Concours blanc 1 - Épreuve 1

Samedi 16 novembre 2024 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,***
- ***la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"La confiance en soi ne remplace pas la compétence."
Olivier Lockert

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont trop souvent été oubliés...

Exercice 1 (Fait maison)

Question de cours. Notion de prolongement par continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

On considère la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2 - 1}$ définie sur $]0;1[$.

1. Démontrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 1. *On notera encore f le prolongement continu obtenu sur* $]0;1]$.

   On a, pour tout $t \in]0;1[$, $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{(t-1)(t+1)}$.

   Or : $\ln(t) \underset{t \to 1}{\sim} t - 1$.

   D'où :

$$f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{(t-1)(t+1)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{2}$$

   Par conséquent :

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \frac{1}{2}$$

   Conclusion : la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

2. 2.a. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ et déterminer sa valeur.

   - La fonction ln est définie et continue sur $]0;1]$ (pas en 0), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est impropre en 0 seulement.
   - Soit $A \in]0;1]$. On a :

$$\int_A^1 \ln(t)dt = \big[t\ln(t) - t\big]_A^1 = -1 - A\ln(A) + A$$

   Or, par croissance comparée :

$$\lim_{A\to 0} A\ln(A) = 0$$

   D'où :

$$\lim_{A\to 0}\int_A^1 \ln(t)dt = -1$$

   Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente et vaut -1.

Important !
Il faut connaître cette primitive de ln ; mais il faut également savoir comment la retrouver...

   2.b. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

   - La fonction f est continue sur $]0;1[$ comme quotient de deux fonctions continues sur $]0;1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;1[$.
     Puis, d'après la question **1**, la fonction f prolongée est définie et continue en 1.

     Par conséquent, f est définie et continue sur $]0;1]$ (pas en 0), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est impropre en 0 seulement.
   - On a ensuite :
     - ✓ $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$;
     - ✓ $\forall t \in]0;1]$, $f(t) \geqslant 0$, $-\ln(t) \geqslant 0$;
     - ✓ d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)dt$ est convergente.

   Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est convergente.

3. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

   On a :

✓ $\dfrac{1}{(2k+1)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4k^2}$;

✓ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(2k+1)^2} \geqslant 0$, $\dfrac{1}{4k^2} \geqslant 0$;

✓ la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente (car d'exposant 2 et $2>1$), donc la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{4k^2}$ est également convergente.

Par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ est également convergente.

4. 4.a. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)dt$ est convergente et vaut $\dfrac{-1}{(k+1)^2}$.

★ Classique ! ★
Un grand classique à traiter parfaitement sans la moindre hésitation !

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La fonction $t \longmapsto t^k \ln(t)$ est définie et continue sur $]0;1]$ (pas en 0), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)dt$ est impropre en 0 seulement.

Petite remarque
En fait, si $n \geqslant 1$, cette intégrale est faussement impropre en 0...

- Soit $A \in]0;1]$.

♣ Méthode !
Inutile de justifier la convergence au préalable puisque l'on demande la valeur...

Posons : $\left| \begin{array}{l} u : t \longmapsto \ln(t) \\ v : t \longmapsto \dfrac{t^{k+1}}{k+1} \end{array}\right.$.

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[A;1]$ et pour tout $t \in [A;1]$: $\left| \begin{array}{l} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = t^k \end{array}\right.$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_A^1 t^k \ln(t)dt &= \left[\ln(t)\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{1}{t}\frac{t^{k+1}}{k+1}dt \\ &= -\frac{\ln(A)A^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_A^1 \\ &= -\frac{\ln(A)A^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{A^{k+1}}{(k+1)^2}\end{aligned}$$

Or $k+1>0$, donc par croissance comparée :

$$\lim_{A\to 0} \ln(A)A^{k+1} = 0$$

D'où, par opérations :

$$\lim_{A\to 0} \int_A^1 t^k \ln(t)dt = \frac{-1}{(k+1)^2}$$

Petites remarques
• Pour $k=0$, on retrouve le résultat de la question 2.a.
• De façon plus générale, on peut démontrer que pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)^n dt$ est convergente et vaut $\dfrac{(-1)^n n!}{(k+1)^{n+1}}$.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)dt$ est convergente et vaut $\dfrac{-1}{(k+1)^2}$.

4.b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt$ est convergente et que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- ⋆ La fonction $t \longmapsto t^{2n+2}f(t)$ est définie et continue sur $]0;1]$ comme produit de telles fonctions (question 2.b), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt$ est éventuellement impropre en 0 seulement.
  ⋆ Puisque $2n+2>0$, on a par croissance comparée :

$$\lim_{t\to 0} t^{2n+2}f(t) = 0$$

  La fonction $t \longmapsto t^{2n+2}f(t)$ est donc prolongeable par continuité en 0.

  Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt$ est faussement impropre en 0, donc convergente.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{(2k+1)^2} = -\int_0^1 t^{2k}\ln(t)dt$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} &= \sum_{k=0}^{n} -\int_0^1 t^{2k}\ln(t)dt \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^{2k}\ln(t)dt && \text{linéarité de l'intégrale} \\
&= -\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right)\ln(t)dt && \forall t\in]0;1[,\ \sum_{k=0}^{n}(t^2)^k = \frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2} \\
&= -\int_0^1 \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}\ln(t)dt \\
&= \int_0^1 (1-t^{2n+2})f(t)dt && \text{linéarité de l'intégrale, licite car les deux intégrales en jeu sont convergentes (question 2.b et point précédent)} \\
&= \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt
\end{aligned}$$

★Subtil...★

On pourrait penser qu'il y a un problème puisque la formule utilisée n'est valable que si $t \neq 1$... Ce n'est pas le cas : ce qui se passe pour $t = 1$ n'a pas d'importance pour le calcul de l'intégrale (la fonction $t \longmapsto \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}$ est d'ailleurs prolongeable par continuité en 1, car égale à une fonction polynomiale sur $]0;1[$...).

✘ Attention !

- Utiliser la linéarité de l'intégrale pour "regrouper" deux intégrales est toujours possible (puisque l'on manipule les intégrales, elles sont convergentes).
- Utiliser la linéarité de l'intégrale pour "décomposer" en deux intégrales n'est possible que si les deux (en fait, une seule des deux suffit...) intégrales sont convergentes.

4.c. Justifier l'existence d'un réel positif M tel que pour tout $t \in [0;1]$, $|t^2 f(t)| \leqslant M$.

D'après le premier point de la question précédente, dans le cas $n = 0$, la fonction $t \longmapsto t^2 f(t)dt$ est continue sur le segment $[0;1]$.
Par composition, la fonction $t \longmapsto |t^2 f(t)|$ est donc également continue sur le segment $[0;1]$.
Par le théorème des bornes, cette fonction est donc bornée et atteint ses bornes sur $[0;1]$; en particulier elle y est majorée.

Conclusion : il existe réel positif M, que nous considérons ensuite, tel que pour tout $t \in [0;1]$, $|t^2 f(t)| \leqslant M$.

Petite remarque

On sait que "g est bornée sur I" ssi "$\exists M \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall x \in I,\ |g(x)| \leqslant M$" ; mais c'est une caractérisation, ça n'en est pas la définition. On pourrait toutefois l'utiliser pour économiser l'étape sur la fonction $t \longmapsto |t^2 f(t)|$ ici.

4.d. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt = 0$$

puis conclure que

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

- D'après la question précédente et par croissance de l'intégrale, licite car les intégrales en jeu sont convergentes et que $0 \leqslant 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt \leqslant \int_0^1 Mt^{2n}dt$$

D'où, après calcul :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt \leqslant \frac{M}{2n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{2n+1} = 0$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{2n+2}f(t)dt = 0$.

- On obtient le résultat voulu en passant à la limite dans la question 4.b et en utilisant le résultat précédent.

Conclusion : $\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 2 (Fait maison)

Question de cours. Noyau, image et rang d'une application linéaire.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi que f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A.

Les parties I et II sont indépendantes et ont chacune pour objectif de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n. La partie III étudie une suite de matrices.

Partie I. Puissances par trigonalisation

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\lambda \in \{-1; 3\}$.

On a déjà :

$$(A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible}) \iff \text{rg}(A - \lambda_3) < 3$$

Or :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & -3 \\ 4 & 3-\lambda & -4 \\ 3 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & 3-\lambda & -4 \\ 2-\lambda & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow 4L_2 - (2-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - 3L_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 10+5\lambda-\lambda^2 & -4-4\lambda \\ 0 & 7+3\lambda & -4-4\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3-\lambda \\ 0 & -4-4\lambda & 10+5\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -4-4\lambda & 7+3\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3-\lambda \\ 0 & -4-4\lambda & 10+5\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & -3-2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

> **Vous cherchez les ennuis**
> Pourquoi vouloir échanger L_1 avec L_3... ?

La matrice $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3-\lambda \\ 0 & -4-4\lambda & 10+5\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & -3-2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$ est triangulaire, donc elle est non inversible (autrement dit, de rang strictement inférieur à 3) si, et seulement si, au moins un de ses coefficients diagonaux est nul.

Par conséquent :

$$\text{rg}(A - \lambda_3) < 3 \iff \begin{cases} -4-4\lambda = 0 \\ \text{OU} \\ -3-2\lambda+\lambda^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \text{OU} \\ \lambda = -1 \\ \text{OU} \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Conclusion : la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\lambda \in \{-1; 3\}$.

2. Déterminer $\text{rg}(f + \text{id})$ puis en déduire base de $\ker(f + \text{id})$ composée d'un unique vecteur, noté u_1, dont la première composante est égale à 1.

- Puisque A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(f + \text{id}) &= \text{rg}(A + I_3) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \qquad C_3 = -C_1 \text{ (donc } C_1 + C_3 = 0_{3,1})
\end{aligned}$$

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> Remarquer la combinaison linéaire $C_1 + 0C_2 + C_3 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice $A + I_3$...
> En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B, on a :
> $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3$,
> donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$...

$$= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}\right)$$

$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc la famille $\left(\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}\right)$ est libre

$$= 2$$

☞ Rappel...
Le rang d'une famille libre est égal au cardinal de cette famille...

- D'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathrm{rg}(f+\mathrm{id}) + \dim\left(\ker(f+\mathrm{id})\right)$$

Important !
L'énoncé dit d'en déduire !

D'où :

$$\dim\left(\ker(f+\mathrm{id})\right) = 1$$

Or, on remarque que $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \ker(A+I_3)$, donc $(1,0,1) \in \ker(f+\mathrm{id})$.

Par conséquent, la famille $\left((1,0,1)\right)$ est une famille de$\ker(f+\mathrm{id})$ qui est :

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,

✓ de cardinal 1, égal à $\dim\left(\ker(f+\mathrm{id})\right)$.

> **Conclusion :** la famille (u_1) est une base de $\ker(f+\mathrm{id})$, où $u_1 = (1,0,1)$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = u_1 - u$, d'inconnue $u \in \mathbb{R}^3$. Dans la suite, on note $u_2 = (-1,1,0)$.

Notons $U_1 = \mathrm{Mat}_{bc}(u_1) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX = U_1 - X \quad &\iff \quad (A+I_3)X = U_1 \\
&\iff \quad \begin{cases} 3x+4y-3z = 1 \\ 4x+4y-4z = 0 \\ 3x+4y-3z = 1 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow 3L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \quad \begin{cases} 3x+4y-3z = 1 \\ \quad -4y = -4 \\ \quad 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} 3x = -3+3z \\ y = 1 \\ z = z \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x = -1+z \\ y = 1 \\ z = z \end{cases} \\
&\iff \quad X = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = u_1 - u$, d'inconnue $u \in \mathbb{R}^3$ est
>
> $$\{(-1,1,0) + z(1,0,1),\ z \in \mathbb{R}\}$$
>
> Remarquons alors que u_2 est solution de l'équation $f(u) = u_1 - u$...

4. Déterminer $\mathrm{rg}(f - 3\mathrm{id})$ puis en déduire une base de $\ker(f-3\mathrm{id})$ composée d'un unique vecteur, noté u_3, dont la première composante est égale à 1.

♡ Astuce du chef ! ♡
Remarquer la combinaison linéaire $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice $A - 3I_3$...
En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B, on a :
$B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3$,
donc : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$...

- Puisque A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f-3\mathrm{id}) &= \mathrm{rg}(A - 3I_3) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3\\ 4 & 0 & -4\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-4\\-7\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$C_1 + C_2 + C_3 = 0_{3,1}$, donc $C_3 = -C_1 - C_2$

$$= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}\right)$$

$\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}\right)$ est libre

$$= 2$$

☞ **Rappel...**
Le rang d'une famille libre est égal au cardinal de cette famille...

- D'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathrm{rg}(f - 3\mathrm{id}) + \dim\left(\ker(f - 3\mathrm{id})\right)$$

D'où :

$$\dim\left(\ker(f - 3\mathrm{id})\right) = 1$$

Important !
L'énoncé dit d'en déduire !

Or, on remarque que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \ker(A - 3I_3)$, donc $(1, 1, 1) \in \ker(f + \mathrm{id})$.

Par conséquent, la famille $\left((1, 1, 1)\right)$ est une famille de$\ker(f - 3\mathrm{id})$ qui est :

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,

✓ de cardinal 1, égal à $\dim\left(\ker(f - 3\mathrm{id})\right)$.

> **Conclusion :** la famille (u_3) est une base de $\ker(f - 3\mathrm{id})$, où $u_3 = (1, 1, 1)$.

5. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer alors, sans calcul mais en justifiant, la matrice représentative de f dans cette base. On notera T cette matrice.

- Montrons que la famille (u_1, u_2, u_2) est libre.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \left\{\begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ \quad\ \ b + c = 0 \\ a \quad\ \ + c = 0 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ \quad\ \ b + c = 0 \\ \quad\ \ b \quad\ = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$$

D'où : $a = b = c = 0$. Par conséquent la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille de $\mathbb{R}^3$ qui est :

✓ libre,

✓ de cardinal 3, égal à $\dim(\mathbb{R}^3)$.

> **Conclusion :** la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Ensuite :
  - ⋆ puisque $u_1 \in \ker(f + \mathrm{id})$, on a $(f + \mathrm{id})(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$; autrement dit $f(u_1) = -u_1$;
  - ⋆ $f(u_2) = u_1 - u_2$, car u_2 est solution de $f(u) = u_1 - u$;
  - ⋆ puisque $u_3 \in \ker(f - 3\mathrm{id})$, on a $(f - 3\mathrm{id})(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$; autrement dit $f(u_3) = 3u_3$.

> **Conclusion :** $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

6. On pose $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Que représente la matrice P ? Justifier alors la relation : $A = PTP^{-1}$.

- Les colonnes de P sont respectivement les matrices des coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

> **Conclusion :** P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathscr{B}$.
> La matrice P est donc inversible.

- Par formule de changement de base, on a :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(f) = P_{bc,\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{bc,\mathscr{B}}^{-1}$$

> **Conclusion :** $A = PTP^{-1}$.

7. Considérons les matrices $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $T = D + N$.

7.a. Calculer N^2 puis donner N^k, pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$.

> **Conclusion :** $N^2 = 0_3$ donc pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![,\ N^k = 0_3$.

7.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer à l'aide de la formule du binôme de Newton, l'expression de T^n en fonction de n. Commençons par remarquer que :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

Les matrices D et N commutent.

Petite remarque

Il faut le vérifier ici, puisque D n'est pas un multiple de la matrice I_3, ce n'est donc pas "évident".

Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :

- Si $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
T^n &= (D+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \text{formule du binôme de Newton, puisque } D \text{ et } N \text{ commutent} \\
&= \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \text{relation de Chasles, licite car } n \geqslant 2 \\
&= D^n + nD^{n-1}N && \forall k \in [\![2; +\infty[\![,\ N^k = 0_3
\end{aligned}$$

- Si $n \in \{0; 1\}$.
  - ⋆ Si $n = 0$:
    On a :
    $$D^0 + 0D^{0-1}N = I_3 = T^0$$
  - ⋆ Si $n = 1$:
    On a :
    $$D^1 + 1D^{1-1}N = D + N = T$$

♡ Astuce du chef ! ♡

On distingue les cas $n \geqslant 2$ et $n_i n\{0; 1\}$: ce sont les cas "imposés" par l'indice de nilpotence de N... Si on avait $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$, on distinguerait les cas $n \geqslant 3$ et $n \in \{0; 1; 2\}$.

On a donc toujours :

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N$$

Or, D étant diagonale, on a : $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Et : $D^{n-1}N = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

♡ Astuce du chef ! ♡

Autant faire les vérifications des autres cas sur l'expression la plus élémentaire "$T^n = D^n + nD^{n-1}N$", plutôt que sur l'expression finale...

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

8. Calculer P^{-1}.

Mettons en place la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis, en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ensuite, en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

En effectant $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Enfin, avec $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Petite remarque

Proposer un résultat qui est faux (car on peut vérifier en calculant le produit avec P) c'est ne pas vouloir les points !
Ne pas traiter cette question est encore pire.

Conclusion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Déduire des questions précédentes l'expression de A^n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question 6 :

$$A = PTP^{-1}$$

Montrons pas récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} PT^0P^{-1} &= PI_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= I_3 \\ &= A^0 \end{aligned}$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PT^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$.

On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} && \text{hypothèse de récurrence et car } A = PTP^{-1} \\ &= PT^n \times TP^{-1} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.

D'où, par récurrence immédiate, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$$

Conclusion : après calculs, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} n(-1)^n + 3^n & 3^n - (-1)^n & (1-n)(-1)^n - 3^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n & (-1)^n - 3^n \\ (n-1)(-1)^n + 3^n & 3^n - (-1)^n & (2-n)(-1)^n - 3^n \end{pmatrix}$$

Partie II. Puissances par division euclidienne

10. Soient P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2 et $a \in \mathbb{R}$. Établir l'équivalence :

$$\big(\exists Q \in \mathbb{R}[x] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-a)^2 Q(x)\big) \iff \big(P(a) = 0 \text{ ET } P'(a) = 0\big)$$

Il s'agit de démontrer une équivalence, raisonnons donc par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$, que l'on considère ensuite, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-a)^2 Q(x)$.

Important !

Il faut repérer que ce sens est très facile à traiter… et donc le faire !

- ⋆ Sans problème, on a alors $P(a) = 0$.
- ⋆ De plus, P et Q sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x)$$

D'où :

$$P'(a) = 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$.
Par théorème de factorisation, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$, que l'on considère ensuite, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-a)Q_1(x)$.
Mais P et Q sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = Q_1(x) + (x-a)Q_1'(x)$$

Or $P'(a) = 0$. On obtient alors : $Q_1(a) = 0$. Par conséquent, a est racine de la fonction polynomiale Q_1...
Ainsi, d'après le théorème de factorisation, il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[x]$, que l'on considère ensuite, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_1(x) = (x-a)Q_2(x)$.
D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-a)^2 Q_2(x)$$

On a ainsi établi :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[x] \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-a)^2 Q(x)$$

> **Conclusion :** $\big(\exists Q \in \mathbb{R}[x] \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-a)^2 Q(x)\big) \iff \big(P(a) = 0 \ \text{ET}\ P'(a) = 0\big)$.

11. L'exécution du programme ci-dessous affiche le résultat qui suit.

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[2,4,-3],[4,3,-4],[3,4,-4]])
A2=al.matrix_power(A,2)
A3=al.matrix_power(A,3)
print(A3-A2-5*A)
```

```
[[3 0 0]
 [0 3 0]
 [0 0 3]]
```

Donner alors un polynôme annulateur de la matrice A.
Le programme permet de calculer et d'afficher la matrice $A^3 - A^2 - 5A$... Par conséquent, on a :

$$A^3 - A^2 - 5A = 3I_3$$

> **Conclusion :** la fonction $x \longmapsto x^3 - x^2 - 5x - 3$ est annulatrice de A.

12. On considère la fonction polynomiale $P : x \longmapsto x^3 - x^2 - 5x - 3$.

12.a. Déterminer les racines de P.
On commence par remarquer que -1 est racine de P... Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x^2 - 2x - 3) \\ &= (x+1)(x+1)(x-3) \\ &= (x+1)^2(x-3) \end{aligned}$$

-1 est racine de $x \longmapsto x^2 - 2x - 3$

> **Conclusion :** les racines de P sont -1 et 3.

Petite remarque
Il n'est pas utile de poursuivre la factorisation de P pour en avoir les racines ; en revanche cette factorisation nous sera utile pour la suite afin d'utiliser la question précédente.

12.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet qu'il existe deux fonctions polynomiales Q_n et R_n telles que :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x)$
- $\deg(R_n) < \deg(P)$.

Déterminer l'expression de R_n.
Puisque $\deg(P) = 3$ et que $\deg(R_n) < \deg(P)$, on a $\deg(R_n) \leqslant 2$.
Il existe donc des réels a_n, b_n, c_n, que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n \quad (\star)$$

Ensuite :

- en prenant $x = -1$ dans $(\star)$, et comme $P(-1) = 0$, on obtient :

$$(-1)^n = a_n - b_n + c_n$$

- en prenant $x = 3$ dans $(\star)$, et comme $P(3) = 0$, on obtient :

$$3^n = 9a_n + 3b_n + c_n$$

- en dérivant $(\star)$ (les fonctions en jeu sont dérivables car polynomiales) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ nx^{n-1} = P'(x)Q_n(x) + P(x)Q_n'(x) + 2a_n x + b_n$$

  Puis en prenant $x = -1$, et comme, d'après les deux questions précédentes, $P(-1) = 0$ et $P'(-1) = 0$, on obtient :

$$n(-1)^{n-1} = -2a_n + b_n$$

Or :

$$\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \\ -2a_n + b_n = n(-1)^{n-1} \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 9L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 12b_n - 8c_n = 3^n - 9(-1)^n \\ -b_n + 2c_n = 2(-1)^n + n(-1)^{n-1} \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 12L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 12b_n - 8c_n = 3^n - 9(-1)^n \\ 16c_n = 3^n + 15(-1)^n + 12n(-1)^{n-1} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 16L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 16a_n - 16b_n = -3^n + (-1)^n - 12n(-1)^{n-1} \\ 24b_n = 3 \times 3^n - 3(-1)^n + 12n(-1)^{n-1} \\ 16c_n = 3^n + 15(-1)^n + 12n(-1)^{n-1} \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 48a_n = 3 \times 3^n - 3(-1)^n - 12n(-1)^{n-1} \\ 24b_n = 3 \times 3^n - 3(-1)^n + 12n(-1)^{n-1} \\ 16c_n = 3^n + 15(-1)^n + 12n(-1)^{n-1} \end{cases}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = \dfrac{1}{16}(3^n - (-1)^n - 4n(-1)^{n-1})x^2 + \dfrac{1}{8}(3^n - (-1)^n + 4n(-1)^{n-1})x + \dfrac{1}{16}(3^n + 15(-1)^n + 12n(-1)^{n-1})$.

12.c. Déduire des questions précédentes l'expression de A^n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que cette expression est encore valable pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En évaluant l'égalité de division euclidienne de la question précédente en A et puisque P est, d'après la question **11**, annulateur de A, on a :

$$A^n = \frac{1}{16}(3^n - (1)^n - 4n(-1)^{n-1})A^2 + \frac{1}{8}(3^n - (-1)^n + 4n(-1)^{n-1})A + \frac{1}{16}(3^n + 15(-1)^n + 12n(-1)^{n-1})I_3$$

- Pour $n = 0$:

$$\frac{1}{16}(3^n - (1)^n - 4n(-1)^{n-1})A^2 + \frac{1}{8}(3^n - (-1)^n + 4n(-1)^{n-1})A + \frac{1}{16}(3^n + 15(-1)^n + 12n(-1)^{n-1})I_3 = I_3 = A^0$$

  L'expression que l'on trouvera sera donc encore valable pour $n = 0$...

Petite remarque

Pour se rassurer, on peut vérifier rapidement que cette relation est bien valable pour $n = 1$ et $n = 2$...

Conclusion : après des calculs élémentaires mais longs, on trouve le même résultat qu'en question **9**...

Partie III. Suite de matrices

On pose $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices définies par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + Y$$

13. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **suite_X(n)** renvoie un tableau **numpy** contenant les composantes de X_n.

```
import numpy as np

def suite_X(n):
    A=np.array([[2,4,-3],[4,3,-4],[3,4,-4]])
    Y=np.array([[-1],[2],[1]])
    X=np.array([[1],[1],[0]])
    for k in range(1,n+1):
        X=np.dot(A,X)+Y
    return X
```

14. Sans calcul, justifier qu'il existe une unique matrice L de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + Y$. On admet pour la suite que $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$L = AL + Y \iff (I_3 - A)L = Y$$

Or on sait, d'après la question 1, que la matrice $A - I_3$ est inversible ; donc $I_3 - A$ également. Par conséquent, l'équation $(I_3 - A)L = Y$ possède une unique solution...

Conclusion : il existe une unique matrice L de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + Y$ (c'est la matrice $(I_3 - A)^{-1}Y$).

15. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ X_n = A^n(X_0 - L) + L$$

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  On a :

$$\begin{aligned} A^0(X_0 - L) + L &= I_3(X_0 - L) + L \\ &= X_0 \end{aligned}$$

  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $X_n = A^n(X_0 - L) + L$ et montrons $X_{n+1} = A^{n+1}(X_0 - L) + L$.
  On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n + Y \\ &= A^{n+1}(X_0 - L) + AL + Y && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1}(X_0 - L) + L && \text{d'après la question précédente : } AL + Y = L \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \ X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

Petite remarque
Il faut traiter cette question !

16. En utilisant la question 9 ou la question 12.c, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de X_n en fonction de n.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \ X_n = \begin{pmatrix} (2n-1)(-1)^n + 2 \times 3^n \\ -2(-1)^n + 2 \times 3^n + 1 \\ (2n-3)(-1)^n + 2 \times 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (Adapté de HEC 2000 E)

Question de cours. Loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$: définition, modèle, propriétés.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans l'urne et on la retire de l'urne, ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On répète cette expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

Partie I – Un résultat préliminaire

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

Important !
L'exercice commence par QCI15 : il faut prendre tous les points ! Cette question doit mettre en confiance.

Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, donc sur $[k;k+1]$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $k \leqslant k+1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

On aime...
Il est toujours agréable de voir des schémas sur la copie, cette étape en est l'occasion...

Autrement dit :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

À retenir...
On retient la méthode mise en place pour établir cet encadrement classique !

> **Conclusion :** pour tout entier naturel k non nul, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

2. Déterminer alors un équivalent simple de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

D'où, en sommant de 1 à $n-1$, licite car $n \geqslant 2$, et par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Or :

⋆ Avec le changement d'indice $i = k+1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = h_n - 1$$

⋆ et :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = h_n - \frac{1}{n}$$

D'où :

$$h_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant h_n - \frac{1}{n}$$

Puis :

⋆ De l'inégalité de gauche, on déduit :

$$h_n \leqslant \ln(n) + 1$$

⋆ De l'inégalité de droite, on déduit :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant h_n$$

On obtient ainsi :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant h_n \leqslant \ln(n) + 1$$

Et, comme $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) > 0$. D'où :

$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{h_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

On a finalement établi :

$$\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \; 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{h_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Mais :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = 1 = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right)$$

Par théorème d'encadrement, on conclut $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$.

Conclusion : $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie II – Simulation informatique

3. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de `simule_X(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X_n.

L'idée :

- on crée une liste contenant la composition de l'urne au fur et à mesure de l'expérience ;
- tant que cette liste est non vide, on choisit un entier entre 1 et le maximum des éléments de cette liste ;
- on modifie la liste : elle ne doit contenir que les éléments restants pour réitérer le processus...

Voici un programme qui convient :

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def simule_X(n):
    U=list(range(1,n+1))
    X=0
    while len(U)>0:
        k=rd.randint(1,max(U)+1)
        U=[i for i in range(1,k)]
        X=X+1
    return X
```

4. L'exécution du programme ci-dessous affiche `0.03629519543652027`.

```python
L=[]
for n in range(1,51):
    E=np.mean([simule_X(n) for k in range(10000)])
    S=sum([1/k for k in range(1,n+1)])
    L.append(abs(E-S))
print(max(L))
```

Expliquer ce que permet d'obtenir cet algorithme puis émettre une conjecture concernant $\mathbb{E}(X_n)$.

- Pour n allant de 1 à 50 :
  - ⋆ `E` prendra comme valeurs la moyenne de 100000 réalisations indépendantes de la variable aléatoire X_n ; donc E prendra comme valeurs des valeurs proches de $\mathbb{E}(X_n)$;
  - ⋆ `S` prendra les valeurs de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

  Par conséquent, la liste `L` contient, pour $n \in [\![1; 50]\!]$, des valeurs approchées de $|\mathbb{E}(X_n) - h_n|$; et le programme affiche le maximum des éléments de cette liste `L`.

Petite remarque
Nous justifierons cela davantage avec la loi faible des grands nombres...

- Puisque ce maximum est proche de 0 et que tous les nombres de `L` sont positifs, on peut penser que pour tout $n \in [\![1; 50]\!]$, $\mathbb{E}(X_n) \simeq h_n$.

Conclusion : on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Partie III – Etude de la variable aléatoire X_n

On note Z_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne.

5. Quelle est la loi de X_1 ?

Dans le cas où $n = 1$, l'urne n'est composée que de la boule numéro 1. Par conséquent, l'urne sera vidée au premier tirage.

> **Conclusion :** X_1 suit la loi certaine de paramètre 1.

6. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.

- Remarquons déjà que $X_2(\Omega) = \{1; 2\}$.
  En effet :
  - ⋆ si l'on tire la boule numéro 1 au premier tirage, alors l'urne sera vidée et donc X_2 prendra la valeur 0 ;
  - ⋆ sinon, on tire la boule numéro 2 au premier tirage et il ne restera alors qu'une seule boule, la numéro 1, au second tirage… on la piochera et l'urne sera alors vidée.
- Ensuite :

  $[X_2 = 1]$ est réalisé si, et seulement si, l'urne est vidée en 1 tirage
  si, et seulement si, les boules 1 et 2 sont extraites à l'issue du premier tirage
  si, et seulement si, on tire la boule numéro 1 lors du premier tirage

  Par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne, on a alors :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = \frac{1}{2}$$

- Puisque $X_2(\Omega) = \{1; 2\}$, on en déduit que $\mathbb{P}\big([X_2 = 2]\big) = \frac{1}{2}$.

> **Conclusion :** X_2 suit la loi uniforme sur $\{1; 2\}$; elle admet donc une espérance et une variance et $\mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{2}$, $\mathbb{V}(X_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

7. Démontrer que $X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

Procédons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ X_n prend comme valeur le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne ; donc on a déjà $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
Ensuite, puisque l'urne contient initialement n boules et qu'à chaque tirage, au moins une boule est extraite, X_n ne peut pas prendre des valeurs strictement supérieures à n.
Conclusion : $X_n(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$.

$\boxed{\supset}$ Soit $j \in [\![1; n]\!]$. Montrons que $[X_n = j] \neq \varnothing$.
Considérons l'issue consistant à :

- ⋆ piocher la boule j au premier tirage, puis extraire les boules dont le numéro est supérieur ou égal à j ;
- ⋆ piocher ensuite (dans le cas où $j \geqslant 2$) la boule $j - 1$ puis l'extraire ;
- ⋆ …
- ⋆ piocher pour finir la boule 1 et l'extraire.

Cette issue réalise l'évènement $[X_n = j]$ puisque j tirages ont été nécessaires pour vider l'urne.
On a donc établi :

$$\forall j \in [\![1; n]\!],\ [X_n = j] \neq \varnothing$$

Conclusion : $[\![1; n]\!] \subset X_n(\Omega)$.

Important !
Expliciter une issue c'est expliciter le déroulement complet de l'expérience.
Se contenter de dire "on extrait la boule 1 en j tirages" ne convient pas, ce n'est qu'une reformulation de l'évènement $[X_n = j]$.

> **Conclusion :** $X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

8. Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$.

8.a. Quelle est la loi de Z_n ?

- L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable une boule parmi n boules présentes dans l'urne.
- La variable aléatoire Z_n prend comme valeur le numéro obtenu.

> **Conclusion :** Z_n suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$.

8.b. Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $[Z_n = 1]$?

Supposons l'évènement $[Z_n = 1]$ réalisé. Autrement dit, on a tiré la boule numéro 1 au premier tirage.
Dans ce cas, toutes les boules sont extraites de l'urne et donc un seul tirage a été nécessaire pour vider l'urne. Par conséquent, la variable aléatoire X_n prendra la valeur 1.

Vocabulaire
Attention au vocabulaire !! Le nom est donné dans la question !
Attention, un évènement conditionnel (donc un évènement sachant…) n'existe pas : ça n'a aucun sens.

> **Conclusion :** la loi conditionnelle de X_n sachant $[Z_n = 1]$ est la loi certaine de paramètre 1.

8.c. Démontrer que si n est supérieur ou égal à 2, alors :

$$\forall j \in [\![2;n]\!],\ \forall k \in [\![2;n]\!],\ \mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{k-1} = j-1]\big)$$

Justifier que cette relation est encore valable quand $j = 1$.

Supposons que $n \geqslant 2$.

- Soient $j \in [\![2;n]\!]$ et $k \in [\![2;n]\!]$.
  Supposons l'évènement $[Z_n = k]$ réalisé. Autrement dit, on a tiré la boule numéro k au premier tirage et donc on a extrait les boules k à n. L'urne est ainsi composée des boules 1 à $k-1$.

  Dans ce cas, $[X_n = j]$ est réalisé si, et seulement si, $j-1$ tirages sont nécessaires pour extraire les boules restantes
  si, et seulement si, on extrait les boules 1 à $k-1$ en $j-1$ tirages
  si, et seulement si, $[X_{k-1} = j-1]$ est réalisé

  D'où :

  $$\mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{k-1} = j-1]\big)$$

  Conclusion : $\forall j \in [\![2;n]\!],\ \forall k \in [\![2;n]\!],\ \mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{k-1} = j-1]\big)$.

- Si $j = 1$, on a, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$:
  - ⋆ $\mathbb{P}\big([X_{k-1} = j-1]\big) = \mathbb{P}\big([X_{k-1} = 0]\big) = 0$, car d'après la question 7, $0 \notin X_{k-1}(\Omega)$
  - ⋆ $\mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = j]\big) = \mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = 1]\big) = 0$, car il est impossible d'extraire toutes les boules en un seul tirage en commençant par piocher une boule qui n'est pas la boule numéro 1.

  Conclusion : la relation est encore valable si $j = 1$.

✘ Attention !
On travaille sous la condition "$[Z_n = k]$" est réalisé ! Ce sont bien les probabilités données qui sont égales ; en aucun cas les évènements $[X_n = j]$ et $[X_{k-1} = j-1]$ sont égaux.

Conclusion : si $n \geqslant 2$, alors : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![2;n]\!],\ \mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{k-1} = j-1]\big)$.

9. Calculer $\mathbb{P}_{[Z_3=1]}\big([X_3 = 2]\big)$, $\mathbb{P}_{[Z_3=2]}\big([X_3 = 2]\big)$ et $\mathbb{P}_{[Z_3=3]}\big([X_3 = 2]\big)$. En déduire la loi de X_3 ainsi que son espérance et sa variance.

- D'après les questions 8.b, 8.c, 5 et 6 :

  $$\mathbb{P}_{[Z_3=1]}\big([X_3 = 2]\big) = 0 \ \ ; \ \ \mathbb{P}_{[Z_3=2]}\big([X_3 = 2]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 1]\big) = 1 \ \ ; \ \ \mathbb{P}_{[Z_3=3]}\big([X_3 = 2]\big) = \mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) = \frac{1}{2}$$

- Ensuite :
  - ⋆ on a déjà $X_3(\Omega) = [\![1;3]\!]$, d'après la question 7 ;
  - ⋆ puis, d'après la formule des probabilités totales avec $\big([Z_3 = 1], [Z_3 = 2], [Z_3 = 3]\big)$ comme système complet d'évènements, on a :

  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) &= \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}\big([Z_3 = k] \cap [X_3 = 2]\big) && \forall k \in [\![1;3]\!],\ \mathbb{P}\big([Z_3 = k]\big) \neq 0 \\
  &= \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}\big([Z_3 = k]\big)\mathbb{P}_{[Z_3=k]}\big([X_3 = 2]\big) && Z_3 \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1;3]\!]\big) \\
  &= \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3}\mathbb{P}_{[Z_3=k]}\big([X_3 = 2]\big) && \text{point précédent} \\
  &= \frac{1}{3}\left(0 + 1 + \frac{1}{2}\right) \\
  &= \frac{1}{2}
  \end{aligned}$$

  - ⋆ de la même façon qu'en question 6, on a :

  $$\mathbb{P}\big([X_3 = 1]\big) = \frac{1}{3}$$

  - ⋆ et enfin, puisque $X_3(\Omega) = [\![1;3]\!]$, il vient :

  $$\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big) = \frac{1}{6}$$

- $X_3(\Omega)$ est fini, donc X_3 admet une espérance et une variance ; de surcroît :
  - ⋆ on a :

  $$\begin{aligned}
  \mathbb{E}(X_3) &= \sum_{j=1}^{3} j\mathbb{P}\big([X_3 = j]\big) && \text{point précédent} \\
  &= 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} \\
  &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} \\
  &= \frac{11}{6}
  \end{aligned}$$

⋆ par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3^2) &= \sum_{j=1}^{3} j^2 \mathbb{P}\big([X_3 = j]\big) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{2} \\ &= \frac{23}{6}\end{aligned}$$

et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_3) &= \mathbb{E}(X_3^2) - \big(\mathbb{E}(X_3)\big)^2 \\ &= \frac{23}{6} - \frac{121}{36} \\ &= \frac{138 - 121}{36} \\ &= \frac{17}{36}\end{aligned}$$

Conclusion :

j	1	2	3
$\mathbb{P}\big([X_3 = j]\big)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{11}{6}$ et $\mathbb{V}(X_3) = \dfrac{17}{36}$.

10. 10.a. Déterminer $\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$.

- On a :

  $[X_n = 1]$ est réalisé si, et seulement si, un tirage suffit à vider l'urne
  si, et seulement si, on tire la boule 1 au premier tirage

Conclusion : par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne, on a $\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) = \dfrac{1}{n}$.

Petite remarque

Il était aussi possible de simplement dire que le raisonnement est analogue à celui mis en place en question 6.

- On a :

  $[X_n = n]$ est réalisé si, et seulement si, n tirages sont nécessaires pour vider l'urne
  si, et seulement si, à chaque tirage, une seule boule est extraite
  si, et seulement si, on tire la boule n au tirage 1, puis la boule $n-1$ au tirage 2,... puis la boule 1 au n-ième tirage

Notons, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, A_i l'évènement "obtenir la boule $n+1-i$ au tirage i". On a ainsi :

$$[X_n = n] = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)\end{aligned}$$

formule des probabilités composées, licite car $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$

Or :

⋆ par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne : $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{n}$;

⋆ pour tout $i \in [\![2; n]\!]$, supposons l'évènement $A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}$ réalisé. Autrement dit, on a extrait les boules n, puis $n-1$, ..., puis $n-(i-1)$.
Au moment d'effectuer le i-ème tirage, l'urne est alors composée des boules 1 à i. D'où, par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne :

$$\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{1}{n}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n) &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \ldots \times \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Petite remarque
On n'attend pas nécessairement un tel niveau de détails, d'autant plus que le résultat n'est pas donné.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) = \dfrac{1}{n!}$.

10.b. Si n est supérieur ou égal à 2, démontrer :

$$\forall j \in [\![2; n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big)$$

Supposons que $n \geqslant 2$. Soit $j \in [\![2; n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales avec $\big([Z_n = k]\big)_{k\in[\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

✘ Attention !
Pas de truandage ! Le SCE débute bien à $k = 1$... même si cela ne vous "arrange" pas dans vos calculs !

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([Z_n = k] \cap [X_n = j]\big) && \forall k \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) \neq 0\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big)\mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = j]\big) && Z_n \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1; n]\!]\big)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = j]\big) && \text{puisque } j \geqslant 2\text{, d'après la question 8.b, } \mathbb{P}_{[Z_n=1]}\big([X_n = j]\big) = 0\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = j]\big) && \text{question 8.c, licite car } n \geqslant 2,\ j \in [\![1; n]\!] \text{ et que } k \text{ varie de 2 à } n\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big([X_{k-1} = j-1]\big) && i = k-1\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_i = j-1]\big)
\end{aligned}$$

Conclusion : si $n \geqslant 2$, alors : $\forall j \in [\![2; n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big)$.

10.c. Si n est supérieur ou égal à 3 et $j \in [\![2; n]\!]$, calculer :

$$n\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) - (n-1)\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big)$$

En déduire, si n est supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)$$

- Supposons $n \geqslant 3$. Soit $j \in [\![2; n]\!]$.
  D'après la question précédente, licite car $n \geqslant 2$ et $n-1 \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
n\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) - (n-1)\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) &= n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big) - (n-1)\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2}\mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big) - \sum_{k=1}^{n-2}\mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big)\\
&= \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)
\end{aligned}$$

  Conclusion : si $n \geqslant 3$, alors : $\forall j \in [\![2; n]\!],\ n\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) - (n-1)\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)$.
- Supposons $n \geqslant 2$. Soit $j \in [\![1; n]\!]$.
  - ⋆ Si $n \geqslant 3$.
    - ◇ Si $j \in [\![2; n]\!]$.
      D'après le point précédent :

$$n\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) - (n-1)\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)$$

      D'où :

$$\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)$$

    - ◇ Si $j = 1$:
      On a ainsi :

$$\frac{n-1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = 1]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = 0]\big) \qquad \text{questions 7 et 10.a}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{n}\,\frac{1}{n-1} \\
&= \frac{1}{n} \\
&= \mathbb{P}\left([X_n = 1]\right)
\end{aligned}$$

question **10.a**

La relation est donc valable si $j = 1$.

Conclusion : si $n \geqslant 3$, alors

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!],\ \mathbb{P}\left([X_n = j]\right) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j]\right) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j-1]\right)$$

⋆ Si $n = 2$:

◇ Si $j = 1$:

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j]\right) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j-1]\right) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left([X_1 = 1]\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left([X_1 = 0]\right) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 \\
&= \frac{1}{2} \\
&= \mathbb{P}\left([X_2 = 1]\right)
\end{aligned}$$

question **6**

question **6**

La relation est donc valable si $j = 1$.

◇ Si $j = 2$:

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j]\right) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j-1]\right) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left([X_1 = 2]\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left([X_1 = 1]\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= \mathbb{P}\left([X_2 = 2]\right)
\end{aligned}$$

question **6**

question **6**

La relation est donc valable si $j = 2$.

Conclusion : si n est supérieur ou égal à 2, alors

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!],\ \mathbb{P}\left([X_n = j]\right) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j]\right) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j-1]\right)$$

Petite remarque

La disjonction de cas rend cette question un peu difficile : il ne faut pas en oublier… En s'y prenant de façon méthodique, la difficulté est cependant assez aisément levée.

11. **11.a.** Montrer, en utilisant la question **10.c** que si n est supérieur ou égal à 2, alors $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.

Supposons $n \geqslant 2$.

Puisque $X_n(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$, $X_n(\Omega)$ est fini et donc X_n admet une espérance. De surcroît :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}\left([X_n = j]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\left(\frac{n-1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j]\right) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j-1]\right)\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j]\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j-1]\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j\,\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j]\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}\left([X_{n-1} = k]\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j\,\mathbb{P}\left([X_{n-1} = j]\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\,\mathbb{P}\left([X_{n-1} = k]\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}\left([X_{n-1} = k]\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

question **10.c**, licite car $n \geqslant 2$

$X_{n-1}(\Omega) = [\![1\,;n-1]\!]$, donc $\mathbb{P}\left([X_{n-1} = n]\right) = 0$ et $\mathbb{P}\left([X_{n-1} = 0]\right) = 0$; et $k = j-1$ dans la seconde somme

$X_{n-1}(\Omega) = [\![1\,;n-1]\!]$

Conclusion : si n est supérieur ou égal à 2, alors $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.

11.b. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme d'une somme et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \geqslant 2$.
  D'après la question précédente, on a :
  $$\forall k \in [\![2;n]\!],\ \ \mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1}) = \frac{1}{k}$$
  D'où, en sommant de 2 à n et par télescopage :
  $$\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$
  Ainsi :
  $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$
  X_1 est constante égale à 1, donc $\mathbb{E}(X_1) = 1$
- Si $n = 1$:
  Cette relation est encore valable, car $\mathbb{E}(X_1) = 1$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; et d'après la question 2, on a alors $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

♣ Méthode !
Sinon, on calcule $\mathbb{E}(X_1)$, puis avec la question précédente : $\mathbb{E}(X_2)$, $\mathbb{E}(X_3)$, ... On conjecture puis récurrence !

12. 12.a. Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_{n-1}^2)$ et $\mathbb{E}(X_{n-1})$.

Supposons $n \geqslant 2$.

Puisque $X_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$, $X_n(\Omega)$ est fini et donc X_n admet un moment d'ordre 2. De surcroît, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &= \sum_{j=1}^{n} j^2 \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 \left(\frac{n-1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big) \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 \mathbb{P}\big([X_{n-1} = k]\big) \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 \mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \mathbb{P}\big([X_{n-1} = k]\big) \\
&\quad + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}\big([X_{n-1} = k]\big) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_{n-1} = k]\big) \\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

question 10.c, licite car $n \geqslant 2$

$X_{n-1}(\Omega) = [\![1;n-1]\!]$, donc $\mathbb{P}\big([X_{n-1} = n]\big) = 0$ et $\mathbb{P}\big([X_{n-1} = 0]\big) = 0$; et $k = j-1$ dans la seconde somme

$X_{n-1}(\Omega) = [\![1;n-1]\!]$

Conclusion : si n est supérieur ou égal à 2, alors $\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_{n-1}^2) + +\dfrac{2}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.

12.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{V}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \geqslant 2$:
  - ⋆ Puisque $X_n(\Omega)$ est fini, X_n admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens :
  $$\begin{aligned}
  \mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \big(\mathbb{E}(X_n)\big)^2 \\
  &= \mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \left(\mathbb{E}(X_{n-1} + \frac{1}{n})\right)^2 \\
  &= \mathbb{E}(X_{n-1}^2) - \big(\mathbb{E}(X_{n-1})\big)^2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\
  &= \mathbb{V}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}
  \end{aligned}$$
  questions 11.b et 12.a

  formule de Koenig-Huygens

⋆ On a ainsi établi :

$$\forall k \in [\![2;n]\!],\ \mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1}) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

D'où, en sommant de 2 à n et par télescopage :

$$\mathbb{V}(X_n) - \mathbb{V}(X_1) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{V}(X_1) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)\end{aligned}$$

X_1 est constante égale à 1, donc $\mathbb{V}(X_1) = 0$

le terme en $k = 1$ est nul

- Si $n = 1$:
  Cette relation est encore valable car $\mathbb{V}(X_1) = 0$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{V}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

12.c. Donner finalement un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{V}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Or :

- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$;
- la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente (car d'exposant 2 et $2 > 1$) ; donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\big(\ln(n)\big)$$

☞ Rappel...

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\end{array}\right\} \Longrightarrow u_n + u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

On a ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Conclusion : $\mathbb{V}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Petite remarque

C'est une question qui peut être traitée sans avoir réussi la précédente puisque le résultat est donné...

13. Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{k}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_i$$

13.a. Si n est supérieur ou égal à 2, démontrer :

$$\forall j \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_n = j]\big) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big)$$

Important !

C'est cette relation qui nous pousse à mettre en place la méthode qui suit ! Et, en voyant le résultat à démontrer, il est évident qu'il faut un lien entre S_n et S_{n-1}...

Supposons $n \geqslant 2$. Remarquons déjà que :

$$S_n = S_{n-1} + T_n$$

Soit ensuite $j \in [\![1;n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([T_n = 0], [T_n = 1]\big)$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([S_n = j]\big) &= \mathbb{P}\big([T_n = 0] \cap [S_n = j]\big) + \mathbb{P}\big([T_n = 1] \cap [S_n = j]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([T_n = 0] \cap [S_{n-1} + T_n = j]\big) + \mathbb{P}\big([T_n = 1] \cap [S_{n-1} + T_n = j]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([T_n = 0] \cap [S_{n-1} = j]\big) + \mathbb{P}\big([T_n = 1] \cap [S_{n-1} = j-1]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([T_n = 0]\big)\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) + \mathbb{P}\big([T_n = 1]\big)\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big)\end{aligned}$$

$T_1, \ldots, T_n$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, $T_1 + \ldots + T_{n-1}$ et T_n le sont également

Conclusion : si $n \geqslant 2$, alors

$$\forall j \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_n = j]\big) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big)$$

Petite remarque
On peut faire l'analogie entre cette question et QCl18...

13.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n et S_n ont la même loi.

- Puisque S_n est une somme de n variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli, on a $S_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
- Puis, $S_1 = T_1$ et T_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre 1, donc :

$$\mathbb{P}\big([S_1 = 0]\big) = 0 \quad ; \quad \mathbb{P}\big([S_1 = 1]\big) = 1$$

  Par conséquent, S_1 et X_1 ont la même loi.
- Ensuite puisque les relations de récurrence des questions 10.c et 13.a sont égales et que X_1 et S_1 ont même loi, par récurrence immédiate, on obtient :

$$\forall j \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([S_n = j]\big)$$

- Enfin, on a immédiatement $[S_n = 0] = \bigcap_{k=1}^{n} [T_k = 0]$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([S_n = 0]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[T_k = 0]\right) && \text{indépendance de } T_1, \ldots, T_n \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([T_k = 0]\big) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ T_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) && \text{le facteur quand } k = 1 \text{ est nul} \\
&= 0 && 0 \notin X_n(\Omega) \\
&= \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)
\end{aligned}$$

On a donc établi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

✓ $X_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$ et $S_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$;
✓ $\forall j \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([S_n = j]\big)$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n et S_n ont même loi.

13.c. Retrouver alors $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, X_n et S_n ont même loi ; elles ont donc même espérance et même variance. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(S_n) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) && \text{linéarité de l'espérance, licite car pour tout } k \in [\![1;n]\!],\ T_k \text{ admet une espérance} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(T_k) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ T_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{V}(S_n) \\
&= \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) && T_1, \ldots, T_n \text{ sont indépendantes et admettent une variance} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(T_k) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ T_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Petite remarque
Il faut repérer que cette question peut être traitée, car tous les résultats sont donnés. A faire pour prendre les points !

Conclusion : on retrouve les résultats des questions 11.b et 12.b.

★★★★★★★ FIN ★★★★★★★