
Et donc, par croissance de l'intégrale, licite car $0 \leqslant 1$:
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\frac{-t^n}{1+t^n}dt \geqslant \int_0^1 -t^n dt$$
Or :
$$\int_0^1 -t^n dt = -\int_0^1 t^n dt$$
$$= -\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{-1}{n+1}$$

Par conséquent, on en déduit :

✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{-1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\dfrac{-t^n}{1+t^n}dt \leqslant 0$

✓ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = 0.$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\frac{-t^n}{1+t^n}dt = 0$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t)dt - (1-\mathrm{e}^{-1})\right) = 0$$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t) = 1-\mathrm{e}^{-1}.$

1.e. Conclure en déterminant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

D'après la relation de Chasles :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 f_n(t)dt + \int_1^{+\infty} f_n(t)dt$$

Remarque

Il n'est pas nécessaire de mentionner la convergence des deux intégrales, c'est nécessairement le cas, puisque I_n est convergente.

Conclusion : d'après les questions **1.b.** et **1.c.**, on obtient par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 1-\mathrm{e}^{-1}$.

2. Étude d'une fonction définie par une limite.

2.a. Pour tout réel t positif, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$ (on distinguera des cas).

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Distinguons trois cas.

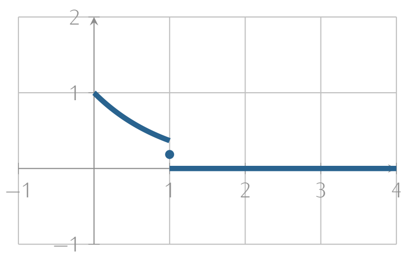
- Si $t \in [0;1[$:
  Dans ce cas
  $$\lim_{n\to+\infty} t^n = 0$$
  et ainsi :
  $$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}$$
- Si $t = 1$:
  On a
  $$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}$$
- Si $t > 1$:
  Dans ce cas
  $$\lim_{n\to+\infty} t^n = +\infty$$
  Et donc, par opérations :
  $$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$$

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in [0;1[\\ \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{2} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}.$

Dès lors, on définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ h(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$$

2.b. Représenter la courbe de h dans un repère orthonormé du plan. On donne $\mathrm{e}^{-1} \simeq 0,37$.



2.c. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)dt$.

Remarquons déjà que h est continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en 1. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)dt$ est impropre en $+\infty$ et peut-être en 1. Ensuite :

- La fonction $t \longmapsto e^{-t}$ est prolongeable par continuité sur $[0;1]$ donc l'intégrale $\int_0^1 h(t)dt$ est faussement impropre en 1, donc convergente.
- La fonction h est nulle sur $]1;+\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} h(t)dt$ est convergente et vaut 0.

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ est convergente.

2.d. A-t-on ici $\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$?

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt &= \int_0^{+\infty} h(t)dt && \text{h est nulle sur $]1;+\infty[$}\\
&= \int_0^1 h(t)dt && \text{question 2.a.}\\
&= \int_0^1 e^{-t}dt && \text{question 1.c.}\\
&= 1-e^{-1} && \text{question 1.d.}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt
\end{aligned}$$

Conclusion : dans cet exercice, on a $\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

☞ Pour info...

De façon générale, ce résultat est faux ! Un contre-exemple possible avec la fonction

$$f_n : t \longmapsto 2nte^{-nt^2}$$

Ou avec la fonction

$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } t \in [0;n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3 - Fait maison

On considère la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ définie sur $]1;+\infty[$ et on pose, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

1. Etudier les variations de la fonction f sur $]1;+\infty[$.

   La fonction $v : t \longmapsto t\ln(t)$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]1;+\infty[$; et v ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$; donc f est dérivable sur $]1;+\infty[$.
   Soit $t \in]1;+\infty[$. On a :

Important !
Il faut prendre tous les points sur cette question !

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-v'(t)}{v(t)^2} \\ &= \frac{-\left(\ln(t) + t \times \frac{1}{t}\right)}{t^2\ln(t)^2} \\ &= \frac{-\left(\ln(t)+1\right)}{t^2\ln(t)^2} \end{aligned}$$

   Or $t > 1$, donc $\ln(t) + 1 > 0$. D'où :

t	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$-$
f	$\searrow$

2. Donner une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

   On a :

$$\forall t > 1,\ f(t) = \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}$$

   Par conséquent, la fonction $t \longmapsto \ln\left(|\ln(t)|\right)$ est une primitive de f sur $]1;+\infty[$.
   Or, pour tout $t \in]1;+\infty[$, $\ln(t) > 0$...

   Conclusion : la fonction $t \longmapsto \ln\left(\ln(t)\right)$ est une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

3. 3.a. Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Démontrer :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\ln(k)}$$

♣ Méthode !
Comme dans Question classique 18...

   - Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$. Par décroissance de f sur $[k;k+1]$, licite car $[k;k+1] \subset]1;+\infty[$:

$$\forall t \in [k;k+1],\ f(k) \geqslant f(t) \geqslant f(k+1)$$

     D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $k \leqslant k+1$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[k;k+1]$:

$$\int_k^{k+1} f(k)dt \geqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \geqslant \int_k^{k+1} f(k+1)dt$$

   - On a ainsi démontré :

$$\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$$

     D'où, en sommant pour $k \in [\![2;n-1]\!]$, licite car $n \geqslant 3$:

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\ln(k)}$$

     Ce qui fournit le résultat voulu, par relation de Chasles.

   Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\ln(k)}$.

3.b. En déduire :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant S_n \leqslant \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. D'après la question précédente et la question 2. :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Avec le changement d'indice $i = k+1$ dans la somme de gauche :

$$\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i\ln(i)} \leqslant \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Autrement dit :

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) \leqslant S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$

Puis :

- de l'inégalité de droite, on obtient :

$$\ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant S_n$$

- de l'inégalité de gauche, on obtient :

$$S_n \leqslant \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

Conclusion : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant S_n \leqslant \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{2\ln(2)}$.

4. Conclure des questions précédentes sur la nature de la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ puis donner un équivalent simple de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Remarque
On retrouve alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ à partir de cet équivalent...

- On a :
  - ✓ $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ S_n \geqslant \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{n\ln(n)}$
  - ✓ par composition et opérations : $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) + \frac{1}{n\ln(n)} = +\infty$.

  Par théorème de comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

Conclusion : la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente.

- Ensuite :
  - ✓ pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $\ln\left(\ln(n)\right) > 0$ et ainsi :

$$1 - \frac{\ln\left(\ln(2)\right)}{\ln\left(\ln(n)\right)} + \frac{1}{n\ln(n)\ln\left(\ln(n)\right)} \leqslant \frac{S_n}{\ln\left(\ln(n)\right)} \leqslant 1 - \frac{\ln\left(\ln(2)\right)}{\ln\left(\ln(n)\right)} + \frac{1}{2\ln(2)\ln\left(\ln(n)\right)}$$

  - ✓ par opérations : $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln\left(\ln(2)\right)}{\ln\left(\ln(n)\right)} + \frac{1}{n\ln(n)\ln\left(\ln(n)\right)} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln\left(\ln(2)\right)}{\ln\left(\ln(n)\right)} + \frac{1}{2\ln(2)\ln\left(\ln(n)\right)} = 1$

  Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln\left(\ln(n)\right)} = 1$$

Conclusion : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\ln(n)\right)$.

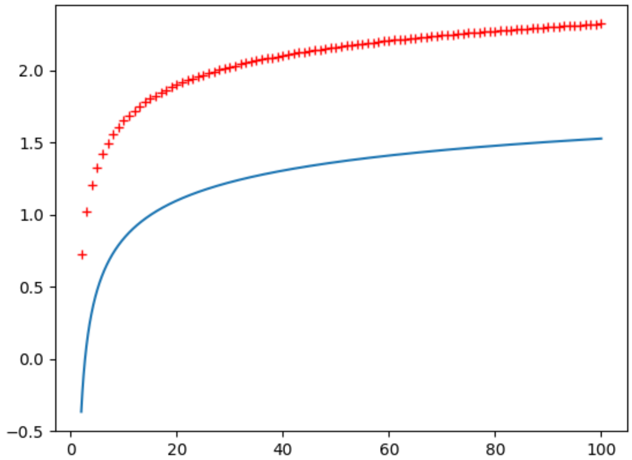
5. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que son exécution affiche sur un même graphique les termes S_2 à S_{100} ainsi que la représentation graphique de la fonction $t \longmapsto \ln\left(\ln(t)\right)$ sur $[2;100]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L=...
S=np.cumsum(L)
plt.plot(range(2,101),S,"r+")
x=...
y=...
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Voici :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L=[1/(k*np.log(k)) for k in range(2,101)]
S=np.cumsum(L)
plt.plot(range(2,101),S,"r+")
x=np.linspace(2,100,10000)
y=np.log(np.log(x))
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Pour information, on obtient le graphique suivant :



Exercice 4 - Ecricome 2015 E

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose d'une urne U_1 contenant $(N-1)$ balles blanches et une balle noire ; ainsi que d'une urne U_2 contenant N balles blanches.

I. Première expérience.

On effectue des tirages sans remise dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la balle noire. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Écrire une fonction **Python** de sorte que l'exécution de la commande **simuleX(N)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
   Voici :

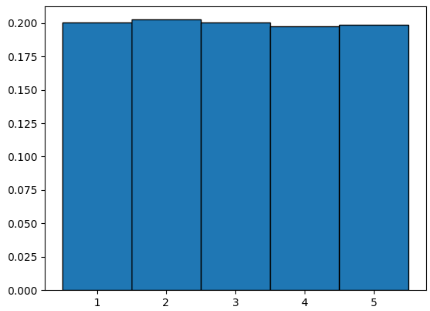
```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simuleX(N):
4     n=N
5     X=1
6     while rd.random()<(n-1)/n: #tant qu'on tire des blanches
7         n=n-1
8         X=X+1
9     return X
```

Remarque
On peut remplacer L6 par :
while rd.randint(1,n+1)!=1:
en considérant alors que la boule noire est identifiée par le numéro 1.

2. En déduire un programme permettant d'afficher l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de X dans le cas où $N=5$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

L=[simuleX(5) for k in range(10000)]
bornes=[-0.5+k for k in range(min(L),max(L)+2)]
plt.hist(L,bornes,density=True,edgecolor="k")
plt.show()
```

3. L'exécution du programme précédent permet d'obtenir :



Dans le cas où $N=5$, que peut-on conjecturer sur la loi de X ?
On sait déjà que $X(\Omega)=[\![1;5]\!]$.
Ensuite, d'après le graphique précédent, on conjecture que pour tout $k \in 1;5]\!]$, les valeurs de $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ sont toutes identiques...

Conclusion : on conjecture que X suit la loi uniforme sur $[\![1;5]\!]$.

Remarque
La loi faible des grands nombres, que nous verrons en fin d'année, permettra de justifier que la fréquence d'apparition d'un évènement (sur un grand nombre de répétitions de l'expérience) fournit une valeur approchée de la probabilité de cet évènement.

4. On revient au cas général où $N \geqslant 3$. Notons, pour tout $i \in [\![1;N]\!]$: B_i l'évènement "tirer une balle blanche au tirage i".

   4.a. Déterminer, pour tout $i \in [\![1;N-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_i}(B_{i+1})$.
   Soit $i \in [\![1;N-1]\!]$. Supposons l'évènement $B_1 \cap \ldots \cap B_i$ réalisé. On a ainsi tiré i balles blanches dans l'urne. Le prochain tirage s'effectue donc dans une urne composée de $N-i$ balles, dont 1 est noire et $N-i-1$ sont blanches.
   Par équiprobabilité du choix de la balle, on a alors :

$$\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_i}(B_{i+1})=\frac{N-i-1}{N-i}$$

Conclusion : $\forall i \in [\![1;N-1]\!],\ \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_i}(B_{i+1})=\dfrac{N-i-1}{N-i}$.

Important !
Il faut savoir rédiger et répondre avec tous les arguments à cette question ! C'est très classique...

4.b. En déduire la loi de X puis donner son espérance et sa variance.

- On a déjà $X(\Omega) = [\![1; N]\!]$.
- Soit ensuite $k \in [\![1; N]\!]$.
  - On a :

$$[X = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap \overline{B_k}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap \overline{B_k}\right) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}(\overline{B_k}) \\ &= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \ldots \times \frac{N-(k-2)-1}{N-(k-2)} \times \frac{1}{N-(k-1)} \\ &= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \ldots \times \frac{N-k+1}{N-k+2} \times \frac{1}{N-k+1} \\ &= \frac{1}{N}\end{aligned}$$

formule des probabilités composées, licite car $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}) \neq 0$

question précédente

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1; N]\!])$.

- **Conclusion :** on en déduit que X admet une espérance et une variance ; et que :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{N^2-1}{12}$$

Remarque
Avec la convention $\bigcap_{i\in\varnothing} B_i = \Omega$ (dans le cas où $k = 1$).

☞ Rappel...
Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors l'application $\mathbb{P}_A : B \longmapsto \mathbb{P}_A(B)$ est une probabilité. Par conséquent :

$$\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$$

II. Deuxième expérience

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules sans remise jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note C_1 l'évènement "on choisit l'urne U_1" et C_2 l'évènement "on choisit l'urne U_2".

5. Démontrer que pour tout $j \in [\![1; N]\!]$, $\mathbb{P}_{C_1}([Y = j]) = \dfrac{1}{N}$.

Soit $j \in [\![1; N]\!]$. Supposons l'évènement C_1 réalisé ; autrement dit, les tirages s'effectuent dans l'urne U_1.
Dans ce cas :
$[Y = j]$ est réalisé si, et seulement si, j tirages sont nécessaires pour déterminer l'urne choisie
si, et seulement si, on tire la balle noire au j-ième tirage
si, et seulement si, $[X = j]$ est réalisé

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{C_1}([Y = j]) &= \mathbb{P}([X = j]) \\ &= \frac{1}{N}\end{aligned}$$

$X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1; N]\!])$ et $j \in [\![1; N]\!]$

Conclusion : pour tout $j \in [\![1; N]\!]$, $\mathbb{P}_{C_1}([Y = j]) = \dfrac{1}{N}$.

Remarque
On identifie l'urne U_1 dès que l'on tire la balle noire... alors qu'on identifie l'urne U_2 si on ne tire que des balles blanches !

Remarque
La loi conditionnelle de Y sachant l'évènement C_1 est la loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$.

6. Déterminer, pour tout $j \in [\![1; N]\!]$, $\mathbb{P}_{C_2}([Y = j])$. *On distinguera les cas $j = N$ et $j \in [\![1; N-1]\!]$.*

Soit $j \in [\![1; N]\!]$. Supposons l'évènement C_2 réalisé ; autrement dit, les tirages s'effectuent dans l'urne U_2.
Dans ce cas, on ne peut identifier l'urne choisie que si les N tirages donnent tous une balle blanche ; et il est donc impossible d'identifier l'urne avant les N tirages. D'où :

Conclusion : $\mathbb{P}_{C_2}([Y = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![1; N-1]\!] \\ 1 & \text{si } j = N \end{cases}$.

Remarque
La loi conditionnelle de Y sachant l'évènement C_2 est la loi certaine égale à N.

7. Montrer alors que pour tout $j \in [\![1; N]\!]$:

$$\mathbb{P}([Y = j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1; N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

Soit $j \in [\![1; N]\!]$.
D'après la formule des probabilités totales, avec (C_1, C_2) comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = j]) &= \mathbb{P}(C_1 \cap [Y = j]) + \mathbb{P}(C_2 \cap [Y = j]) \\ &= \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}_{C_1}([Y = j]) + \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}_{C_2}([Y = j])\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(C_1)$ et $\mathbb{P}(C_2)$ sont non nulles

$\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) = \frac{1}{2}$ et question 5.

$$= \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{C_2}([Y=j])$$

question précédente

$$= \begin{cases} \frac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1; N-1]\!] \\ \frac{1}{2N} + \frac{1}{2} & \text{si } j = N \end{cases}$$

Conclusion : pour tout $j \in [\![1; N]\!]$, $\mathbb{P}([Y=j]) = \begin{cases} \frac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1; N-1]\!] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$.

8. Calculer l'espérance de Y.
On sait que $Y(\Omega) = [\![1 : N]\!]$. Ainsi $Y(\Omega)$ est fini, donc Y admet une espérance ; et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^{N} j\mathbb{P}([Y=j])$$

question précédente

$$= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{2N} + N\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\right)$$
$$= \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j + N\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\right)$$
$$= \frac{(N-1)N}{4N} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{N-1}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{N-1+2N+2}{4}$$
$$= \frac{3N+1}{4}$$

✘ Attention !
Attention aux formules donnant $\sum_{j=1}^{n} j$ (ou $\sum_{j=1}^{n-1} j$)...

Conclusion : Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = \frac{3N+1}{4}$.

9. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simuleY(N)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y.

```python
import numpy.random as rd

def simuleY(N):
    if rd.random()<1/2: #si urne U1
        Y=rd.randint(1,N+1)
    else:
        Y=N
    return Y
```

Important !
On demande de simuler une réalisation de la variable aléatoire Y. Par conséquent, le programme doit renvoyer une valeur possible de Y ; autrement dit ici, un entier de $[\![1; N]\!]$. En aucun cas, on demande de simuler la loi de Y ou de renvoyer une probabilité...

III. Troisième expérience

On effectue une succession infinie de tirages avec remise dans l'urne U_1. On admet que l'on obtient presque-sûrement au moins une balle noire et au moins une balle blanche. On note :

- T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une balle blanche et d'au moins une balle noire ;
- U la variable aléatoire égale au nombre de balles blanches obtenues jusqu'à l'obtention d'au moins une balle blanche et d'au moins une balle noire.

Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire, ... ; alors $T = 4$ et $U = 1$.

10. Compléter la fonction **Python** ci-dessous telle que l'exécution de la commande `simuleT(N)` simule l'expérience et renvoie une réalisation de T.

```python
import numpy.random as rd

def simuleT(N):
    blanches=0
    noires=0
    while blanches*noires==...
        ...
        if ...
            noires=noires+1
```

```
10         else:
11             blanches=blanches+1
12     return T
```

```
1  import numpy.random as rd
2
3  def simuleT(N):
4      blanches=0
5      noires=0
6      while blanches*noires==0:
7          T=blanches+noires
8          if rd.random()<1/N:
9              noires=noires+1
10         else:
11             blanches=blanches+1
12     return T
```

Remarque

La ligne 7 peut être `T=T+1` à condition d'ajouter `T=0` à l'étape d'initialisation.
De façon générale, il ne faut pas ajouter de lignes, sauf si l'énoncé mentionne que c'est possible.

11. Préciser les valeurs prises par T.

Démontrons que $T(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$.
Raisonnons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ La variable aléatoire T prend comme valeur le nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'au moins une boule de chaque couleur.
Par conséquent, T prend des valeurs entières supérieures ou égales à 2 :

$$T(\Omega) \subset [\![2; +\infty[\![$$

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in [\![2; +\infty[\![$.
L'issue assimilée à l'∞-uplet $(\underbrace{N, \dots, N}_{k-1 \text{ fois}}, B, B, \dots)$ réalise l'évènement $[Y = k]$ (où N désigne une balle noire et B une balle blanche).Par conséquent

$$[T = k] \neq \varnothing$$

Ainsi :

$$[\![2; +\infty[\![\subset T(\Omega)$$

★Subtil...★

L'expérience consiste en une infinité de tirages... Une issue étant un résultat de l'expérience, elle s'assimile bien à un ∞-uplet et pas à un k-uplet...

Conclusion : $T(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$.

12. Démontrer que pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\mathbb{P}\big([T = k]\big) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, B_i l'évènement "tirer une balle blanche au tirage i" et $N_i = \overline{B_i}$.
Soit $k \in [\![2; +\infty[\![$.
$[T = k]$ est réalisé si, et seulement si, k tirages sont nécessaires à l'obtention d'au moins une balle de chaque couleur
si, et seulement si, les tirages 1 à $k-1$ fournissent la même couleur et le tirage k l'autre

D'où :

$$[T = k] = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap N_k\right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right) \cap B_k\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([T = k]\big) &= \mathbb{P}\left(\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap N_k\right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right) \cap B_k\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap N_k\right) + \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right) \cap B_k\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(B_i)\right) \times \mathbb{P}(N_k) + \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(N_i)\right) \times \mathbb{P}(B_k) \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

incompatibilité de N_k et B_k, donc de $\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap N_k$ et $\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right) \cap B_k$

indépendance des tirages car avec remise (sans changement de composition de l'urne)

$N-1$ balles blanches et une noire ; équiprobabilité du choix de la balle

Conclusion : pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([T = k]\big) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \dfrac{N-1}{N}\left(\dfrac{1}{N}\right)^{k-1}$.

13. Montrer que T admet une espérance et la déterminer.

- On sait que $T(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$. Ainsi :

T admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{k\geqslant 2} \left| k\mathbb{P}\left([T=k]\right) \right|$ est convergente

si, et seulement si, la série $\sum_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}\left([T=k]\right)$ est convergente,

car $\forall k \in [\![2; +\infty[\![,\ k\mathbb{P}\left([T=k]\right) \geqslant 0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} k\mathbb{P}\left([X=k]\right) &= \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} - 1\right)
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{N-1}{N} \in]-1; 1[$ et $\dfrac{1}{N} \in]-1; 1[$, donc les séries $\sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$ sont des séries géométriques convergentes. Par conséquent, la série $\sum_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}\left([T=k]\right)$ est convergente.

- On en déduit que T admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{N-1}{N}\right)^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{N}(N^2-1) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{N^2}{(N-1)^2} - 1\right) \\
&= N - \frac{1}{N} + \frac{N}{N-1} - \frac{N-1}{N} \\
&= N + \frac{N}{N-1} - 1
\end{aligned}$$

Conclusion : T admet une espérance et $\mathbb{E}(T) = N + \dfrac{1}{N-1}$.

14. 14.a. Calculer $\mathbb{P}\left([U=1]\cap[T=2]\right)$.

On a :

$$[U=1]\cap[T=2] = \left(B_1 \cap N_2\right) \cup \left(N_1 \cap B_2\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([U=1]\cap[T=2]\right) &= \mathbb{P}\left(\left(B_1\cap N_2\right)\cup\left(N_1\cap B_2\right)\right) \\
&= \mathbb{P}(B_1\cap N_2) + \mathbb{P}(N_1\cap B_2) && \text{incompatibilité de } B_1 \text{ et } N_1\text{, donc de } B_1\cap N_2 \text{ et } N_1\cap B_2 \\
&= \frac{N-1}{N}\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\frac{N-1}{N} && \text{indépendance des tirages}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left([U=1]\cap[T=2]\right) = \dfrac{2(N-1)}{N^2}$.

14.b. Calculer, pour tout $k \in [\![3; +\infty[\![$, $\mathbb{P}\left([U=1]\cap[T=k]\right)$.

Soit $k \in [\![3; +\infty[\![$. Puisque $k \geqslant 3$, on a :

$$[U=1]\cap[T=k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right)\cap B_k$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([U=1]\cap[T=k]\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right)\cap B_k\right) && \text{indépendance des tirages} \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N} \\
&= \frac{N-1}{N^k}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![3; +\infty[\![$, $\mathbb{P}\left([U=1]\cap[T=k]\right) = \dfrac{N-1}{N^k}$.

Important !
La loi de T était donnée en question précédente, il faut donc prendre (tous !) les points de cette question !

Remarque
Sinon, on écrit que
$$[T=2]\subset[U=1]$$
et donc :
$$[U=1]\cap[T=2] = [T=2]$$

Pourquoi ?
Il est impossible de commencer par obtenir une balle blanche et que l'évènement $[U=1]\cap[T=k]$ soit réalisé car $k\geqslant 3$.

15. Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$.

15.a. Sans justifier, donner $\mathbb{P}\big([U=j]\cap[T=j+1]\big)$.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([U=j]\cap[T=j+1]\big) = \dfrac{(N-1)^j}{N^{j+1}}$.

15.b. Que vaut, pour tout $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$, la probabilité $\mathbb{P}\big([U=j]\cap[T=k]\big)$?

Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$ tel que $k \neq j+1$.
Distinguons deux cas :

- si $k \leqslant j$:
  Il est impossible d'obtenir j boules blanches et d'obtenir au moins une boule de chaque couleur en au plus j tirages...
  D'où :
  $$[U=j]\cap[T=k] = \varnothing$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}\big([U=j]\cap[T=k]\big) = 0$$
- si $k > j+1$:
  Il est impossible d'obtenir j boules blanches et d'obtenir au moins une boule de chaque couleur en plus de $j+1$ tirages car $j \geqslant 2$ et qu'alors $k-j \geqslant 2$: cela impliquerait donc d'obtenir au moins 2 boules de chaque couleur...
  D'où :
  $$[U=j]\cap[T=k] = \varnothing$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}\big([U=j]\cap[T=k]\big) = 0$$

Conclusion : pour tout $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$, $\mathbb{P}\big([U=j]\cap[T=k]\big) = 0$.

16. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?

D'après la question précédente :
$$\mathbb{P}\big([U=2]\cap[T=4]\big) = 0$$
Or :

- d'après la question 12. : $\mathbb{P}\big([T=4]\big) \neq 0$
- d'après la question 15.a., $\mathbb{P}\big([U=2]\cap[T=3]\big) \neq 0$, donc, puisque $[U=2]\cap[T=3] \subset [U=2]$, par croissance de $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}\big([U=2]\big) \neq 0$.

Ainsi :
$$\mathbb{P}\big([U=2]\cap[T=4]\big) \neq \mathbb{P}\big([U=2]\big)\mathbb{P}\big([T=4]\big)$$

Conclusion : les variables aléatoires U et T ne sont pas indépendantes.

17. Calculer $\mathbb{P}\big([U=1]\big)$ puis déterminer la loi de U.

Remarque
Inutile de justifier si l'énonce ne le demande pas.

- On a déjà $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([T=k]\big)_{k\geqslant 2}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \mathbb{P}\big([T=k]\cap[U=1]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([U=1]\big) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T=k]\cap[U=1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([T=2]\cap[U=1]\big) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T=k]\cap[U=1]\big) \\
&= \frac{2(N-1)}{N^2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{N-1}{N^k} \\
&= \frac{2(N-1)}{N^2} + (N-1)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^k - 1 - \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right) \\
&= \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{N-1}{1-\frac{1}{N}} - (N-1) - \frac{N-1}{N} - \frac{N-1}{N^2} \\
&= \frac{2(N-1)}{N^2} + N - (N-1) - \frac{N-1}{N} - \frac{N-1}{N^2} \\
&= \frac{2(N-1) + N^2 - N(N-1) - (N-1)}{N^2} \\
&= \frac{2N-1}{N^2}
\end{aligned}$$

questions 14.a. et 14.b.

- Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([T=k]\big)_{k\in[\![2;+\infty[\![}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \mathbb{P}\big([T=k]\cap[U=j]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([U=j]\big) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T=k]\cap[U=j]\big) && \text{question 15.b. : } \forall k \neq j+1,\ \mathbb{P}\big([T=k]\cap[U=j]\big) \neq 0 \text{ (licite car } j \geqslant 2) \\
&= \mathbb{P}\big([T=j+1]\cap[U=j]\big) && \text{question 15.a.} \\
&= \frac{(N-1)^j}{N^{j+1}}
\end{aligned}$$

Remarque

Ou alors, on écrit directement que

$$[U=j] \subset [T=j+1]$$

et donc

$$[U=j]\cap[T=j+1] = [U=j]$$

puis on utilise la question 15.a....

Conclusion : $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\mathbb{P}\big([U=1]\big) = \frac{2N-1}{N^2} \quad ; \quad \forall j \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([U=j]\big) = \frac{(N-1)^j}{N^{j+1}}$$

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★