Concours blanc - Épreuve 1

Samedi 15 novembre 2025 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- Pour toutes les questions `Python` du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$.

On considère enfin l'application f définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe le vecteur $f(X)$ défini par :

$$f(X) = X - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) U$$

1. **Étude d'un cas particulier.**

   On prend ici $n = 3$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   1.a. Vérifier que :

   $$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ -x - z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

   1.b. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donner sa matrice canoniquement associée notée A.

   1.c. Calculer A^2 puis en déduire que $f \circ f = f$.

   1.d. Déterminer une base de $\ker(f)$ constituée d'un unique vecteur dont la première composante est égale à 1.

   1.e. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis une base de $\mathrm{Im}(f)$ constituée de deux vecteurs V, W dont les dernières composantes sont égales à 1.

   1.f. Démontrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. **Cas général.** On revient au cas général défini avant la question 1..

   2.a. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   2.b. Calculer $f(U)$ puis en déduire que f n'est pas injectif.

   2.c. Démontrer que $f \circ f = f$.

   2.d.
   - 2.d.i. Justifier que $\mathrm{rg}(f) \leqslant n - 1$.
   - 2.d.ii. Établir : $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \big(f(Y) = Y \iff Y \in \mathrm{Im}(f)\big)$.
   - 2.d.iii. En déduire que pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, on a $E_i - E_{i+1} \in \mathrm{Im}(f)$.
   - 2.d.iv. Déduire des questions précédentes une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   2.e. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 2

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + t^n}$$

1. **Étude d'une suite d'intégrales impropres.**

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

   1.a. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale I_n.

   1.b. Démontrer :

   $$\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \forall t \in [1; +\infty[,\ f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^n}$$

   1.c. En déduire que :

   $$\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)dt = 0$$

   1.d. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}dt$. En déduire :

   $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 1 - \mathrm{e}^{-1}$$

   1.e. Conclure en déterminant $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.

2. **Étude d'une fonction définie par une limite.**

   2.a. Pour tout réel t positif, déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(t)$ (on distinguera des cas).

Dès lors, on définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \; h(t) = \lim_{n \to +\infty} f_n(t)$$

2.b. Représenter la courbe de h dans un repère orthonormé du plan. On donne $e^{-1} \simeq 0,37$.

2.c. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)dt$.

2.d. A-t-on ici $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$?

Exercice 3

On considère la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ définie sur $]1;+\infty[$ et on pose, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

1. Etudier les variations de la fonction f sur $]1;+\infty[$.
2. Donner une primitive de f sur $]1;+\infty[$.
3. **3.a.** Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Démontrer :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)}$$

3.b. En déduire :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![, \; \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant S_n \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

4. Conclure des questions précédentes sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ puis donner un équivalent simple de S_n lorsque $n \to +\infty$.
5. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que son exécution affiche sur un même graphique les termes S_2 à S_{100} ainsi que la représentation graphique de la fonction $t \longmapsto \ln\big(\ln(t)\big)$ sur $[2;100]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L=...
S=np.cumsum(L)
plt.plot(range(2,101),S,"r+")
x=...
y=...
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

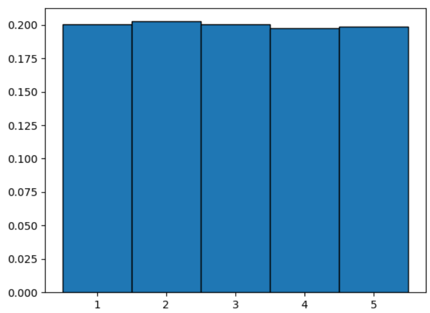
Exercice 4

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose d'une urne U_1 contenant $(N-1)$ balles blanches et une balle noire ; ainsi que d'une urne U_2 contenant N balles blanches.

I. Première expérience.

On effectue des tirages sans remise dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la balle noire. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Écrire une fonction **Python** de sorte que l'exécution de la commande `simuleX(N)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
2. En déduire un programme permettant d'afficher l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de X dans le cas où $N = 5$.
3. L'exécution du programme précédent permet d'obtenir :



Dans le cas où $N = 5$, que peut-on conjecturer sur la loi de X ?

4. On revient au cas général où $N \geqslant 3$. Notons, pour tout $i \in [\![1; N]\!]$: B_i l'évènement "tirer une balle blanche au tirage i".
   - 4.a. Déterminer, pour tout $i \in [\![1; N-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_i}(B_{i+1})$.
   - 4.b. En déduire la loi de X puis donner son espérance et sa variance.

II. Deuxième expérience

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules sans remise jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.

On note C_1 l'évènement "on choisit l'urne U_1" et C_2 l'évènement "on choisit l'urne U_2".

5. Démontrer que pour tout $j \in [\![1; N]\!]$, $\mathbb{P}_{C_1}\big([Y = j]\big) = \dfrac{1}{N}$.
6. Déterminer, pour tout $j \in [\![1; N]\!]$, $\mathbb{P}_{C_2}\big([Y = j]\big)$. *On distinguera les cas $j = N$ et $j \in [\![1; N-1]\!]$.*
7. Montrer alors que pour tout $j \in [\![1; N]\!]$:

$$\mathbb{P}\big([Y = j]\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1; N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

8. Calculer l'espérance de Y.
9. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simuleY(N)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y.

III. Troisième expérience

On effectue une succession infinie de tirages avec remise dans l'urne U_1. On admet que l'on obtient presque-sûrement au moins une balle noire et au moins une balle blanche. On note :

- T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une balle blanche et d'au moins une balle noire ;
- U la variable aléatoire égale au nombre de balles blanches obtenues jusqu'à l'obtention d'au moins une balle blanche et d'au moins une balle noire.

Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire, ... ; alors $T = 4$ et $U = 1$.

10. Compléter la fonction **Python** ci-dessous telle que l'exécution de la commande `simuleT(N)` simule l'expérience et renvoie une réalisation de T.

```python
import numpy.random as rd

def simuleT(N):
    blanches=0
    noires=0
    while blanches*noires==...
        ...
        if ...
            noires=noires+1
        else:
            blanches=blanches+1
    return T
```

11. Préciser les valeurs prises par T.
12. Démontrer que pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\mathbb{P}\big([T = k]\big) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

13. Montrer que T admet une espérance et la déterminer.
14.
   - 14.a. Calculer $\mathbb{P}\big([U = 1] \cap [T = 2]\big)$.
   - 14.b. Calculer, pour tout $k \in [\![3; +\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([U = 1] \cap [T = k]\big)$.
15. Soit $j \in [\![2; +\infty[\![$.
   - 15.a. Sans justifier, donner $\mathbb{P}\big([U = j] \cap [T = j+1]\big)$.
   - 15.b. Que vaut, pour tout $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$, la probabilité $\mathbb{P}\big([U = j] \cap [T = k]\big)$?
16. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?
17. Calculer $\mathbb{P}\big([U = 1]\big)$ puis déterminer la loi de U.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★