Concours blanc 1 - Épreuve 1

Samedi 16 novembre 2024 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,***
- ***la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"La confiance en soi ne remplace pas la compétence."
Olivier Lockert

Exercice 1

Question de cours. Notion de prolongement par continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

On considère la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ définie sur $]0;1[$.

1. Démontrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 1. *On notera encore f le prolongement continu obtenu sur* $]0;1]$.
2. 2.a. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ et déterminer sa valeur.

   2.b. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.
3. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
4. 4.a. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)dt$ est convergente et vaut $\dfrac{-1}{(k+1)^2}$.

   4.b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{2n+2} f(t)dt$ est convergente et que :
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 t^{2n+2} f(t)dt$$

   4.c. Justifier l'existence d'un réel positif M tel que pour tout $t \in [0;1]$, $|t^2 f(t)| \leqslant M$.

   4.d. En déduire que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{2n+2} f(t)dt = 0$$
   puis conclure que
   $$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Exercice 2

Question de cours. Noyau, image et rang d'une application linéaire.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi que f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A.

Les parties I et II sont indépendantes et ont chacune pour objectif de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n. La partie III étudie une suite de matrices.

Partie I. Puissances par trigonalisation

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\lambda \in \{-1;3\}$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(f+\mathrm{id})$ puis en déduire base de $\ker(f+\mathrm{id})$ composée d'un unique vecteur, noté u_1, dont la première composante est égale à 1.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = u_1 - u$, d'inconnue $u \in \mathbb{R}^3$. Dans la suite, on note $u_2 = (-1, 1, 0)$.
4. Déterminer $\mathrm{rg}(f - 3\mathrm{id})$ puis en déduire une base de $\ker(f - 3\mathrm{id})$ composée d'un unique vecteur, noté u_3, dont la première composante est égale à 1.
5. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer alors, sans calcul mais en justifiant, la matrice représentative de f dans cette base. On notera T cette matrice.
6. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Que représente la matrice P ? Justifier alors la relation : $A = PTP^{-1}$.
7. Considérons les matrices $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $T = D + N$.

   7.a. Calculer N^2 puis donner N^k, pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$.

   7.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer à l'aide de la formule du binôme de Newton, l'expression de T^n en fonction de n.
8. Calculer P^{-1}.
9. Déduire des questions précédentes l'expression de A^n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II. Puissances par division euclidienne

10. Soient P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2 et $a \in \mathbb{R}$. Établir l'équivalence :

$$\left(\exists Q \in \mathbb{R}[x] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-a)^2 Q(x)\right) \iff \left(P(a) = 0 \text{ ET } P'(a) = 0\right)$$

11. L'exécution du programme ci-dessous affiche le résultat qui suit.

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[2,4,-3],[4,3,-4],[3,4,-4]])
A2=al.matrix_power(A,2)
A3=al.matrix_power(A,3)
print(A3-A2-5*A)
```

```
[[3 0 0]
 [0 3 0]
 [0 0 3]]
```

Donner alors un polynôme annulateur de la matrice A.

12. On considère la fonction polynomiale $P : x \longmapsto x^3 - x^2 - 5x - 3$.
   - 12.a. Déterminer les racines de P.
   - 12.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet qu'il existe deux fonctions polynomiales Q_n et R_n telles que :
     - $\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x)$
     - $\deg(R_n) < \deg(P)$.

     Déterminer l'expression de R_n.
   - 12.c. Déduire des questions précédentes l'expression de A^n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que cette expression est encore valable pour $n = 0$.

Partie III. Suite de matrices

On pose $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices définies par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + Y$$

13. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `suite_X(n)` renvoie un tableau **numpy** contenant les composantes de X_n.
14. Sans calcul, justifier qu'il existe une unique matrice L de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + Y$. On admet pour la suite que $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
15. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n(X_0 - L) + L$$

16. En utilisant la question 9 ou la question 12.c, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de X_n en fonction de n.

Exercice 3

Question de cours. Loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$: définition, modèle, propriétés.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans l'urne et on la retire de l'urne, ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On répète cette expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

Partie I – Un résultat préliminaire

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. Déterminer alors un équivalent simple de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II - Simulation informatique

3. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de `simule_X(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X_n.
4. L'exécution du programme ci-dessous affiche `0.03629519543652027`.

```python
L=[]
for n in range(1,51):
    E=np.mean([simule_X(n) for k in range(10000)])
    S=sum([1/k for k in range(1,n+1)])
    L.append(abs(E-S))
print(max(L))
```

Expliquer ce que permet d'obtenir cet algorithme puis émettre une conjecture concernant $\mathbb{E}(X_n)$.

Partie III - Etude de la variable aléatoire X_n

On note Z_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne.

5. Quelle est la loi de X_1 ?
6. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.
7. Démontrer que $X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
8. Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$.
   - 8.a. Quelle est la loi de Z_n ?
   - 8.b. Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $[Z_n = 1]$?
   - 8.c. Démontrer que si n est supérieur ou égal à 2, alors :

$$\forall j \in [\![2; n]\!],\ \forall k \in [\![2; n]\!],\ \mathbb{P}_{[Z_n=k]}\big([X_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([X_{k-1} = j-1]\big)$$

   Justifier que cette relation est encore valable quand $j = 1$.

9. Calculer $\mathbb{P}_{[Z_3=1]}\big([X_3 = 2]\big)$, $\mathbb{P}_{[Z_3=2]}\big([X_3 = 2]\big)$ et $\mathbb{P}_{[Z_3=3]}\big([X_3 = 2]\big)$. En déduire la loi de X_3 ainsi que son espérance et sa variance.
10. 10.a. Déterminer $\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$.
   - 10.b. Si n est supérieur ou égal à 2, démontrer :

$$\forall j \in [\![2; n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big([X_k = j-1]\big)$$

   - 10.c. Si n est supérieur ou égal à 3 et $j \in [\![2; n]\!]$, calculer :

$$n\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) - (n-1)\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big)$$

   En déduire, si n est supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j-1]\big)$$

11. 11.a. Montrer, en utilisant la question 10.c que si n est supérieur ou égal à 2, alors $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.
   - 11.b. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme d'une somme et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
12. 12.a. Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_{n-1}^2)$ et $\mathbb{E}(X_{n-1})$.
   - 12.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{V}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   - 12.c. Donner finalement un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
13. Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{k}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_i$$

   - 13.a. Si n est supérieur ou égal à 2, démontrer :

$$\forall j \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_n = j]\big) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j]\big) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\big([S_{n-1} = j-1]\big)$$

   - 13.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n et S_n ont la même loi.
   - 13.c. Retrouver alors $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★