Concours blanc - Épreuve 2

Mercredi 19 novembre 2025 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"Tout est possible à qui rêve, ose, travaille et n'abandonne jamais."
Xavier Dolan

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir.

✘ Attention !
Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés.

Exercice 1 – Inspiré de HEC 2018 E

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I Les parties II et III sont très largement indépendantes.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_i = 1]\big) = p \ \text{ et } \ \mathbb{P}\big([X_i = 0]\big) = 1 - p$$

On suppose que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, le coefficient de corrélation linéaire des variables X_i et X_j est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_i)\mathbb{V}(X_j)}} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ r & \text{si } i \neq j \end{array} \right.$$

On note enfin, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

1. 1.a. Dans les cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n et p.

   (i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

   (ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales.

   De plus, préciser la loi de S_n dans chacun des deux cas précédents.

   - Cas (i) :
     - ∗ Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On a :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_i)\mathbb{V}(X_j)}} && \text{\textit{X_i et X_j sont indépendantes}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

     - ∗ Ensuite, la variable aléatoire S_n admet une variance car c'est la somme de n variables aléatoires admettant une variance ; et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) && \text{indépendance de } X_1, ..., X_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) && \forall k \in [\![1; n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(1-p) \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

     - ∗ Enfin, on a :
       - ✓ $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$;
       - ✓ $\forall i \in [\![1; n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$;
       - ✓ $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes.

       Par conséquent :

$$S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p)$$

Remarques
- Ce résultat est cohérent avec la variance trouvée ci-dessus.
- Il était possible (et accepté) de donner la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ pour ensuite avoir sa variance.

$\boxed{\textbf{Conclusion : } r = 0,\ \mathbb{V}(S_n) = np(1-p) \text{ et } S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p).}$

   - Cas (ii) :

* Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On a :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_i)\mathbb{V}(X_j)}} \\ &= \frac{\text{Cov}(X_i, X_i)}{\mathbb{V}(X_i)} \qquad X_i = X_j \\ &= \frac{\mathbb{V}(X_i)}{\mathbb{V}(X_i)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

* Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \mathbb{V}(nX_1) \qquad \forall i \in [\![1;n]\!],\ X_i = X_1 \\ &= n^2\mathbb{V}(X_1) \qquad X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \\ &= n^2 p(1-p) \end{aligned}$$

* Enfin, puisque $S_n = nX_1$, on a :
  × $S_n(\Omega) = \{0; n\}$
  ×

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_n = n]) &= \mathbb{P}([nX_1 = n]) \qquad n \neq 0 \\ &= \mathbb{P}([X_1 = 1]) \\ &= p \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbb{P}([S_n = 0]) = p(1-p)$$

Conclusion : $r = 1$, $\mathbb{V}(S_n) = n^2 p(1-p)$ et

$$S_n(\Omega) = \{0; n\} \quad ; \quad \mathbb{P}([S_n = 0]) = p(1-p) \quad ; \quad \mathbb{P}([S_n = n]) = p$$

Remarques
- On peut retrouver la variance de S_n à partir de sa loi (en passant par le calcul de $\mathbb{E}(S_n^2)$ et la formule du Koenig-Huygens).
- Sujet qui commence tranquillement par du cours et un exemple facile. Il **faut prendre tous les points !**

1.b. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variance de la variable aléatoire S_k est donnée par la formule :

$$\mathbb{V}(S_k) = kp(1-p)(1 + (k-1)r)$$

Soit $k \in [\![1; n]\!]$. La variable aléatoire S_k admet une variance, comme somme de telles variables aléatoires ; et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_k) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i, \sum_{j=1}^{k} X_j\right) \qquad \text{linéarité à gauche de la covariance} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \text{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{k} X_j\right) \qquad \text{linéarité à droite de la covariance} \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1;k]\!]^2} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;k]\!]^2 \\ i=j}} \text{Cov}(X_i, X_j) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;k]\!]^2 \\ i\neq j}} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;k]\!]^2 \\ i\neq j}} r\sqrt{\mathbb{V}(X_i)\mathbb{V}(X_j)} \qquad \forall i \in [\![1;n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p(1-p) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;k]\!]^2 \\ i\neq j}} rp(1-p) \qquad \text{Card}\left(\{(i,j) \in [\![1,k]\!]^2 \ / \ i \neq j\}\right) = k^2 - k = k(k-1) \\ &= kp(1-p) + k(k-1)rp(1-p) \\ &= kp(1-p)\big(1 + (k-1)r\big) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\mathbb{V}(S_k) = kp(1-p)(1 + (k-1)r)$.

★ Classique ! ★
En utilisant la symétrie de la covariance, on arrive même à : $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} \text{Cov}(X_i, X_j)$.
Cette relation généralise celle au programme dans le cas d'une somme de deux variables aléatoires qui admettent une variance :

$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\text{Cov}(X, Y)$

On peut d'ailleurs démontrer celle du cas général par récurrence en utilisant celle du cas particulier de deux variables aléatoires.

Pourquoi ?
$\text{Card}\left([\![1;k]\!]^2\right) = k^2$ et $\text{Card}\left(\{(i,j) \in [\![1;k]\!]^2 \ / \ i = j\}\right) = \text{Card}\left(\{(i,i),\ i \in [\![1;k]\!]\}\right) = k$.
On peut aussi se dire que sommer sur l'ensemble $\{(i,j) \in [\![1,k]\!]^2 \ / \ i \neq j\}$ équivaut à sommer les coefficients d'un tableau carré à k lignes et k colonnes, en excluant la diagonale...

1.c. En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

D'après la question précédente, en particulier pour $k = n$:

$$\mathbb{V}(S_n) = np(1-p)\big(1+(n-1)r\big)$$

Or $\mathbb{V}(S_n) \geqslant 0$. D'où :

$$np(1-p)\big(1+(n-1)r\big) \geqslant 0$$

Ainsi, puisque $np(1-p) > 0$ (car $p \in]0;1[$ et $n \geqslant 2$) :

$$1+(n-1)r \geqslant 0$$

Et puisque $n-1>0$:

$$r \geqslant \frac{-1}{n-1}$$

Conclusion : $r \geqslant \dfrac{-1}{n-1}$.

✓ Rigueur !
La stricte positivité est nécessaire ! Si $np(1-p)$ pouvait être égal à 0, $1+(n-1)r$ pourrait être négatif tout en conservant $np(1-p)\big(1+(n-1)r\big) \geqslant 0$...

Remarque
Sinon, on isole r dans l'expression de $\mathbb{V}(S_n)$ puis on utilise le fait que $\mathbb{V}(S_n) \geqslant 0$.

2. On suppose dans cette question que n est égal à 2.

2.a. Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $\mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) = p(2p-1)$.

On a :

$$\begin{aligned}
r = -1 &\iff \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X_2)}} = -1 \\
&\iff \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{p(1-p)} = -1 \\
&\iff \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = -p(1-p) && p(1-p) \neq 0 \text{ et formule de Koenig-Huygens} \\
&\iff \mathbb{E}(X_1X_2) = p^2 - p(1-p) \\
&\iff \mathbb{P}\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big) = p\big(p-(1-p)\big) && X_1X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(q), \text{ où } q = \mathbb{P}\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big) \\
&\iff \mathbb{P}\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big) = p(2p-1)
\end{aligned}$$

Conclusion : $r = -1 \iff \mathbb{P}\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big) = p(2p-1)$.

À retenir...
Si X et Y suivent des lois de Bernoulli, alors XY aussi, et son paramètre est $\mathbb{P}\big([XY=1]\big) = \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big)$.

2.b. Que vaut alors $\mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big)$?

Supposons $r=-1$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big) &= 1 - \mathbb{P}\big(\overline{[X_1=0]\cap[X_2=0]}\big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\big([X_1=1]\cup[X_2=1]\big) && \text{loi de Morgan et } X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0;1\} \\
&= 1 - \Big(\mathbb{P}\big([X_1=1]\big) + \mathbb{P}\big([X_2=1]\big) - \mathbb{P}\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big)\Big) && \text{formule de Poincaré} \\
&= 1 - \big(2p - p(2p-1)\big) && \text{question précédente} \\
&= 1 - 2p + p(2p-1) \\
&= (1-2p)(1-p)
\end{aligned}$$

Conclusion : si $r=-1$, alors $\mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big) = (1-p)(1-2p)$.

Remarque
On pourrait également utiliser le lien entre la loi du couple (X_1, X_2) et les lois marginales.

2.c. En déduire que le coefficient r ne peut-être égal à -1 que lorsque $p = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\big([X_1+X_2=1]\big) = 1$.

D'après les deux questions précédentes :

$$r=-1 \iff \left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big) = (1-p)(1-2p) \\ \mathbb{P}\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big) = p(2p-1) \end{array}\right.$$

Or, on doit toujours avoir :

- $\mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big) \geqslant 0$, donc, puisque $1-p>0$, on doit avoir :

  $$1-2p \geqslant 0$$

  Autrement dit :

  $$p \leqslant \frac{1}{2}$$

- et $\mathbb{P}\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big) \geqslant 0$, donc, puisque $p>0$, on doit avoir :

  $$2p-1 \geqslant 0$$

  Autrement dit :

  $$p \geqslant \frac{1}{2}$$

Par conséquent :

$$r=-1 \iff \begin{cases} p=\frac{1}{2} \\ \mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big)=0 \\ \mathbb{P}\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big)=0 \end{cases}$$

$S_2 = X_1 + X_2$ et $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0;1\}$

$$\iff \begin{cases} p=\frac{1}{2} \\ \mathbb{P}\big([S_2=0]\big)=0 \\ \mathbb{P}\big([S_2=2]\big)=0 \end{cases}$$

$S_2(\Omega) \subset \{0;1;2\}$

$$\iff \begin{cases} p=\frac{1}{2} \\ \mathbb{P}\big([S_2=1]\big)=1 \end{cases}$$

Conclusion : $r=-1 \iff p=\frac{1}{2}$ ET $\mathbb{P}\big([X_1+X_2=1]\big)=1$.

Et sans utiliser ce qui précède...

D'après la question 1.b. :

$$\mathbb{V}(S_2) = 2p(1-p)(1+r)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} r=-1 &\iff \mathbb{V}(S_2)=0 \\ &\iff \big(S_2 \text{ est presque-sûrement constante égale à son espérance}\big) \\ &\iff \mathbb{P}\big([S_2=2p]\big)=1 \end{aligned}$$

Or $S_2(\Omega) \subset \{0;1;2\}$. Donc nécessairement :

$$2p \in \{0;1;2\}$$

Et comme $p \neq 0$ et $p \neq 1$, il reste :

$$2p = 1$$

Conclusion : $r=-1 \iff \left(p=\frac{1}{2} \text{ ET } \mathbb{P}\big([S_2=1]\big)=1\right)$.

À retenir...
Une variable aléatoire est presque-sûrement constante ssi elle est presque-sûrement égale à son espérance !

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $\mathbb{P}\big([S_n=1]\big)=1$.

3.a. Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.

Puisque S_n est presque-sûrement constante égale à 1, on a :

$$\mathbb{E}(S_n)=1 \quad ; \quad \mathbb{V}(S_n)=0$$

➠Réflexe !
On pense à cela dès qu'on une variable aléatoire constante ; ceci les caractérise même !

Or :

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p \\ &= np \end{aligned}$$

  linéarité de l'espérance

  $\forall i \in [\![1;n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$

  D'où :

  $$p=\frac{1}{n}$$

- D'après la question **1.b.** :

  $$\mathbb{V}(S_n) = np(1-p)\big(1+(n-1)r\big)$$

  Et, comme $np(1-p) \neq 0$, il reste :

  $$r = \frac{-1}{n-1}$$

Remarque
On peut aller plus vite sur ce calcul bien évidemment... Et sans doute se contenter de "par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n)=np$.

Conclusion : $p=\frac{1}{n}$ et $r=\frac{-1}{n-1}$.

3.b. Déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i=x_i]\right)$ est strictement positive et la calculer.

- On sait que $\mathbb{P}\big([S_n = 1]\big) = 1$.

  Ainsi, les seuls n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right)$ est strictement positive sont les n-uplets tels que $[S_n = 1]$ est réalisé.
  Or, puisque pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $X_i(\Omega) = \{0;1\}$, on a :

$$[S_n = 1] = \bigcup_{k=1}^{n} \left([X_k = 1] \cap \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} [X_i = 0] \right)$$

  Conclusion : les seuls n-uplets convenant sont donc $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, 1)$ (les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Remarque
Je sais, ce n'est pas du tout un exercice d'algèbre linéaire ; mais au moins, tout le monde comprend !

- Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Notons $A_k = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} [X_i = 0]$. On cherche donc la probabilité $\mathbb{P}\big([X_k = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X_k = 1] \cap A_k\big)$.

  D'après la formule des probabilités totales avec $(A_k, \overline{A_k})$ comme système complet d'évènements :

$$\mathbb{P}\big([X_k = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X_k = 1] \cap A_k\big) + \mathbb{P}\big([X_k = 1] \cap \overline{A_k}\big)$$

  Or :

$$[X_k = 1] \cap \overline{A_k} \subset [S_n > 1]$$

  D'où, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\big([X_k = 1] \cap \overline{A_k}\big) \leqslant \mathbb{P}\big([S_n > 1]\big)$$

  Mais $\mathbb{P}\big([S_n > 1]\big) = 0$. D'où :

$$\mathbb{P}\big([X_k = 1] \cap \overline{A_k}\big) = 0$$

  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_k = 1] \cap A_k\big) &= \mathbb{P}\big([X_k = 1]\big) \\
&= p \qquad \text{question 3.a.} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

  Conclusion : $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}\left([X_k = 1] \cap \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} [X_i = 0] \right) = \dfrac{1}{n}$.

Remarque
On retrouve alors le fait que $\mathbb{P}\big([S_n = 1]\big) = 1$. On aurait d'ailleurs pu utiliser ce résultat pour en déduire p, en utilisant le fait que toutes les probabilités $\mathbb{P}\big([X_k = 1] \cap A_k\big)$ sont égales à p ; donc $\mathbb{P}\big([S_n = 1]\big) = np$ (incompatibilité...).

Partie II. Lois bêta-binomiales à paramètres entiers

Soient r et v deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne contenant r boules rouges et v boules vertes, indiscernables au toucher. On effectue n tirages dans l'urne et, après tirage d'une boule, on remet la boule dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur dans l'urne.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si une boule rouge est tirée lors du tirage i ; et qui prend la valeur 0 sinon.

On pose également, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$.

Enfin, on note, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, R_i l'évènement "tirer une boule rouge au i-ème tirage" et $V_i = \overline{R_i}$.

★ Classique ! ★
Expérience assez classique d'urne de Pólya. Un cas particulier a été étudié dans **EML 2017 E - Exercice 3**.

4. Interpréter, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, les valeurs prises par la variable aléatoire S_i.

   Conclusion : pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, S_i prend comme valeur le nombre de boules rouges obtenues sur les i premiers tirages.

✘ Attention !
L'énoncé ne demande pas de déterminer $S_i(\Omega)$...

5. Écrire une fonction **Python** prenant en arguments des entiers naturels non nuls r, v ainsi qu'un entier naturel $n \geqslant 2$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire S_n.

```python
import numpy as np

def simuleS(r,v,n):
    S=0
    R=r
    V=v
    for i in range(1,n+1):
        if rd.random()<R/(R+V): #si on tire rouge
            R=R+1
            S=S+1
```

Important !
L'expérience est classique et simple. On s'entraîne sur **Python** pour être en mesure de proposer un programme qui convient !

```
        else: #si on tire verte
            V=V+1
    return S
```

6. Donner la loi de X_1 puis déterminer celle de X_2.

Remarquons déjà que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $X_i(\Omega) = \{0;1\}$, donc X_i suit une loi de Bernoulli.

Remarque
Si X suit une loi de Bernoulli, alors elle suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}([X=1])$ (qui vaut aussi $\mathbb{E}(X)$). Inutile donc de calculer $\mathbb{P}([X=0])$.

- Par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne :

$$\mathbb{P}([X_1=1]) = \frac{r}{r+v}$$

Conclusion : $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{r}{r+v}\right)$.

Réflexe !
On pense à la FPT à chaque fois que la réalisation d'un évènement "dépend" de la réalisation d'un autre... Classique donc pour des expréciences avec successions ou répétitions.

- D'après la formule des probabilités totales avec $([X_1=0],[X_1=1])$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_2=1]) &= \mathbb{P}([X_1=0]\cap[X_2=1]) + \mathbb{P}([X_1=1]\cap[X_2=1])\\ &= \mathbb{P}([X_1=0])\mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2=1]) + \mathbb{P}([X_1=1])\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2=1]) \quad \mathbb{P}([X_1=0]) \text{ et } \mathbb{P}([X_1=1]) \text{ sont non nulles}\\ &= \frac{v}{r+v}\mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2=1]) + \frac{r}{r+v}\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2=1]) \quad \text{point précédent}\end{aligned}$$

Ensuite :

* Supposons l'évènement $[X_1=0]$ réalisé. Autrement dit, on a tiré une boule verte au premier tirage. Dans ce cas, au moment du second tirage, l'urne est composée de r boules rouges et $v+1$ boules vertes ; et donc, l'évènement $[X_2=1]$ est réalisé si, et seulement si, on tire une des r boules rouge parmi les $r+v+1$ boules présentes dans l'urne.
  Ainsi, par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne :

$$\mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2=1]) = \frac{r}{r+v+1}$$

Rédaction
Il est important de savoir parfaitement rédiger cette justification de probabilité conditionnelle.

* De même, on a :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2=1]) = \frac{r+1}{r+v+1}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_2=1]) &= \frac{v}{r+v}\frac{r}{r+v+1} + \frac{r}{r+v}\frac{r+1}{r+v+1}\\ &= \frac{rv+r(r+1)}{(r+v)(r+v+1)}\\ &= \frac{r(v+r+1)}{(r+v)(r+v+1)}\\ &= \frac{r}{r+v}\end{aligned}$$

Conclusion : $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{r}{r+v}\right)$.

Important !
Bien évidemment, lorsqu'il s'agit d'une loi usuelle, on attend sa mention dans la conclusion !

7. 7.a. Soit $i \in [\![1;n-1]\!]$. Déterminer, pour tout $k \in [\![0;i]\!]$, la loi conditionnelle de X_{i+1} sachant l'évènement $[S_i=k]$.

Soit $k \in [\![0;i]\!]$.

- $X_{i+1}(\Omega) = \{0;1\}$
- Supposons l'évènement $[S_i=k]$ réalisé. Autrement dit, on a tiré k boules rouges sur les i premiers tirages. Dans ce cas, on a rajouté k boules rouges et $i-k$ boules vertes à l'urne. Le $(i+1)$-ème tirage s'effectue alors dans une urne composée de $r+v+i$ boules dont $r+k$ sont rouges.
  Ainsi, par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne :

$$\mathbb{P}_{[S_i=k]}([X_{i+1}=1]) = \frac{r+k}{r+v+i}$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![0;i]\!]$, la loi conditionnelle de X_{i+1} sachant l'évènement $[S_i=k]$ est la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{r+k}{r+v+i}$.

Important !
Bien évidemment, lorsqu'il s'agit d'une loi usuelle, on attend sa mention dans la conclusion !

7.b. En déduire :

$$\forall i \in [\![1;n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_{i+1}=1]) = \frac{\mathbb{E}(S_i)+r}{r+v+i}$$

Soit $i \in [\![1;n-1]\!]$. Puisque $S_i(\Omega) = [\![0;i]\!]$, on a, d'après la formule des probabilités totales avec $([S_i=k])_{k\in[\![0;i]\!]}$ comme système complet d'évènements :

Remarque
Inutile, ici, de justifier l'égalité $S_i(\Omega) = [\![0;i]\!]$.

$$\mathbb{P}([X_{i+1}=1]) = \sum_{k=0}^{i}\mathbb{P}([S_i=k]\cap[X_{i+1}=1])$$

$\forall k \in [\![0;i]\!],\ \mathbb{P}([S_i=k]) \neq 0$

$$= \sum_{k=0}^{i} \mathbb{P}\big([S_i = k]\big)\mathbb{P}_{[S_i=k]}\big([X_{i+1} = 1]\big)$$

question précédente, licite car k parcourt $[\![0; i]\!]$

$$= \sum_{k=0}^{i} \mathbb{P}\big([S_i = k]\big)\frac{r+k}{r+v+i}$$

$$= \frac{1}{r+v+1}\left(r\sum_{k=0}^{i} \mathbb{P}\big([S_i = k]\big) + \sum_{k=0}^{i} k\mathbb{P}\big([S_i = k]\big)\right)$$

$S_i(\Omega) = [\![0; i]\!]$ donc $\sum_{k=0}^{i} \mathbb{P}\big([S_i = k]\big) = 1$ et $\sum_{k=0}^{i} k\mathbb{P}\big([S_i = k]\big) = \mathbb{E}(S_i)$

$$= \frac{1}{r+v+1}\big(r + \mathbb{E}(S_i)\big)$$

Conclusion : $\forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \mathbb{P}\big([X_{i+1} = 1]\big) = \dfrac{\mathbb{E}(S_i) + r}{r+v+i}$.

7.c. Démontrer, par récurrence forte, que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{r}{r+v}$.

- **Initialisation.** Pour $i = 1$:
  Immédiat, d'après la question 6. : initialisation vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. Supposons que $X_1, \ldots, X_i$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{r}{r+v}$ et démontrons que X_{i+1} également.
  D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([X_{i+1} = 1]\big) = \frac{\mathbb{E}(S_i) + r}{r+v+i}$$

Or :

$$\mathbb{E}(S_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{i} X_j\right)$$

linéarité de l'espérance

$$= \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}(X_j)$$

par hypothèse de récurrence, $\forall j \in [\![1; i]\!],\ X_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{r}{r+v}\right)$

$$= \sum_{j=1}^{i} \frac{r}{r+v}$$

$$= \frac{ir}{r+v}$$

D'où :

$$\mathbb{P}\big([X_{i+1} = 1]\big) = \frac{\frac{ir}{r+v} + r}{r+v+i} = \frac{\frac{ir+r(r+v)}{r+v}}{r+v+i} = \frac{r(i+r+v)}{(r+v)(r+v+i)} = \frac{r}{r+v}$$

Et ainsi, puisque $X_{i+1}(\Omega) = \{0; 1\}$, on obtient $X_{i+1} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$: l'hérédité est établie.

★Subtil...★
Deux difficultés ici : c'est une récurrence forte (c'est rare...) et c'est une récurrence finie (c'est aussi rare).

Conclusion : $\forall i \in [\![1; n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$.

8. Calculer l'espérance de la variable aléatoire S_n.
D'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$. Ainsi S_n admet une espérance comme somme de telles variables aléatoires et, par linéarité de l'espérance, on a immédiatement :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{nr}{r+v}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{nr}{r+v}$.

9. Calculer les probabilités $\mathbb{P}\big([S_n = 0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([S_n = n]\big)$.

- On a

$$[S_n = 0] = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

D'où :

$$\mathbb{P}\big([S_n = 0]\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right)$$

formule des probabilités composées, licite car $\mathbb{P}\big(V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1}\big) \neq 0$

$$= \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{V_1\cap\ldots\cap V_{n-1}}(V_n)$$

Soit ensuite $k \in [\![1; n-1]\!]$. Supposons l'évènement $V_1 \cap \ldots \cap V_k$ réalisé. Dans ce cas, on a tiré k boules vertes lors des k premiers tirages ; et donc le $(k+1)$-ième tirage s'effectue dans une urne composée de $r+v+k$ boules dont $v+k$ sont vertes. D'où, par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne :

$$\mathbb{P}_{V_1\cap\ldots\cap V_k}(V_{k+1}) = \frac{v+k}{r+v+k}$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathbb{P}\left([S_n = 0]\right) = \frac{v}{r+v}\frac{v+1}{r+v+1}\cdots\frac{v+n-1}{r+v+n-1} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{v+k}{r+v+k}$$

Remarque
$\mathbb{P}\left([S_n = 0]\right) = \dfrac{(v+n-1)!(r+v-1)!}{(v-1)!(r+v+n-1)!}$

- De la même façon, on trouve :

$$\mathbb{P}\left([S_n = n]\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{r+k}{r+v+k}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left([S_n = 0]\right) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{v+k}{r+v+k}$ et $\mathbb{P}\left([S_n = n]\right) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{r+k}{r+v+k}$.

10. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$.

10.a. Calculer la probabilité de l'évènement $R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap V_{k+1} \cap \ldots \cap V_n$.

D'après la formule des probabilités composées, licite car $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap V_{k+1} \cap \ldots \cap V_{n-1}) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap V_{k+1} \cap \ldots \cap V_n) &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{k-1}}(R_k) \times \mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_k}(V_{k+1}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_k\cap V_{k+1}\cap\ldots\cap V_{n-1}}(V_n) \\ &= \frac{r}{r+v}\frac{r+1}{r+v+1}\cdots\frac{r+k-1}{r+v+k-1}\frac{v}{r+v+k}\cdots\frac{v+n-k-1}{r+v+n-1} \\ &= \frac{(r+k-1)!(v+n-k-1)!(r+v-1)!}{(r-1)!(v-1)!(r+v+n-1)!}\end{aligned}$$

analogue à ce qui a été fait en question précédente

Conclusion : $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap V_{k+1} \cap \ldots \cap V_n) = \dfrac{(r+k-1)!(v+n-k-1)!(r+v-1)!}{(r-1)!(v-1)!(r+v+n-1)!}$.

10.b. Combien l'évènement $[S_n = k]$ contient-il d'issues ?

L'évènement $[S_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient k boules rouges sur les n tirages effectués.

Or, il y a $\dbinom{n}{k}$ façons d'ordonner les k boules rouges obtenues parmi les n boules tirées.

Conclusion : l'évènement $[S_n = k]$ contient $\dbinom{n}{k}$ issues.

10.c. En déduire que

$$\mathbb{P}\left([S_n = k]\right) = \binom{n}{k}\frac{(r+k-1)!(v+n-k-1)!(r+v-1)!}{(r-1)!(v-1)!(r+v+n-1)!}$$

D'après la question précédente, l'évènement $[S_n = k]$ est constitué de $\dbinom{n}{k}$ issues ; et ces issues sont toutes de même probabilité.

En effet, en reprenant le calcul de la question précédente, calculer la probabilité d'obtenir une issue composée de k boules rouges et $n-k$ boules vertes revient à :

- multiplier les mêmes dénominateurs, dans le même ordre (puisqu'on ajoute toujours une boule après chaque tirage) ;
- multiplier les mêmes numérateurs, dans des ordres différents...

Par conséquent, l'évènement $[S_n = k]$ est constituée de $\dbinom{n}{k}$ issues qui sont toutes de probabilité égale à $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap V_{k+1} \cap \ldots \cap V_n)$.

Conclusion : d'après la question précédente, on obtient

$$\mathbb{P}\left([S_n = k]\right) = \binom{n}{k}\frac{(r+k-1)!(v+n-k-1)!(r+v-1)!}{(r-1)!(v-1)!(r+v+n-1)!}$$

11. 11.a. Justifier que pour toute bijection $\sigma : [\![1; n]\!] \to [\![1; n]\!]$, on a :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \{0; 1\}^n,\ \mathbb{P}\left([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_n = x_n]\right) = \mathbb{P}\left([X_{\sigma(1)} = x_1] \cap \ldots \cap [X_{\sigma(n)} = x_n]\right)$$

Soit σ une bijection de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$.Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0; 1\}^n$. Notons $k = \mathrm{Card}\{i \in [\![1; n]\!] \ / \ x_i = 1\}$.

Pour info...
Une bijection de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; n]\!]$ est aussi appelée **permutation de** $[\![1; n]\!]$.

- Remarquons que l'évènement $\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]$ est l'évènement élémentaire associé à l'issue consistant à obtenir une boule rouge pour les tirages i tels que $x_i = 1$ et une boule verte sinon.
- De la même façon, l'évènement $\bigcap_{i=1}^{n} [X_{\sigma(i)} = x_i]$ est l'évènement élémentaire associé à l'issue consistant à obtenir une boule rouge pour les tirages $\sigma(i)$ tels que $x_i = 1$ et une boule verte sinon.

Or, ces deux issues contiennent toutes deux k boules rouges et $n-k$ boules rouges.
Ainsi, d'après la justification donnée en question précédente, elles ont la même probabilité d'apparition.
Par conséquent :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_{\sigma(i)=x_i}]\right)$$

Conclusion : pour toute bijection $\sigma : [\![1;n]\!] \to [\![1;n]\!]$, on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{0;1\}^n,\ \mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]\big) = \mathbb{P}\big([X_{\sigma(1)} = x_1] \cap \dots \cap [X_{\sigma(n)} = x_n]\big)$$

☞ Rappel...
Un évènement élémentaire est un évènement réduit à une seule issue.

★Subtil...★
Cette issue est bien définie car σ est une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$, donc $\sigma(i)$ parcourt tout $[\![1;n]\!]$ quand i parcourt $[\![1;n]\!]$.

☞ Pour info...
On dit alors que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **échangeables**.

11.b. En déduire que pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a :

$$\mathbb{P}\big([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)$$

Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Considérons la bijection σ de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ définie par :

- ✓ $\sigma(1) = i$ et $\sigma(2) = j$ (licite car $i \neq j$) ;
- ✓ $\sigma(i) = 1$ et $\sigma(j) = 2$ (licite car $i \neq j$) ;
- ✓ $\forall k \in [\![1;n]\!] \setminus \{1;2;i;j\}$, $\sigma(k) = k$.

Remarque
Il n'est même pas nécessaire de définir σ entièrement. On pourrait se contenter de prendre une bijection vérifiant $\sigma(1) = i$, $\sigma(2) = j$, $\sigma(i) = 1$ et $\sigma(j) = 2$.

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{0;1\}^n,\ \mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]\big) = \mathbb{P}\big([X_i = x_1] \cap [X_j = x_2] \cap [X_{\sigma(3)} = x_3] \cap \dots [X_{\sigma(n)} = x_n]\big)$$

- D'où, en sommant pour $x_n \in \{0;1\}$:

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{0;1\}^{n-1},\ \sum_{x_n=0}^{1} \mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]\big) = \sum_{x_n=0}^{1} \mathbb{P}\big([X_i = x_1] \cap [X_j = x_2] \cap [X_{\sigma(3)} = x_3] \cap \dots \cap [X_{\sigma(n)} = x_n]\big)$$

Or :

* d'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_n = 0], [X_n = 1]\big)$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{0;1\}^{n-1},\ \mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_{n-1} = x_{n-1}]\big) = \sum_{x_n=0}^{1} \mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]\big)$$

* et d'après la formule des probabilités totales avec avec $\big([X_{\sigma(n)} = 0], [X_{\sigma(n)} = 1]\big)$ comme système complet d'évènements, on a :
$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{0;1\}^{n-1}$,

$$\mathbb{P}\big([X_i = x_1] \cap [X_j = x_2] \cap [X_{\sigma(3)} = x_3] \cap \dots [X_{\sigma(n-1)} = x_{n-1}]\big) = \sum_{x_n=0}^{1} \mathbb{P}\big([X_i = x_1] \cap [X_j = x_2] \cap [X_{\sigma(3)} = x_3] \cap \dots \cap [X_{\sigma(n)} = x_n]\big)$$

Par conséquent :

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{0;1\}^{n-1},\ \mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_{n-1} = x_{n-1}]\big) = \mathbb{P}\big([X_i = x_1] \cap [X_j = x_2] \cap [X_{\sigma(3)} = x_3] \cap \dots [X_{\sigma(n-1)} = x_{n-1}]\big)$$

- Puis (si $n > 2$), en sommant pour $x_{n-1} \in \{0;1\}$ et, de la même façon avec les formules des probabilités totales, on obtient :

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-2}) \in \{0;1\}^{n-2},\ \mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_{n-2} = x_{n-2}]\big) = \mathbb{P}\big([X_i = x_1] \cap [X_j = x_2] \cap [X_{\sigma(3)} = x_3] \cap \dots \cap [X_{\sigma(n-2)} = x_{n-2}]\big)$$

- On réitère...

On obtient finalement :

$$\forall (x_1, x_2) \in \{0;1\}^2,\ \mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]\big) = \mathbb{P}\big([X_i = x_1] \cap [X_j = x_2]\big)$$

D'où le résultat, en prenant $x_1 = x_2 = 1$.

Remarque
Question difficile... En revanche, la méthode n'est pas sans rappeler le passage de la loi d'un couple de VA discrètes à une des lois marginales. Ici, on retrouve un cas particulier de la loi du couple (X_1, X_2) (ou (X_i, X_j)) à partie de la loi du n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$.

Conclusion : pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a :

$$\mathbb{P}\big([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)$$

11.c. En déduire que, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, la variable aléatoire X_iX_j suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{r(r+1)}{(r+v)(r+v+1)}$.

Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Puisque $X_i(\Omega) = X_j(\Omega) = \{0;1\}$, on a :

$$X_iX_j(\Omega) \subset \{0;1\}$$

Or, puisque X_i et X_j ne prennent que 0 et 1 comme valeurs :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_iX_j = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\big) && \text{question précédente}\\ &= \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) && \text{calcul effectué en question 6.}\\ &= \frac{r(r+1)}{(r+v)(r+v+1)}\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $X_iX_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{r(r+1)}{(r+v)(r+v+1)}\right)$.

À retenir... Le produit de deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli est encore une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.

➠Réflexe ! On commence par déterminer l'ensemble image de X_iX_j ! L'égalité $X_iX_j(\Omega) = \{0;1\}$ est d'ailleurs vraie...

12. 12.a. Démontrer :

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j$$

On a :

$$\begin{aligned}S_n^2 &= \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\\ &= \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^n\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \times X_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n X_iX_j\right)\\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} X_iX_j\\ &= \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2\\ i=j}} X_iX_j + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2\\ i\neq j}} X_iX_j\\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} X_iX_j && \text{pour tout } i \in [\![1;n]\!],\ X_i(\Omega)\subset\{0;1\},\ \text{donc } X_i^2 = X_i\\ &= \sum_{i=1}^n X_i + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j && \text{symétrie des indices } i \text{ et } j \text{ dans la dernière somme}\end{aligned}$$

Important ! Je fais le choix de détailler ces premières lignes ; mais on peut bien évidemment passer directement à la 5ème étape du calcul !

À retenir... Si $X(\Omega) \subset \{0;1\}$, alors $X^2 = X$ (la réciproque est également vraie d'ailleurs...).

Conclusion : $S_n^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j$.

12.b. Démontrer alors que $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{nrv(r+v+n)}{(r+v)^2(r+v+1)}$.

- D'après les questions **7.c.** et **11.c.** :
  - $\forall i \in [\![1;n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$
  - $\forall (i,j) \in [\![1:n]\!]^2,\ \left(i \neq j \implies X_iX_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{r(r+1)}{(r+v)(r+v+1)}\right)\right)$.

  Ainsi, d'après la question précédente, S_n^2 est une somme de variables aléatoires admettant une espérance ; donc S_n^2 admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j\right) && \text{linéarité de l'espérance}\\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{E}(X_iX_j) && \text{rappels ci-dessus}\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{r}{r+v} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{r(r+1)}{(r+v)(r+v+1)} && \mathrm{Card}\big(\{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \ /\ 1\leqslant i<j\leqslant n\}\big) = \frac{n^2-n}{2}\\ &= \frac{nr}{r+v} + (n^2-n)\frac{r(r+1)}{(r+v)(r+v+1)}\end{aligned}$$

- La variable aléatoire S_n admet ainsi une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

question **8.**

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{E}(S_n^2) - \left(\mathbb{E}(S_n)\right)^2 \\
&= \frac{nr}{r+v} + (n^2-n)\frac{r(r+1)}{(r+v)(r+v+1)} - \frac{(nr)^2}{(r+v)^2} \\
&= \frac{nr(r+v)(r+v+1) + n(n-1)r(r+1)(r+v) - n^2r^2(r+v+1)}{(r+v)^2(r+v+1)} \\
&= \frac{nr\big((r+v)(r+v+1) + (n-1)(r+1)(r+v) - nr(r+v+1)\big)}{(r+v)^2(r+v+1)} \\
&= \frac{nr\big((r+v)(r+v+1) + (n-1)(r+1)(r+v) - nr(r+v) - nr\big)}{(r+v)^2(r+v+1)} \\
&= \frac{nr\big((r+v)(r+v+1+(n-1)(r+1) - nr) - nr\big)}{(r+v)^2(r+v+1)} \\
&= \frac{nr\big((r+v)(r+v+1+nr-r+n-1-nr) - nr\big)}{(r+v)^2(r+v+1)} \\
&= \frac{nr\big((r+v)(v+n) - nr\big)}{(r+v)^2(r+v+1)} \\
&= \frac{nr\big(rv+rn+v^2+vn-nr\big)}{(r+v)^2(r+v+1)} \\
&= \frac{nrv(r+v+n)}{(r+v)^2(r+v+1)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{nrv(r+v+n)}{(r+v)^2(r+v+1)}$.

Remarque
Avouons que ce n'est pas le calcul le plus simple à mener... Je le traite ici comme si le résultat n'était pas donné ! Puisqu'il l'est, on peut bien évidemment développer le résultat donné et retrouver la forme développée de ce qu'on a trouvé.

III. Fonction bêta et lois bêta-binomiales à paramètres quelconques

♣ L'idée !
"intégrale convergente ssi ..." : nous fait penser à un critère d'équivalence ! C'est le seul qui donne directement une CNS de convergence (si l'intégrale étudiée n'est pa calculable). Sinon, on peut procéder en établissant la convergence si $x > 0$ et la divergence si $x \leqslant 0$, mais c'est plus long...

13. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

13.a. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si seulement si $x > 0$.

- Remarquons que la fonction $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est définie et continue sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$; donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est éventuellement impropre en 0 seulement.
- Ensuite :
  - ✓ puisque $\lim\limits_{t\to 0}(1-t)^{y-1} = 1$, on a $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$
  - ✓ $\forall t \in \left]0;\frac{1}{2}\right]$, $t^{x-1} \geqslant 0$; $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \geqslant 0$

  Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales à intégrandes positives, les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}dt$ ont même nature.
  Or :
  $$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}}dt$$
  Et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}}dt$ est une intégrale de Riemann (éventuellement impropre en 0) convergente si, et seulement si $1-x<1$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si seulement si $x > 0$.

Remarque
On pourrait aussi commencer par traiter séparément le cas $x > 1$ pour dire que, dans ce cas, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ n'est pas impropre en 0 ; mais ce n'est pas nécessaire.

13.b. Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$$

Soit $\varepsilon \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$. Effectuons le changement de variable $t = 1-u$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$:

$$\left|\begin{array}{lcl} t &=& 1-u \\ u &=& 1-t \end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{lcl} dt &=& -du \\ du &=& -dt \end{array}\right. \quad ;$$

$t =$	$\frac{1}{2}$	$1-\varepsilon$
$u =$	$\frac{1}{2}$	ε

Ce changement de variable est bien licite car affine, non constant.
On a ainsi :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon} (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-du)$$
$$= \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} (1-u)^{x-1}u^{y-1}\,du$$
$$= \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} (1-t)^{x-1}t^{y-1}\,dt$$

✘ Attention ! Si on oublie les parenthèses autour de $(-du)$, on transforme un produit en somme... Quand-même...

Conclusion : $\forall \varepsilon \in \left]0; \frac{1}{2}\right[,\ \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,dt.$

13.c. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

✍ Rédaction Il ne me semble pas nécessaire, ici, d'étudier la continuité de l'intégrande...

- D'après la question précédente, en étudiant la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient que les intégrales $\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,dt$ ont même nature.

  Or, d'après la question **13.a.**, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,dt$ est convergente, si, et seulement si, $y > 0$.

  Par conséquent, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si, et seulement si, $y > 0$.
- Enfin, par définition, on sait que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si, et seulement si, les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ sont simultanément convergentes ; ce qui, d'après la question **13.a.** et le point précédent, n'est le cas que lorsque $x > 0$ et $y > 0$.

Conclusion : l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

► Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$

14. Établir les deux résultats suivants :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ B(x, y) = B(y, x) \quad ; \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ B(x, y) > 0$$

✘ Attention ! Changements de variables (autres qu'affines non constants) et IPP ne sont pas autorisés sur les intégrales impropres ! En revanche, un changement de variable affine (non constant) conserve la nature d'une intégrale impropre et est autorisé.

- Immédiat en effectuant le même changement de variable qu'en question **13.b.** sur $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$, qui est bien licite sur cette intégrale impropre, car affine non constant.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*}$.
  On sait déjà que pour tout $t \in]0; 1[$, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \geqslant 0$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, licite car $0 < 1$, on a :
  $$B(x, y) \geqslant 0$$
  Ensuite :
  ✓ $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0; 1[$;
  ✓ $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est positive sur $]0; 1[$.
  Et on sait que l'intégrale d'une fonction continue et positive (sur un intervalle non réduit à un point) est nulle si, et seulement si, cette fonction est nulle : ce qui n'est pas le cas !
  Par conséquent :
  $$B(x, y) > 0$$

Conclusion : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ B(x, y) > 0.$

15. Soient x et y des réels strictement positifs.

15.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1, y) = \frac{x}{y} \times B(x, y+1)$.

On a :

$$B(x+1, y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt$$

✘ Attention ! Pas d'IPP sur les intégrales impropres !

Soient $A, B \in]0; 1[$ tels que $A < B$. Effectuons une intégration par parties dans $\int_A^B t^x(1-t)^{y-1}\,dt$.

Posons : $\left|\begin{array}{l} u : t \longmapsto t^x \\ v : t \longmapsto \frac{-1}{y}(1-t)^y \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[A, B]$ et pour tout $t \in [A, B]$:

$\left| \begin{array}{l} u'(t) = xt^{x-1} \\ v'(t) = (1-t)^{y-1} \end{array} \right.$.
Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_A^B t^x(1-t)^{y-1}dt &= \left[\frac{-1}{y}t^x(1-t)^y\right]_A^B - \int_A^B \frac{-x}{y}t^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= \frac{-1}{y}B^x(1-B)^y + \frac{1}{y}A^x(1-A)^y + \frac{x}{y}\int_A^B t^{x-1}(1-t)^y dt\end{aligned}$$

Or :

- $x > 0$, donc $\lim\limits_{A\to 0} A^x = 0$ et ainsi :
$$\lim_{A\to 0} \frac{1}{y}A^x(1-A)^y = 0$$
- $y > 0$, donc $\lim\limits_{B\to 1}(1-B)^y = 0$ et ainsi :
$$\lim_{B\to 1} \frac{1}{y}B^x(1-B)^y = 0$$
- les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt$ sont convergentes.

D'où, en passant à la limite lorsque $A \to 0$ et $B \to 1$, on obtient :

$$\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt$$

Conclusion : $B(x+1,y) = \dfrac{x}{y}B(x,y+1)$.

15.b. En déduire l'égalité : $B(x,y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x,y)$.

Raisonnons par équivalences...
On a, puisque $x+y \neq 0$ et $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} \times B(x,y) &\iff \frac{x+y}{y}B(x,y+1) = B(x,y) \\ &\iff \frac{x}{y}B(x,y+1) + B(x,y+1) = B(x,y) \\ &\iff B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y)\end{aligned}$$

question précédente

Or :

$$\begin{aligned}B(x+1,y) + B(x,y+1) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\big(t + (1-t)\big)dt \\ &= B(x,y)\end{aligned}$$

linéarité de l'intégrale

La dernière égalité est vraie, ainsi, par équivalences, la première également.

Conclusion : $B(x,y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x,y)$.

♣ Méthode !
Quand on manque d'inspiration pour établir une égalité / inégalité, il est souvent intéressant de travailler par équivalences pour transformer le résultat à établir en un résultat qui nous semble plus élémentaire à démontrer.

▶ Pour tout réel z, on considère la suite $\left(z^{[m]}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$z^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ z^{[m+1]} = (z+m) \times z^{[m]}$$

16. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Démontrer, pour tout couple (k,ℓ) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{x^{[k]} \times y^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$$

Procédons par récurrence (sur k).

- **Initialisation.** Pour $k = 0$:
Puisque $x^{[0]} = 1$, il s'agit d'établir :
$$\forall \ell \geqslant 0,\ B(x, y+\ell) = \frac{y^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}}B(x,y)$$
Pour cela, procédons par récurrence.
  - ∗ **Initialisation.** Pour $\ell = 0$:
Immédiat, puisque $y^{[0]} = (x+y)^{[0]} = 1$.

Remarque
On peut également faire une récurrence sur ℓ.
Dans ce cas :
• l'initialisation se passe sans encombre...
• dans l'hérédité, il faut séparer le cas $k = \ell + 1$ du cas $k \in [\![0;\ell]\!]$ (ce dernier utilise l'HDR). Mais le cas $k = \ell + 1$ n'est pas trivial... et demande en fait un raisonnement analogue à celui fait dans l'initialisation de la récurrence présentée dans le corrigé.

Remarque
On peut se contenter d'un raisonnement "de proche en proche" en utilisant la relation de la question 15.b....

* **Hérédité.** Soit $\ell \in \mathbb{N}$.
Supposons que $B(x, y+\ell) = \dfrac{y^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} B(x,y)$ et démontrons que $B(x, y+\ell+1) = \dfrac{y^{[\ell+1]}}{(x+y)^{[\ell+1]}} B(x,y)$.
D'après la question **15.b.**, licite car $x > 0$ et $y + \ell > 0$:

$$\begin{aligned} B(x, y+\ell+1) &= \frac{y}{x+y} B(x, y+\ell) \\ &= \frac{y}{x+y} \frac{y^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} B(x,y) \\ &= \frac{y^{[\ell+1]}}{(x+y)^{[\ell+1]}} B(x,y) \end{aligned}$$

hypothèse de récurrence

L'hérédité est ainsi établie.

On a ainsi démontré $\forall \ell \geqslant 0,\ B(x, y+\ell) = \dfrac{y^{[\ell]}}{(x+y)^{[\ell]}} B(x,y)$: l'initialisation (de la récurrence sur k) est ainsi vérifiée.

* **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons "$\forall \ell \geqslant k,\ B(x+k, y+\ell-k) = \dfrac{x^{[k]} \times y^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$" et démontrons "$\forall \ell \geqslant k+1,\ B(x+k+1, y+\ell-k-1) = \dfrac{x^{[k+1]} \times y^{[\ell-k-1]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$".
Soit $\ell \geqslant k+1$. On a, d'après la question **15.a.**, licite car $x+k+1 > 0$ et $y-\ell-k-1 > 0$ (car $\ell \geqslant k+1$) :

$$\begin{aligned} B(x+k+1, y-\ell-k-1) &= \frac{x+k}{y-\ell-k-1} B(x+k, y-\ell-k) \\ &= \frac{x+k}{y-\ell-k-1} \frac{x^{[k]} \times y^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} B(x,y) \\ &= \frac{x^{[k+1]} y^{[\ell-k-1]} \times (y-\ell-k-1)}{(y-\ell-k-1)(x+y)^{[\ell]}} B(x,y) \\ &= \frac{x^{[k+1]} \times y^{[\ell-k-1]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) \end{aligned}$$

hypothèse de récurrence

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout couple (k, ℓ) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$,

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{x^{[k]} \times y^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$$

17. Soient a et b des réels strictement positifs. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $p_k = \dbinom{n}{k} \dfrac{a^{[k]} \times b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

17.a. À l'aide de la relation obtenue dans la question précédente, démontrer que la suite $(p_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0; n]\!]$.

* Puisque $a > 0$ et $b > 0$, on a déjà :

$$\forall k \in [\![0; n]\!],\ a^{[k]} \geqslant 0 \ \ ; \ \ b^{[n-k]} \geqslant 0$$

D'où :

$$\forall k \in [\![0; n]\!],\ p_k \geqslant 0$$

* Ensuite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} p_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{[k]} b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a,b)} \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(a+k, b-n-k) \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{a+k-1} (1-t)^{b+n-k-1} \, dt \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{a+k-1} (1-t)^{b+n-k-1} dt \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{a+k-1} (1-t)^{b+n-k-1} dt \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \right) dt \end{aligned}$$

question précédente avec $x = a$, $y = b$, $\ell = n$, lcite car k parcourt $[\![0; n]\!]$ et que $B(a, b) \neq 0$ (question **14.**)

linéarité de l'intégrale

formule du binôme de Newton

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \times 1 dt$$
$$= \frac{B(a,b)}{B(a,b)}$$
$$= 1$$

Conclusion : la suite $(p_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;n]\!]$.

► On dit qu'une variable aléatoire S suit une loi bêta-binomiale $\mathscr{B}(n;a,b)$ si $S(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}\big([S=k]\big) = \binom{n}{k} \frac{a^{[k]} \times b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

17.b. Calculer $1^{[m]}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On a :

- $1^{[0]} = 1$
- $1^{[1]} = 1 \times 1^{[0]} = 1$
- $1^{[2]} = 2 \times 1^{[1]} = 2$
- $1^{[3]} = 3 \times 1^{[2]} = 6$
- $1^{[4]} = 4 \times 1^{[3]} = 24$

Conjecturons donc :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ 1^{[m]} = m!$$

Démontrons ce résultat par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $m = 0$:
  On a $1^{[0]} = 1 = 0!$: initialisation vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que $1^{[m]} = m!$ et montrons que $1^{[m+1]} = (m+1)!$.
  On a :

$$\begin{aligned} 1^{[m+1]} &= (1+m) \times 1^{[m]} \\ &= (m+1)m! && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= (m+1)! \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall m \in \mathbb{N},\ 1^{[m]} = m!$.

Important !
Il faut prendre le temps nécessaire sur cette question et avoir les points...

17.c. Reconnaître la loi $\mathscr{B}(n;1,1)$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n;1,1)$. Par définition :

✓ $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$;

✓ et, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X=k]\big) &= \binom{n}{k} \frac{1^{[k]} \times 1^{[n-k]}}{2^{[n]}} \\ &= \frac{n}{k} \frac{k!(n-k)!}{2^{[n]}} && \text{question précédente} \\ &= \frac{n!}{2^{[n]}} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} && \text{en procédant comme en question précédente} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Remarque
La récurrence ayant été faite en question précédente, il est bien entendu possible d'aller plus vite ici et donc de ne pas justifier que $2^{[n]} = (n+1)!$; d'autant plus que la question suivante sera l'occasion de prouver que la manipulation des quantités $a^{[k]}$ est maitrisée.

Conclusion : la loi $\mathscr{B}(n;1,1)$ est la loi $\mathscr{U}\big([\![0;n]\!]\big)$.

17.d. Soit S une variable aléatoire suivant la loi bêta-binomiale $\mathscr{B}(n;a,b)$.

17.d.i. Démontrer que $\mathbb{E}(S) = \dfrac{na}{a+b}$.

On sait que $S(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Ainsi $S(\Omega)$ est fini, donc S admet une espérance ; et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([S=k]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{a^{[k]} b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a,b)} && \text{question 16. avec } x=a,\ y=b \text{, licite car } a,b>0 \text{ et que } k \text{ parcourt } [\![0;n]\!] \text{ ; et puisque } B(a,b) \neq 0 \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{b+n-k-1} dt && \text{linéarité de l'intégrale} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^{a+k-1}(1-t)^{b+n-k-1} dt$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^{a+k-1}(1-t)^{b+n-k-1} dt$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \left(\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \right) dt$$

en reconnaissant l'espérance d'une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n,t)$, où $t \in]0;1[$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} nt dt$$

$$= \frac{n}{B(a,b)} B(a+1,b)$$

question **16.** avec $k = \ell = 1$

$$= \frac{n}{B(a,b)} \frac{a^{[1]}}{(a+b)^{[1]}} B(a,b)$$

$$= \frac{na}{a+b}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(S) = \dfrac{na}{a+b}$.

Vérification
Résultat cohérent avec ceux des questions **8.** et **17.d.**.

17.d.ii. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et t, avec $t \in]0;1[$.
Déterminer $\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big)$ puis en déduire l'espérance de $S(S-1)$ ainsi que la variance de S.

- La variable aléatoire $Y(Y-1)$ admet une espérance, car $Y(\Omega)$ est fini et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) &= \mathbb{E}(Y^2 - Y) \\ &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{V}(Y) + \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 - \mathbb{E}(Y) \\ &= nt(1-t) + n^2t^2 - nt \\ &= n(n-1)t^2 \end{aligned}$$

linéarité de l'espérance

formule de Koenig-Huygens

- Puisque $S(\Omega) = [\![0;n]\!]$, $S(\Omega)$ est fini, donc la variable aléatoire $S(S-1)$ admet une espérance et, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(S(S-1)\big) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \mathbb{P}\big([S=k]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \frac{a^{[k]} b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a,b)} \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{n+n-k-1} dt \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \left(\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} \right) dt \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} n(n-1)t^2 dt \\ &= \frac{n(n-1)B(a+2,b)}{B(a,b)} \\ &= \frac{n(n-1)}{B(a,b)} \frac{a^{[2]}b^{[0]}}{(a+b)^{[2]}} B(a,b) \\ &= \frac{n(n-1)a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \end{aligned}$$

question **16.**, comme en question précédente

linéarité de l'intégrale

en reconnaissant $\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big)$ sous forme de somme, par théorème de transfert

question **16.** avec $\ell = k = 2$

- Enfin, $S(\Omega)$ est fini, donc S admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S) &= \mathbb{E}(S^2) - \big(\mathbb{E}(S)\big)^2 \\ &= \mathbb{E}\big(S(S-1) + S\big) - \big(\mathbb{E}(S)\big)^2 \\ &= \frac{n(n-1)a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} + \frac{na}{a+b} - \frac{n^2a^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{nab(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+1)} \end{aligned}$$

linéarité de l'espérance, point précédent et question précédente

calcul identique à celui de la question **12.b.**

Conclusion : $\mathbb{V}(S) = \dfrac{nab(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

18. Soient a et b des réels strictement positifs.
On considère à présent une famille $(Y_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{0;1\}$ telles que :

- pour tout $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, on a :
$$\forall (y_i,y_j)\in\{0;1\}^2,\ \mathbb{P}\big([Y_i=y_i]\cap[Y_j=y_j]\big)=\mathbb{P}\big([Y_1=y_i]\cap[Y_2=y_j]\big)$$
- la variable aléatoire Y_1+Y_2 suit la loi $\mathscr{B}(2;a,b)$.

18.a. Déterminer, pour tout $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, la loi du couple (Y_i,Y_j).

Soit $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ tel que $i\neq j$. Puisque $Y_i(\Omega)=Y_j(\Omega)$, on cherche les probabilités suivantes :
$$\mathbb{P}\big([Y_i=0]\cap[Y_j=0]\big)\ ;\ \mathbb{P}\big([Y_i=0]\cap[Y_j=1]\big)\ ;\ \mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=0]\big)\ ;\ \mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=1]\big)$$

Remarque
Question intéressante, dont la méthode est un peu à l'envers... En effet, habituellement, on détermine la loi de la somme Y_1+Y_2 à partir des lois marginales et/ou de la loi jointe.

- D'après l'énoncé :
$$\mathbb{P}\big([Y_i=0]\cap[Y_j=0]\big)=\mathbb{P}\big([Y_1=0]\cap[Y_2=0]\big)$$
Ensuite, puisque $Y_1(\Omega)\subset\{0;1\}$ et $Y_1(\Omega)\subset\{0;1\}$, on a :
$$[Y_1+Y_2=0]=[Y_1=0]\cap[Y_2=0]$$
D'où :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_i=0]\cap[Y_j=0]\big)&=\mathbb{P}\big([Y_1+Y_2=0]\big)\\&=\binom{2}{0}\frac{a^{[0]}b^{[2]}}{(a+b)^{[2]}}\qquad Y_1+Y_2\hookrightarrow\mathscr{B}(2;a,b)\\&=\frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}\end{aligned}$$
Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y_i=0]\cap[Y_j=0]\big)=\dfrac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}$.

- En utilisant la relation
$$\forall (y_i,y_j)\in\{0;1\}^2,\ \mathbb{P}\big([Y_i=y_i]\cap[Y_j=y_j]\big)=\mathbb{P}\big([Y_1=y_i]\cap[Y_2=y_j]\big)$$
avec $(y_i,y_j)=(0,1)$ puis $(y_i,y_j)=(1,0)$, on obtient successivement
$$\mathbb{P}\big([Y_i=0]\cap[Y_j=1]\big)=\mathbb{P}\big([Y_1=0]\cap[Y_2=1]\big)\ ;\ \mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=0]\big)=\mathbb{P}\big([Y_1=1]\cap[Y_2=0]\big)$$
En particulier (en prenant $i=2$ et $j=1$), on obtient :
$$\mathbb{P}\big([Y_1=0]\cap[Y_2=1]\big)=\mathbb{P}\big([Y_1=1]\cap[Y_2=0]\big)$$
Et ainsi :
$$\mathbb{P}\big([Y_i=0]\cap[Y_j=1]\big)=\mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=0]\big)$$
  - ∗ Ensuite, puisque $Y_1(\Omega)\subset\{0;1\}$ et $Y_1(\Omega)\subset\{0;1\}$, on a :
$$[Y_1+Y_2=1]=\big([Y_1=0]\cap[Y_2=1]\big)\cup\big([Y_1=1]\cap[Y_2=0]\big)$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_1+Y_2=1]\big)&=\mathbb{P}\Big(\big([Y_1=0]\cap[Y_2=1]\big)\cup\big([Y_1=1]\cap[Y_2=0]\big)\Big)\\&=\mathbb{P}\big([Y_1=0]\cap[Y_2=1]\big)+\mathbb{P}\big([Y_1=1]\cap[Y_2=0]\big)\qquad\text{incompatibilité de }[Y_1=0]\text{ et }[Y_1=1]\\&=2\mathbb{P}\big([Y_1=0]\cap[Y_2=1]\big)\qquad\text{ce qui précède}\end{aligned}$$
  - ∗ $Y_1+Y_2\hookrightarrow\mathscr{B}(2;a,b)$, d'où :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_1+Y_2=1]\big)&=\binom{2}{1}\frac{a^{[1]}b^{[1]}}{(a+b)^{[2]}}\\&=2\frac{ab}{(a+b)(a+b+1)}\end{aligned}$$
D'où, d'après le point précédent :
$$\mathbb{P}\big([Y_1=0]\cap[Y_2=1]\big)=\frac{ab}{(a+b)(a+b+1)}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y_i=0]\cap[Y_j=1]\big)=\mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=0]\big)=\dfrac{ab}{(a+b)(a+b+1)}$.

- À nouveau :
$$\mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=1]\big)=\mathbb{P}\big([Y_1=1]\cap[Y_j=1]\big)$$
Et, puisque $Y_1(\Omega)\subset\{0;1\}$ et $Y_2(\Omega)\subset\{0;1\}$, on a :
$$[Y_1+Y_2=2]=[Y_1=1]\cap[Y_2=1]$$
D'où :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_1=1]\cap[Y_2=1]\big)&=\mathbb{P}\big([Y_1+Y_2=2]\big)\\&=\binom{2}{2}\frac{a^{[2]}b^{[0]}}{(a+b)^{[2]}}\qquad Y_1+Y_2\hookrightarrow\mathscr{B}(2;a,b)\\&=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}\end{aligned}$$
Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y_1=1]\cap[Y_2=1]\big)=\dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$

Conclusion :	$Y_i \backslash Y_j$	0	1
	0	$\dfrac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}$	$\dfrac{ab}{(a+b)(a+b+1)}$
	1	$\dfrac{ab}{(a+b)(a+b+1)}$	$\dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$

Vérification
Après tous ces calculs, on vérifie rapidement que la somme de ces 4 probabilités vaut 1 ; ce qui est le cas, ouf !

18.b. Déterminer, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la loi de la variable aléatoire Y_i.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$.

- On a déjà $Y_i(\Omega) \subset \{0;1\}$.
- Ensuite, soit $j \in [\![1;n]\!]$ avec $j \neq i$. D'après la formule des probabilités totales avec $\big([Y_j=0],[Y_j=1]\big)$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_i=1]\big) &= \mathbb{P}\big([Y_j=0]\cap[Y_i=1]\big)+\mathbb{P}\big([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\big)\\ &= \frac{ab+a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}\\ &= \frac{a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)}\\ &= \frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

question précédente

À retenir...
Si $X(\Omega) \subset \{0;1\}$, alors soit X suit une loi certaine (ou quasi-certaine), soit elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$, qui est alors égal à $\mathbb{P}\big([X=1]\big)$.

Conclusion : $Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$.

18.c. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Calculer la covariance puis le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y_i, Y_j), noté $\rho(Y_i, Y_j)$.

- Puisque Y_i et Y_j admettent un moment d'ordre 2 (elles suivent chacune une même loi de Bernoulli), la covariance du couple (X_i, X_j) existe ; et, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y_i,Y_j) &= \mathbb{E}(Y_iY_j)-\mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j)\\ &= \sum_{y_i=0}^{1}\sum_{y_j=0}^{1} y_iy_j\mathbb{P}\big([Y_i=y_i]\cap[Y_j=y_j]\big)-\frac{a^2}{(a+b)^2}\\ &= \mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=1]\big)-\frac{a^2}{(a+b)^2}\\ &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}-\frac{a^2}{(a+b)^2}\\ &= \frac{a}{a+b}\times\frac{(a+1)(a+b)-a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)}\\ &= \frac{a}{a+b}\,\frac{b}{(a+b)(a+b+1)}\\ &= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\end{aligned}$$

théorème de transfert et question précédente

question 18.a.

Conclusion : $\text{Cov}(Y_i,Y_j) = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

- Puisque $\mathbb{V}(Y_i) = \mathbb{V}(Y_j) \neq 0$, $\rho(Y_i,Y_j)$ existe et :

$$\begin{aligned}\rho(Y_i,Y_j) &= \frac{\text{Cov}(Y_i,Y_j)}{\sqrt{\mathbb{V}(Y_i)\mathbb{V}(Y_j)}}\\ &= \frac{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}{\frac{ab}{(a+b)^2}}\\ &= \frac{1}{a+b+1}\end{aligned}$$

$\mathbb{V}(Y_i) = \mathbb{V}(Y_j) = \dfrac{ab}{(a+b)^2}$

Conclusion : $\rho(Y_i,Y_j) = \dfrac{1}{a+b+1}$.

18.d. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Établir

$$\mathbb{P}_{[Y_i=1]}\big([Y_j=1]\big) = \frac{a+1}{a+b+1}$$

Puisque $\mathbb{P}\big([Y_i=1]\big) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[Y_i=1]}\big([Y_j=1]\big) &= \frac{\mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=1]\big)}{\mathbb{P}\big([Y_i=1]\big)}\\ &= \frac{a+1}{a+b+1}\end{aligned}$$

questions 18.a. et 18.b.

Conclusion : $\mathbb{P}_{[Y_i=1]}\big([Y_j=1]\big) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$.

18.e. Compléter le programme suivant de sorte que l'exécution de **simuleY1Y2(a,b)** renvoie une réalisation du couple (Y_1, Y_2).

```
import numpy.random as rd

def simuleY1Y2(a,b):
    if rd.random()<a/(a+b):
        Y1=1
        if ...:
            Y2=1
        else:
            Y2=0
    else :
        ...
        if ...:
            Y2=1
        else :
            Y2=0
    return (Y1,Y2)
```

L'idée est de simuler une réalisation de la variable aléatoire Y_1. Ensuite, deux cas de figure :

- Si $[Y_1 = 1]$ est réalisé : alors, d'après la question précédente, l'évènement $[Y_2 = 1]$ a une probabilité $\dfrac{a+1}{a+b+1}$ de se réaliser ; sinon, c'est $[Y_2 = 0]$ qui se réalise.
- Si $[Y_1 = 0]$ est réalisé : alors, on doit commencer par déterminer la probabilité que l'évènement $[Y_2 = 1]$ se réalise...
  En procédant comme en question précédente, on trouve :
  $$\mathbb{P}_{[Y_1=0]}\big([Y_2=1]\big) = \frac{a}{a+b+1}$$

```
import numpy.random as rd

def simuleY1Y2(a,b):
    if rd.random()<a/(a+b):
        Y1=1
        if rd.random()<(a+1)/(a+b+1):
            Y2=1
        else:
            Y2=0
    else :
        Y1=0
        if rd.random()<a/(a+b+1):
            Y2=1
        else :
            Y2=0
    return (Y1,Y2)
```

18.f. Soient $p \in]0;1[$ et $r \in]0;1[$. On souhaite simuler la réalisation d'un couple (Y_1, Y_2) de variables aléatoires suivant toutes deux la loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r.

18.f.i. Expliquer pourquoi le programme suivant ne permet jamais d'obtenir une telle simulation.

```
import numpy.random as rd

def simule(p,r):
    Y1=rd.binomial(1,p)
    Y2=rd.binomial(1,p)
    return (Y1,Y2)
```

Ce programme ne peut pas convenir car il permet de simuler la réalisation d'un couple (Y_1, Y_2) dans lequel Y_1 et Y_2 suivent des lois de Bernoulli de paramètre p indépendantes.
Or on souhaite que le coefficient de corrélation linéaire soit égal à r, qui est non nul. Par conséquent, Y_1 et Y_2 ne peuvent pas être indépendantes.

> ☞ **Rappel...**
> Si X et Y sont indépendantes (et admettent une espérance), alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ donc $\rho(X, Y) = 0$.

18.f.ii. Expliquer comment utiliser la fonction **simuleY1Y2()** pour répondre au problème.

- On vérifie sans mal que si $Y_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$ et que la loi conditionnelle de Y_2 sachant $[Y_1 = 0]$ et sachant $[Y_1 = 1]$ est donnée par les valeurs de la fonction **simuleY1Y2()**, alors $Y_1 + Y_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(2; a, b)$ et on peut donc appliquer tous les résultats de la question **18.**.

- Dans ce cas, l'exécution de **simuleY1Y2(a,b)** renvoie une réalisation d'un couple (Y_1, Y_2) suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation r vérifient tous deux :

$$p = \frac{a}{a+b} \quad ; \quad r = \frac{1}{a+b+1}$$

Or :

$$\left\{\begin{array}{ll} p & = \dfrac{a}{a+b} \\ r & = \dfrac{1}{a+b+1} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} (a+b)p & = a \\ (a+b+1)r & = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} (p-1)a + pb = & 0 \\ ra + rb = & -r+1 \end{array}\right. \quad p-1 \neq 0$$

$$\underset{L_2 \leftarrow (p-1)L_2 - rL_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} (p-1)a + pb = & 0 \\ -\, rb = & (p-1)(1-r) \end{array}\right. \quad r \neq 0$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} a & = \dfrac{p(1-r)}{r} \\ b & = \dfrac{(1-p)(1-r)}{r} \end{array}\right.$$

Conclusion : pour simuler la réalisation d'un couple (Y_1, Y_2) de variables aléatoires suivant toutes deux la loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r, il suffit d'exécuter **simuleY1Y2(a,b)** avec $a = \dfrac{p(1-r)}{r}$ et $b = \dfrac{(1-p)(1-r)}{r}$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★