# Concours blanc - Épreuve 2

Mercredi 19 novembre 2025 - 4h00

---

# Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- Pour toutes les questions `Python` du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

---

*"Tout est possible à qui rêve, ose, travaille et n'abandonne jamais."*
Xavier Dolan

# Exercice 1

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ;
- on note $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I Les parties II et III sont très largement indépendantes.

## Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre $p$ avec $0 < p < 1$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_i = 1]\big) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big([X_i = 0]\big) = 1 - p$$

On suppose que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, le coefficient de corrélation linéaire des variables $X_i$ et $X_j$ est le même ; on note $r$ ce coefficient. On a donc :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \frac{\operatorname{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_i)\mathbb{V}(X_j)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ r & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On note enfin, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

1. 1.a. Dans les cas $(i)$ et $(ii)$ suivants, calculer la valeur de $r$ et exprimer la variance de la variable aléatoire $S_n$ en fonction de $n$ et $p$.
   (i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
   (ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont toutes égales.
   De plus, préciser la loi de $S_n$ dans chacun des deux cas précédents.
   1.b. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $S_k$ est donnée par la formule :
   $$\mathbb{V}(S_k) = kp(1 - p)(1 + (k - 1)r)$$
   1.c. En déduire que le coefficient $r$ est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.
2. On suppose dans cette question que $n$ est égal à 2.
   2.a. Montrer que $r$ est égal à $-1$ si et seulement si on a : $\mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) = p(2p - 1)$.
   2.b. Que vaut alors $\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big)$ ?
   2.c. En déduire que le coefficient $r$ ne peut-être égal à $-1$ que lorsque $p = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\big([X_1 + X_2 = 1]\big) = 1$.
3. On suppose dans cette question que $n$ est supérieur ou égal à 3 et que $\mathbb{P}\big([S_n = 1]\big) = 1$.
   3.a. Exprimer les valeurs de $p$ et $r$ en fonction de $n$.
   3.b. Déterminer les $n$-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right)$ est strictement positive et la calculer.

## Partie II. Lois bêta-binomiales à paramètres entiers

Soient $r$ et $v$ deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne contenant $r$ boules rouges et $v$ boules vertes, indiscernables au toucher. On effectue $n$ tirages dans l'urne et, après tirage d'une boule, on remet la boule dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur dans l'urne.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note $X_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si une boule rouge est tirée lors du tirage $i$ ; et qui prend la valeur 0 sinon.

On pose également, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$.

Enfin, on note, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $R_i$ l'évènement "tirer une boule rouge au $i$-ème tirage" et $V_i = \overline{R_i}$.

4. Interpréter, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, les valeurs prises par la variable aléatoire $S_i$.
5. Écrire une fonction **`Python`** prenant en arguments des entiers naturels non nuls $r, v$ ainsi qu'un entier naturel $n \geqslant 2$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire $S_n$.
6. Donner la loi de $X_1$ puis déterminer celle de $X_2$.
7. 7.a. Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. Déterminer, pour tout $k \in [\![0; i]\!]$, la loi conditionnelle de $X_{i+1}$ sachant l'évènement $[S_i = k]$.
   7.b. En déduire :
   $$\forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \mathbb{P}\big([X_{i+1} = 1]\big) = \frac{\mathbb{E}(S_i) + r}{r + v + i}$$
   7.c. Démontrer, par récurrence forte, que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $X_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{r}{r+v}$.
8. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $S_n$.
9. Calculer les probabilités $\mathbb{P}\big([S_n = 0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([S_n = n]\big)$.
10. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$.

**10.a.** Calculer la probabilité de l'évènement $R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap V_{k+1} \cap \ldots \cap V_n$.

**10.b.** Combien l'évènement $[S_n = k]$ contient-il d'issues ?

**10.c.** En déduire que

$$\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \binom{n}{k} \frac{(r+k-1)!(v+n-k-1)!(r+v-1)!}{(r-1)!(v-1)!(r+v+n-1)!}$$

**11. 11.a.** Justifier que pour toute bijection $\sigma : [\![1;n]\!] \to [\![1;n]\!]$, on a :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \{0;1\}^n,\ \mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_n = x_n]\big) = \mathbb{P}\big([X_{\sigma(1)} = x_1] \cap \ldots \cap [X_{\sigma(n)} = x_n]\big)$$

**11.b.** En déduire que pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a :

$$\mathbb{P}\big([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)$$

**11.c.** En déduire que, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, la variable aléatoire $X_i X_j$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{r(r+1)}{(r+v)(r+v+1)}$.

**12. 12.a.** Démontrer :

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} X_i X_j$$

**12.b.** Démontrer alors que $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{nrv(r+v+n)}{(r+v)^2(r+v+1)}$.

## III. Fonction bêta et lois bêta-binomiales à paramètres quelconques

**13.** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**13.a.** Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si seulement si $x > 0$.

**13.b.** Pour tout réel $\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$$

**13.c.** En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

► Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

**14.** Établir les deux résultats suivants :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ B(x,y) = B(y,x) \quad ; \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ B(x,y) > 0$$

**15.** Soient $x$ et $y$ des réels strictement positifs.

**15.a.** À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1,y) = \dfrac{x}{y} \times B(x,y+1)$.

**15.b.** En déduire l'égalité : $B(x,y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x,y)$.

► Pour tout réel $z$, on considère la suite $\left(z^{[m]}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$z^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ z^{[m+1]} = (z+m) \times z^{[m]}$$

**16.** Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Démontrer, pour tout couple $(k,\ell)$ d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{x^{[k]} \times y^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$$

**17.** Soient $a$ et $b$ des réels strictement positifs. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose : $p_k = \dbinom{n}{k} \dfrac{a^{[k]} \times b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

**17.a.** À l'aide de la relation obtenue dans la question précédente, démontrer que la suite $(p_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;n]\!]$.

► On dit qu'une variable aléatoire $S$ suit une loi bêta-binomiale $\mathscr{B}(n;a,b)$ si $S(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}\big([S = k]\big) = \binom{n}{k} \frac{a^{[k]} \times b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

**17.b.** Calculer $1^{[m]}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

**17.c.** Reconnaître la loi $\mathscr{B}(n;1,1)$.

**17.d.** Soit $S$ une variable aléatoire suivant la loi bêta-binomiale $\mathscr{B}(n;a,b)$.

**17.d.i.** Démontrer que $\mathbb{E}(S) = \dfrac{na}{a+b}$.

**17.d.ii.** Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n$ et $t$, avec $t \in ]0;1[$.
Déterminer $\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big)$ puis en déduire l'espérance de $S(S-1)$ ainsi que la variance de $S$.

**18.** Soient $a$ et $b$ des réels strictement positifs.
On considère à présent une famille $(Y_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{0;1\}$ telles que :

- pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a :

$$\forall (y_i, y_j) \in \{0;1\}^2,\ \mathbb{P}\big([Y_i = y_i] \cap [Y_j = y_j]\big) = \mathbb{P}\big([Y_1 = y_i] \cap [Y_2 = y_j]\big)$$

- la variable aléatoire $Y_1 + Y_2$ suit la loi $\mathscr{B}(2;a,b)$.

**18.a.** Déterminer, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, la loi du couple $(Y_i, Y_j)$.
**18.b.** Déterminer, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la loi de la variable aléatoire $Y_i$.
**18.c.** Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Calculer la covariance puis le coefficient de corrélation linéaire du couple $(Y_i, Y_j)$, noté $\rho(Y_i, Y_j)$.
**18.d.** Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Établir

$$\mathbb{P}_{[Y_i=1]}\big([Y_j = 1]\big) = \frac{a+1}{a+b+1}$$

**18.e.** Compléter le programme suivant de sorte que l'exécution de **simuleY1Y2(a,b)** renvoie une réalisation du couple $(Y_1, Y_2)$.

```
import numpy.random as rd

def simuleY1Y2(a,b):
    if rd.random()<a/(a+b):
        Y1=1
        if ...:
            Y2=1
        else:
            Y2=0
    else :
        ...
        if ...:
            Y2=1
        else :
            Y2=0
    return (Y1,Y2)
```

**18.f.** Soient $p \in ]0;1[$ et $r \in ]0;1[$. On souhaite simuler la réalisation d'un couple $(Y_1, Y_2)$ de variables aléatoires suivant toutes deux la loi de Bernoulli de paramètre $p$ et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à $r$.

**18.f.i.** Expliquer pourquoi le programme suivant ne permet jamais d'obtenir une telle simulation.

```
import numpy.random as rd

def simule(p,r):
    Y1=rd.binomial(1,p)
    Y2=rd.binomial(1,p)
    return (Y1,Y2)
```

**18.f.ii.** Expliquer comment utiliser la fonction **simuleY1Y2()** pour répondre au problème.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★