Concours blanc 1 - Épreuve 2

Mercredi 20 novembre - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,***
- ***la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Une des clés du succès est la confiance en soi. Une des clés de la confiance en soi est la préparation."
Arthur Ashe

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

(HEC 1998 S)

1. **Questions de cours en `Python`.** Répondre aux trois questions suivantes sans utiliser la fonction **`max`** et la commande **`count`** existantes en **`Python`**.

   1.a. Écrire une fonction **`Python`** telle que l'exécution de **`monmax(L)`** renvoie, pour **`L`** une liste de réels, le maximum de ces réels.

```python
def monmax(L):
    m=L[0]
    for x in L:
        if x>m:
            m=x
    return x
```

   1.b. Écrire une fonction **`Python`** telle que l'exécution de **`monmax_bis(L)`** renvoie, pour **`L`** une liste de réels, le maximum de ces réels ainsi que le rang de sa première occurrence.

```python
def monmax_bis(L):
    m=L[0]
    rang=0
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k]>m:
            m=L[k]
            rang=k
    return m,rang
```

   1.c. Écrire une fonction **`Python`** telle que l'exécution de **`monmax_ter(L)`** renvoie, pour **`L`** une liste de réels, le maximum de ces réels ainsi que son nombre d'occurrences.

```python
def monmax_ter(L):
    m=L[0]
    c=0
    for x in L:
        if x>m:
            m=x
            c=1
        elif x==m:
            c=c+1
    return m,c
```

Petite remarque
Dans les questions 1.a et 1.c, il est aussi possible de parcourir la liste sur les rangs.

Ce problème a pour objet l'étude du nombre de fois où, dans une recherche séquentielle du maximum de n entiers distincts deux à deux, celui-ci est amené à changer de valeur au cours de l'exécution de l'algorithme.

Partie I – Quelques résultats préliminaires

Les sous-parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre, leurs résultats seront utilisés dans la suite du problème.

Sous-partie A

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel. On note $\mathscr{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Donner, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, l'expression de $P_k(x)$ en fonction de x.

   Conclusion : pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = x^k$.

3. On considère l'application φ qui à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe la fonction $\varphi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = P(x+1)$$

   3.a. Démontrer que l'application φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

   - **Endomorphisme.**

⋆ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Montrons que $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$.
Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x+1) \\ &= \lambda P(x+1) + \mu Q(x+1) \\ &= \lambda\varphi(P)(x) + \mu\varphi(Q)(x)\end{aligned}$$

par linéarité de l'évaluation en $x+1$

D'où :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$$

L'application φ est donc une application linéaire.

⋆ Soit ensuite $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Il existe alors des réels $a_0, \ldots ?a_n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.D Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Petite remarque
Cette partie n'est pas difficile, mais il faut savoir la rédiger parfaitement !

$$\varphi(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x+1)^k$$

Or, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $x \longmapsto (x+1)^k$ est une fonction polynomiale de $\mathbb{R}_n[x]$. Par conséquent, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.
On a ainsi établi :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x],\ \ \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$$

Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

- **Bijectivité.**
Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. On a :

$$\begin{aligned}P \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x+1) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x) = 0 \\ &\iff P = 0_{\mathbb{R}_n[x]}\end{aligned}$$

Par conséquent $\ker(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$ et donc φ est injective.

Conclusion : φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[x]$, donc φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

3.b. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Petite remarque
Traiter seuement $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ et $\varphi(P_n)$ semble toutefois bien insuffisant... On attend de vous un cas général !

$$\begin{aligned}\varphi(P_k)(x) &= P_k(x+1) \\ &= (x+1)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P_i(x)\end{aligned}$$

formule du binôme de Newton

Par conséquent :

$$\varphi(P_k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P_i$$

Important !
Pour remplir la matrice, il faut bien $\varphi(P_k)$ en fonction des $P_0, P_1, \ldots, P_n$... Et pas $\varphi(P_k)(x)$...

D'où :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Conclusion : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.c. Déterminer la matrice M^{-1}.
On pourra considérer l'application ψ est qui à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe la fonction $\psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(P)(x) = P(x-1)$$

- Remarquons déjà que la matrice M est inversible car φ est bijectif.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Notons $Q = \psi(P)$. On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi\big(\psi(P)\big)(x) &= \varphi(Q)(x) \\ &= Q(x+1) \\ &= P\big((x+1)-1\big) \\ &= P(x) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\varphi \circ \psi(P) = P$$

On a ainsi établi :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x],\ \varphi \circ \psi(P) = P$$

Conclusion : $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]}$, et donc $\psi = \varphi^{-1}$.

- On déduit alors :

$$M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi)$$

Et, de la même façon qu'à la question précédente, on a :

$$\forall k \in [\![0;]\!],\ \psi(P_k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} P_i$$

Petite remarque : On pourrait également justifier que M est inversible en disant qu'elle est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

Conclusion : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \dots & (-1)^{n-1} n \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. On considère $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\forall p \in [\![0;n]\!],\ b_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k$$

4.a. On note $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$. Donner une égalité reliant les matrices A, B, M.
Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Les coefficients $\binom{k}{p}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ sont les coefficients de la $p+1$-ème colonne de la matrice M. Les coefficients a_k pour $k \in [\![0, n]\!]$ sont ceux de la matrice ligne A.
Par définition du produit matriciel AM, la somme $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k$ est donc le $p+1$-ème coefficient de la matrice ligne AM. Comme elle est égale à b_p, on en déduit que les matrices lignes B et AM sont égales.

Conclusion : $B = AM$.

4.b. En déduire, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, l'expression de a_k en fonction de $b_0, \dots, b_k$.
D'après la question précédente :

$$B = AM$$

D'où, M étant inversible :

$$A = BM^{-1}$$

Autrement dit, d'après la question 3.c :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \dots & (-1)^{n-1} n \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![0;n]\!],\ a_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} b_i.$

Sous-partie B

Dans cette sous-partie, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels et g une fonction positive, continue sur $[1;+\infty[$, décroissante sur un intervalle $[c;+\infty[$ inclus dans $[1;+\infty[$ telles que :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ soit divergente ;
- $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} g(n)$.

5. On suppose que p et n sont deux entiers naturels tels que $c \leqslant p < n$.

5.a. Montrer que pour tout entier naturel $k \geqslant p$, on a :

$$g(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} g(t)dt \leqslant g(k)$$

Soit $k \in [\![p;+\infty[\![$.
La fonction g est décroissante sur $[c,+\infty[$ donc en particulier sur $[p,+\infty[$, comme $p \geqslant c$.
Puisque $k \geqslant p$, on a $[k,k+1] \subset [p,+\infty[$, d'où :

$$\forall t \in [k,k+1],\ g(k+1) \leqslant g(t) \leqslant g(k)$$

Par croissance de l'intégrale, licite car $k \leqslant k+1$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[k;k+1]$, on en déduit :

$$\int_k^{k+1} g(k+1)dt \leqslant \int_k^{k+1} g(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} g(k)dt$$

D'où finalement,

Conclusion :

$$g(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} g(t)dt \leqslant g(k)$$

5.b. En déduire :

$$\int_p^n g(t)dt \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} g(k) \leqslant g(p) + \int_p^n g(t)dt$$

En sommant l'encadrement précédent pour tout $k \in [\![p,n-1]\!]$ (licite car $p > n$), on obtient :

$$\sum_{k=p}^{n-1} g(k+1) \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_k^{k+1} g(t)dt \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} g(k)$$

Par la relation de Chasles, on en déduit :

$$\sum_{k=p}^{n-1} g(k+1) \leqslant \int_p^n g(t)dt \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} g(k)$$

En effectuant le changement d'indice $j = k+1$ dans la somme de gauche, il découle que :

$$\sum_{j=p+1}^{n} g(j) \leqslant \int_p^n g(t)dt \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} g(k)$$

Ensuite :

- l'inégalité de droite donne directement

$$\int_p^n g(t)dt \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} g(k)$$

- et en ajoutant $g(p)$ sur chaque membre de l'inégalité de gauche :

$$g(p)+\sum_{k=p+1}^{n} g(k) \leqslant \int_p^n g(t)dt+g(p)$$

D'où :

$$\sum_{k=p}^{n} g(k) \leqslant \int_p^n g(t)dt+g(p)$$

Mais g est positive, donc $g(n)\geqslant 0$ et ainsi :

$$\sum_{k=p}^{n-1} g(k) \leqslant \sum_{k=p}^{n} g(k)$$

L'inégalité voulue en découle, par transitivité.

Conclusion : $\displaystyle\int_p^n g(t)dt \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} g(k) \leqslant g(p)+\int_p^n g(t)dt.$

6. On considère un réel ε de $]0;1[$.

6.a. Montrer qu'il existe un entier naturel $p\geqslant c$ tel que pour tout $k\geqslant p$:

$$(1-\varepsilon)g(k) \leqslant w_{k+1}-w_k \leqslant (1+\varepsilon)g(k)$$

Par hypothèse, la suite $\big(g(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}-w_n}{g(n)}=1$$

Par définition de la convergence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 1 :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant N \Rightarrow |u_n-1|\leqslant\varepsilon)$$

On en déduit, puisque $\varepsilon>0$, qu'il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant N,\ \left|\frac{w_{n+1}-w_n}{g(n)}-1\right|\leqslant\varepsilon$$

Ce qui se réécrit :

$$\forall n\geqslant N,\ -\varepsilon\leqslant \frac{w_{n+1}-w_n}{g(n)}-1\leqslant\varepsilon$$

Puis finalement, comme g est positive sur $[1;+\infty[$:

$$\forall n\geqslant N,\ (1-\varepsilon)g(n)\leqslant w_{n+1}-w_n\leqslant(1+\varepsilon)g(n)$$

On pose enfin $p=\max(c,N)$: il convient.

✘ Attention ! Il fallait justifier l'existence d'un $p\geqslant c$... D'où cette étape !

Conclusion : $\forall n\geqslant p,\ (1-\varepsilon)g(n)\leqslant w_{n+1}-w_n\leqslant(1+\varepsilon)g(n)$.

6.b. En déduire que pour tout entier $n>p$:

$$(1-\varepsilon)\int_1^n g(t)dt-(1-\varepsilon)\int_1^p g(t)dt+w_p\leqslant w_n\leqslant(1+\varepsilon)\int_1^n g(t)dt+(1+\varepsilon)g(p)+w_p$$

Soit $n>p$. Alors $n-1\geqslant p$. En sommant l'encadrement précédent pour tout $k\in[\![p,n-1]\!]$, on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=p}^{n-1} g(k)\leqslant\sum_{k=p}^{n-1} w_{k+1}-w_k\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{k=p}^{n-1} g(k)$$

Par télescopage, on en déduit :

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=p}^{n-1} g(k)\leqslant w_n-w_p\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{k=p}^{n-1} g(k)$$

Ensuite, d'après la question 5.b :

- $\displaystyle\int_p^n g(t)dt\leqslant\sum_{k=p}^{n-1} g(k)$ et comme $1-\varepsilon>0$, on a :

$$(1-\varepsilon)\int_p^n g(t)dt\leqslant(1-\varepsilon)\sum_{k=p}^{n-1} g(k)$$

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} g(k) \leqslant g(p) + \int_p^n g(t)dt$ et comme $1+\varepsilon > 0$, on a :

$$(1+\varepsilon)\sum_{k=p}^{n-1} g(k) \leqslant (1+\varepsilon)g(p) + (1+\varepsilon)\int_p^n g(t)dt$$

D'où par transitivité :

$$(1-\varepsilon)\int_p^n g(t)dt \leqslant w_n - w_p \leqslant (1+\varepsilon)\int_p^n g(t)dt + (1+\varepsilon)g(p)$$

Enfin :

- sur l'inégalité de gauche :

  Par la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_1^n g(t)dt = \int_1^p g(t)dt + \int_p^n g(t)dt$, donc $\displaystyle\int_p^n g(t)dt = \int_1^n g(t)dt - \int_1^p g(t)dt$
- sur l'inégalité de droite :

  Puisque g est positive sur $[1;+\infty[$ et que $p \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_p^n g(t)dt \leqslant \int_1^n g(t)dt$... d'où l'inégalité voulue, puisque $1+\varepsilon > 0$ et par transitivité...

Conclusion :

$$\forall n > p,\ (1-\varepsilon)\int_1^n g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^p g(t)dt + w_p \leqslant w_n \leqslant (1+\varepsilon)\int_1^n g(t)dt + (1+\varepsilon)g(p) + w_p$$

7. Montrer finalement :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n g(t)dt$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ étant une intégrale divergente d'une fonction positive, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^n g(t)dt = +\infty$.

On en déduit qu'à partir d'un certain rang, l'intégrale $\displaystyle\int_1^n g(t)dt$ est strictement positive.

Petite remarque
Question difficile, qu'il ne faut pas hésiter à passer.

En divisant par $\displaystyle\int_1^n g(t)dt$ dans l'encadrement précédent, on obtient :

$$(1-\varepsilon) - (1-\varepsilon)\frac{\int_1^p g(t)dt}{\int_1^n g(t)dt} + \frac{w_p}{\int_1^n g(t)dt} \leqslant \frac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} \leqslant (1+\varepsilon) + (1+\varepsilon)\frac{g(p)}{\int_1^n g(t)dt} + \frac{w_p}{\int_1^n g(t)dt}$$

Par opérations sur les limites, le membre de droite tend vers $1+\varepsilon$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc un rang N tel que :

$$\forall n \geqslant N,\ (1+\varepsilon) + (1+\varepsilon)\frac{g(p)}{\int_1^n g(t)dt} + \frac{w_p}{\int_1^n g(t)dt} \leqslant 1 + 2\varepsilon$$

De même, par opérations sur les limites, le membre de gauche tend vers $1-\varepsilon$, il existe donc un rang N' tel que :

$$\forall n \geqslant N',\ 1 - 2\varepsilon \leqslant (1-\varepsilon) - (1-\varepsilon)\frac{\int_1^p g(t)dt}{\int_1^n g(t)dt} + \frac{w_p}{\int_1^n g(t)dt}$$

On en déduit, que pour tout entier naturel $n \geqslant \max(N, N')$:

$$1 - 2\varepsilon \leqslant \frac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} \leqslant 1 + 2\varepsilon$$

On vient de montrer :

$$\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists K \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant K,\ 1 - 2\varepsilon \leqslant \frac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} \leqslant 1 + 2\varepsilon$$

Autrement dit, la suite $\left(\dfrac{w_n}{\int_1^n g(t)dt}\right)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$ converge vers 1...

Conclusion : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_1^n g(t)dt$.

8. En utilisant ce qui vient d'être démontré, établir : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Posons $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$.

- ✓ La fonction g est positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.
- ✓ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ divergente.

Posons ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Alors on a :

- ✓ $$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} = g(n)$$

D'après ce qu'on a démontré dans le cas général, on en déduit :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n g(t)dt$$

Or, pour tout entier naturel non nul,

$$\begin{aligned}\int_1^n g(t)dt &= \big[\ln(t)\big]_1^n \\ &= \ln(n)\end{aligned}$$

Conclusion : On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Partie II – Étude d'un algorithme

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

On considère la fonction **Python** suivante

```python
def maximum(L,i):
    maxi=L[0]
    for k in range(1,i):
        if L[k]>maxi:
            maxi=L[k]
    return maxi
```

où L désigne une liste de n entiers deux à deux distincts.

9. On suppose $n \geqslant 10$. Quel sera le résultat renvoyé par l'exécution de la commande `maximum(L,10)` ?
Lors de l'exécution de la commande `maximum(L,10)`, la boucle `for` permettra de parcourir les éléments situés en positions 1 à 9 de la liste ; et la variable `maxi`, initialisée au premier élément de la liste, prendra alors comme valeur le plus grand entier parmi les éléments situés en positions 0 à 9.

Conclusion : l'exécution de la commande `maximum(L,10)` renvoie le maximum des entiers situés sur les 10 premières "cases" de la liste `L`.

10. Quel sera le résultat renvoyé par l'exécution de la commande `maximum(L,len(L))` ?
Dans ce cas, la boucle `for` permet de parcourir tous les éléments de la liste `L`, excepté le premier.

Conclusion : l'exécution de la commande `maximum(L,len(L))` renvoie le maximum des entiers de la liste `L`.

11. On considère n entiers deux à deux distincts et on suppose que ces nombres sont affectés aux n "cases" de `L`, variable représentant une liste en **Python**.

11.a. Quel est le nombre de rangements possibles de ces n entiers dans les n "cases mémoires" `L[0],L[1],...,L[n-1]` ?

Un rangement des n nombres dans les n cases s'assimile à une permutation de $\{1;\ldots;n\}$. Or il y a $n!$ permutations possibles sur un ensemble à n éléments.

Conclusion : il y a $n!$ rangements possibles de ces n entiers dans les n "cases" de `L`.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note $V(i,n)$ le nombre de rangements des n entiers dans les n "cases mémoires" **`L[0],L[1],...,L[n-1]`** tels que l'appel de **`maximum(L,n)`** provoque i affectations de la variable **`maxi`** au cours de son exécution.
On admettra que ce nombre $V(i,n)$ est indépendant des n entiers initiaux pourvu toutefois qu'ils soient deux à deux distincts.
Par convention, on pose $V(0,n)=0$ et $V(k,n)=0$ lorsque $k>n$.

11.b. Vérifier qu'effectivement, le nombre d'affectations possibles de la variable **`maxi`** au cours de l'exécution de **`maximum(L,n)`** appartient à $[\![1;n]\!]$.

Au cours de l'exécution de **`maximum(L,n)`**, la variable **`maxi`** subit :

- toujours une première affectation (en ligne 2 du programme) ;
- zéro ou une affectation par valeur différente de **`k`** dans la boucle. Puisque **`k`** parcourt **`range(1,n)`**, la variable **`k`** prend exactement $n-1$ valeurs différentes.

> **Conclusion :** le nombre d'affectations possibles de la variable **`maxi`** au cours de l'exécution de `maximum(L,n)` appartient à $[\![1;n]\!]$.

11.c. On considère ici que **`L`** contient les entiers de $\{1;2;\dots;n\}$ dans l'ordre décroissant ; autrement dit : **`L[0]=n`**, **`L[1]=n-1`**, ..., **`L[n-1]=1`**.

11.c.i. Écrire un script **Python** permettant de créer une telle liste.

Donnons deux exemples :

```python
def liste(n):
    L=[]
    for k in range(1,n+1):
        L=[k]+L
    return L

def liste_bis(n):
    L=[n-k for k in range(0,n)]
    return L
```

11.c.ii. Quel est, dans ce cas, le nombre d'affectations de la variable **`maxi`** au cours de l'exécution de **`maximum(L,n)`** ?

Dans ce cas, au cours de l'exécution de **`maximum(L,n)`**, la variable **`maxi`** subit :

- toujours une première affectation (en ligne 2 du programme) ;
- zéro affectation dans la boucle **`for`** puisqu'aucune des valeurs suivantes dans la liste n'est strictement supérieure à `L[0]`.

> **Conclusion :** dans ce cas, le nombre d'affectations possibles de la variable **`maxi`** au cours de l'exécution de **`maximum(L,n)`** est égal à 1.

11.d. On revient au cas général. Montrer que $V(1,n)=(n-1)!$ et déterminer $V(n,n)$.

- On sait que $V(1,n)$ est le nombre de rangements tels que la variable **`maxi`** subit une seule affectation lors de l'appel de **`maximum(L,n)`**.
  Or, la variable **`maxi`** subit toujours au moins la première affectation (celle de la ligne 2) ; par conséquent, elle ne subit qu'une seule affectation si, et seulement si, elle n'en subit aucune dans la boucle **`for`** ; si, et seulement si, `L[0]` est strictement supérieur à tous les autres éléments de `L`.
  Par conséquent, un tel rangement est un rangement pour lequel le maximum de `L` est placé dans `L[0]`.
  Définir un tel rangement, c'est donc :
  - ⋆ placer le plus grand des n entiers dans `L[0]` : 1 seule possibilité ;
  - ⋆ ranger les $n-1$ autres entiers dans les $n-1$ autres cases de `L` : $(n-1)!$ possibilités.

  > **Conclusion :** $V(1,n)=(n-1)!$.

- On sait que $V(n,n)$ est le nombre de rangements tels que la variable **`maxi`** subit n affectations lors de l'appel de **`maximum(L,n)`**.
  Or, la variable **`maxi`** subit toujours au plus n affectations (question 11.b) ; par conséquent, elle en subit n si, et seulement si, elle en subit une à chaque incrémentation de k dans la boucle **`for`** ; si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1;n-2]\!]$, on a `L[k]<L[k+1]`.
  Il n'y a qu'un seul rangement qui convient : c'est le rangement des n entiers dans l'ordre croissant.

  > **Conclusion :** $V(n,n)=1$.

11.e. 11.e.i. Supposons que $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, $V(i,n+1)=V(i-1,n)+nV(i,n)$.
*On pourra distinguer les rangements de n+1 entiers entiers deux à deux distincts dans **`L[0],...,L[n]`** selon que **`L[n]`** contient ou non le plus grand de ces $n+1$ entiers.*

Soit $i \in [\![2;n]\!]$. Notons $\mathscr{R}_i$ l'ensemble des rangements de $n+1$ entiers provocant i affectations de `maxi`, ainsi que $\mathscr{R}'_i$ (respectivement $\mathscr{R}''_i$) le sous-ensemble de $\mathscr{R}_i$ contenant les rangements pour lesquels `L[n]` est (respectivement n'est pas) le maximum des $n+1$ entiers.
De la sorte :

$$\mathscr{R}_i = \mathscr{R}'_i \cup \mathscr{R}''_i \quad ; \quad \mathscr{R}'_i \cap \mathscr{R}''_i = \varnothing$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} V(i, n+1) &= \mathrm{Card}(\mathscr{R}_i) \\ &= \mathrm{Card}(\mathscr{R}'_i \cup \mathscr{R}''_i) \\ &= \mathrm{Card}(\mathscr{R}'_i) + \mathrm{Card}(\mathscr{R}''_i) && \mathscr{R}'_i \cap \mathscr{R}''_i = \varnothing \end{aligned}$$

Ensuite :

- Lors de l'exécution de l'algorithme sur un rangement de $\mathscr{R}'_i$, la variable `maxi` subit nécessairement une affectation à la dernière incrémentation de `k` dans la boucle `for`. Par conséquent, définir un rangement de $\mathscr{R}'_i$ c'est :
  - ⋆ placer le plus grand des $n+1$ entiers dans `L[n]` : 1 seule possibilité ;
  - ⋆ ranger les n autres entiers de sorte que lors de l'exécution de l'algorithme, la variable `maxi` subisse $i-1$ affectations : $V(i-1, n)$ possibilités.

  Par conséquent :
  $$\mathrm{Card}(\mathscr{R}'_i) = V(i-1, n)$$
- Lors de l'exécution de l'algorithme sur un rangement de $\mathscr{R}''_i$, la variable `maxi` ne subira pas d'affectation à la dernière incrémentation de `k` dans la boucle `for` (car le maxim est dans les n premières cases). Par conséquent, définir un rangement de $\mathscr{R}''_i$ c'est :
  - ⋆ placer un des n entiers différents du maximum dans `L[n]` : n possibilités ;
  - ⋆ ranger les n autres entiers de sorte que lors de l'exécution de l'algorithme, la variable `maxi` subisse i affectations : $V(i, n)$ possibilités.

  Par conséquent :
  $$\mathrm{Card}(\mathscr{R}''_i) = n\,V(i, n)$$

Conclusion : pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, $V(i, n+1) = V(i-1, n) + n\,V(i, n)$.

11.e.ii. Montrer que la relation de la question précédente s'étend aux cas $i = 1$ et $i = n+1$.
D'après les conventions mentionnées avant la question **11.b** :

- Pour $i = 1$:
$$\begin{aligned} V(i-1, n) + n\,V(i, n) &= V(0, n) + n\,V(1, n) \\ &= n\,V(1, n) \\ &= n(n-1)! && \text{question 11.d} \\ &= n! \\ &= V(1, n+1) && \text{question 11.d} \\ &= V(i, n+1) \end{aligned}$$
- Pour $i = n+1$:
$$\begin{aligned} V(i-1, n) + n\,V(i, n) &= V(n, n) + n\,V(n+1, n) \\ &= V(n, n) && \text{question 11.d} \\ &= 1 && \text{question 11.d} \\ &= V(n+1, n+1) \\ &= V(i, n+1) \end{aligned}$$

Conclusion : la relation de la question précédente s'étend aux cas $i = 1$ et $i = n+1$.

11.e.iii. Montrer qu'elle est encore vraie si $n = 1$ et $1 \leqslant i \leqslant 2$.
Supposons $n = 1$.

- Pour $i = 1$:
$$\begin{aligned} V(i-1, n) + n\,V(i, n) &= V(0, 1) + 1V(1, 1) \\ &= V(1, 1) \\ &= 1 && \text{question 11.d} \\ &= (2-1)! \\ &= V(1, 2) \\ &= V(i, n+1) \end{aligned}$$

- Pour $i = 2$:

$$\begin{aligned} V(i-1,n) + nV(i,n) &= V(1,1) + 1V(2,1) \\ &= V(1,1) \\ &= 1 && \text{question } \mathbf{11.d} \\ &= V(2,2) && \text{question } \mathbf{11.d} \\ &= V(i,n+1) \end{aligned}$$

> **Conclusion :** la relation encore vraie si $n = 1$ et $1 \leqslant i \leqslant 2$.
> On a ainsi :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1; n+1]\!],\ V(i,n+1) = V(i-1,n) + nV(i,n)$$

11.f. On considère la fonction polynomiale $P_n : x \longmapsto \sum\limits_{i=0}^{n} V(i,n)x^i$.

11.f.i. Établir : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = (n+x)P_n(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{i=0}^{n+1} V(i,n+1)x^i && V(0,n+1) = 0 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} V(i,n+1)x^i && \text{relation de la question } \mathbf{11.e}\text{, licite pour tout } i \in [\![1; n+1]\!] \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \big(V(i-1,n) + nV(i,n)\big)x^i && \text{linéarité de la somme} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} V(i-1,n)x^i + n\sum_{i=1}^{n+1} V(i,n)x^i && j = i-1 \text{ dans la première somme} \\ &= \sum_{j=0}^{n} V(j,n)x^{j+1} + n\sum_{i=1}^{n+1} V(i,n)x^i && V(n+1,n) = 0 \text{ et } V(0,n) = 0 \\ &= x\sum_{j=0}^{n} V(j,n)x^j + n\sum_{i=0}^{n} V(i,n)x^i \\ &= (x+n)P_n(x) \end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = (n+x)P_n(x)$.

11.f.ii. En déduire, pour tout réel x, l'expression de $P_n(x)$ en fonction de x.

Démontrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(i+x)$$

> **♣ Méthode !**
> Face à ce genre de question, avec la question précédente, on commence par calculer $P_0(x)$, puis $P_1(x)$, puis $P_2(x)$... on conjecture puis récurrence !

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= V(0,1)x^0 + V(1,1)x && \text{question } \mathbf{11.d} \\ &= x \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\prod_{i=0}^{1-1}(i+x) = x$$

On a ainsi établi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = \prod_{i=1}^{1-1}(i+x)$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons "$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \prod\limits_{i=0}^{n-1}(i+x)$" et montrons "$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(i+x)$".
  D'après la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_{n+1}(x) = (n+x)P_n(x) \qquad \text{hypothèse de récurrence}$$

$$= (n+x)\prod_{i=0}^{n-1}(i+x)$$
$$= \prod_{i=0}^{n}(i+x)$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(i+x).$

11.g. On pose $G_n : x \longmapsto \frac{1}{n!}P_n(x)$.

11.g.i. Calculer $G_n(1)$.

$$G_n(1) = \frac{1}{n!}P_n(1)$$
$$= \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(i+1) \qquad \text{question précédente}$$
$$= \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}k \qquad k = i+1$$
$$= \frac{1}{n!}n!$$
$$= 1$$

Petite remarque

Il est possible de procéder sans utiliser la question précédente (dont le résultat n'est, il est vrai, pas donné...). On obtient $G_n(1) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}V(i,n)$.
Or, pour chaque rangement, il existe un unique $i \in [\![0;n]\!]$, tel que ce rangement provoque $V(i,n)$ affectations de `maxi` lors de l'exécution de l'algorithme.
Donc $\sum_{i=0}^{n}V(i,n)$ totalise l'ensemble des rangements possibles... et il y en a $n!$.

Conclusion : $G_n(1) = 1$.

11.g.ii. Exprimer, pour tout réel x, $G_{n+1}(x)$ à l'aide de $G_n(x)$ puis en déduire :

$$G'_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}G_n(x) + \frac{n+x}{n+1}G'_n(x)$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}P_{n+1}(x)$$
$$= \frac{n+x}{n+1}G_n(x) \qquad \text{question } 11.\text{f.i}$$

- Puisque P_n est polynomiale, G_n l'est également. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, G_{n+1} est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}G_n(x) + \frac{n+x}{n+1}G'_n(x)$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ G'_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}G_n(x) + \frac{n+x}{n+1}G'_n(x).$

11.g.iii. En déduire :

$$G'_n(1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

D'après la question précédente :

$$G'_{n+1}(1) = \frac{1}{n+1}G_n(1) + \frac{n+1}{n+1}G'_n(1)$$
$$= G'_n(1) + \frac{1}{n+1} \qquad \text{question } 11.\text{g.i}$$

Procédons maintenant par récurrence pour démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G'_n(1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P_1(x) = x$, donc $G_1(x) = x$.
D'où $G'_1(1) = 1$. L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $G_n'(1) = \sum_{i1}^{n} \frac{1}{i}$. Montrons $G_{n+1}'(1) = \sum_{i=}^{n+1} \frac{1}{i}. =$

  On a, d'après ce qui vient d'être fait :

$$\begin{aligned} G_{n+1}'(1) &= = G_n'(1) + \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

hypothèse de récurrence

  L'hérédité est donc établie.

Conclusion : $G_n'(1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Autre méthode si le résultat n'est pas donné !

On a établi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ G_{k+1}'(1) - G_k'(1) = \frac{1}{k+1}$$

Distinguons à présent deux cas :

- Si $n \geqslant 2$:
  En sommant la relation précédente de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(G_{k+1}'(1) - G_k'(1) \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

  Autrement dit, par télescopage de la somme de gauche et changement d'indice $i = k+1$ dans la somme de droite :

$$G_n'(1) - G_1'(1) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$$

  Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G_1(x) = x$, d'où $G_1'(1) = 1$.
  Par conséquent :

$$\begin{aligned} G_n'(1) &= 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

- Si $n = 1$:
  La relation est encore valable, puisque $G_1'(1) = 1$.

Conclusion : $G_n'(1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

12. Considérant n entiers deux à deux distincts, on les range aléatoirement dans les n "cases" `L[0],...,L[n-1]` d'une liste `L`.
Tous les rangements possibles constituent les évènements élémentaires d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; ces rangements étant de probabilités égales.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'affectations de la variable **`maxi`** au cours de l'exécution de **`maximum(L,n)`**.

12.a. Donner $X_n(\Omega)$.

Petite remarque
L'inclusion $X_n(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$ est en fait justifiée en question 11.b.

Conclusion : $X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

Démontrons cette égalité

Par double inclusion...

$\boxed{\subset}$ Découle de la question 11.b.

$\boxed{\supset}$ Montrons que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $[X_n = k] \neq \varnothing$.
Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Exhibons une issue réalisant l'évènement $[X_n = k]$. Autrement dit, donnons un rangement appartenant à $[X_n = k]$.
Notons $r_1, \ldots, r_n$ les n entiers considérés et supposons que $r_1 < r_1 < \ldots < r_n$. Assimilons un tel rangement à un n-uplet. Considérons le n-uplet suivant :

$$(r_{n-k+1}, r_{n-k+2}, \ldots, r_n, r_{n-k}, r_{n-k-1}, \ldots, r_1)$$

Autrement, c'est le n-uplet constitué (de gauche à droite) k plus grands entiers $r_1, \ldots, r_n$ dans l'ordre croissant puis des $n-k$ restants dans l'ordre décroissant.
Ce rangement provoque k affectations de la variable **`maxi`** lors de l'exécution de l'algorithme.

Autrement dit :
On cherche **un** rangement tel que l'exécution de l'algorithme sur ce rangement provoque k affectations de la variable **`maxi`**.

12.b. Exprimer, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([X_n = i])$ en fonction de $V(i,n)$ et n.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On sait que :

- tous les rangements de Ω sont équiprobables ;
- il y a $V(i,n)$ rangements réalisant l'évènement $[X_n = i]$;
- il y a $n!$ rangements possibles dans Ω.

Conclusion : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([X_n = i]) = \dfrac{V(i,n)}{n!}$.

12.c. Déterminer l'espérance de X_n.

Puisque $X_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$ (ensemble fini), la variable aléatoire X_n admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}([X_n = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{iV(i,n)}{n!} && \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} iV(i,n) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} iV(i,n) \\
&= G_n'(1) && \forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} V(i,n)x^i, \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R},\ G_n'(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} iV(i,n)x^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} && \text{question 11.g.iii}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X_n) = G_n'(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

12.d. Montrer que si n est supérieur ou égal à 2, alors $\mathbb{P}([X_n = 2]) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$.

Donner un équivalent simple de $\mathbb{P}([X_n = 2])$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- Supposons que $n \geqslant 2$. D'après la question 11.e :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ V(2,k+1) = V(1,k) + kV(2,k)$$

Autrement dit, d'après la question 11.d :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ V(2,k+1) - kV(2,k) = (k-1)!$$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{V(2,k+1)}{k!} - \frac{kV(2,k)}{k!} = \frac{(k-1)!}{k!}$$

Par conséquent :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{V(2,k+1)}{k!} - \frac{V(2,k)}{(k-1)!} = \frac{1}{k}$$

En sommant de 1 à $n-1$, licite car $n \geqslant 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{V(2,k+1)}{k!} - \frac{V(2,k)}{(k-1)!} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Par télescopage, il reste :

$$\frac{V(2,n)}{(n-1)!} - \frac{V(2,1)}{1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Or $V(2,1) = 0$...
Par conséquent :

$$V(2,n) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Conclusion : d'après la question 12.b, il vient $\mathbb{P}([X_n = 2]) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$.

- D'après la question 8, on a :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n-1)$$

Par conséquent, d'après le point précédent :

$$\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n-1)}{n}$$

Ensuite, on sait que, pour n suffisamment proche de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(n-1) &= \ln\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \ln(n) + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Important ! On ne s'arrête pas à $\ln(n-1)$... car on sait que $\ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, il faut simplement le redémontrer.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

13. 13.a. Montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $(n+1)\mathbb{P}\big([X_{n+1} = i]\big) - n\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) = \mathbb{P}\big([X_n = i-1]\big)$.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}(n+1)\mathbb{P}\big([X_{n+1} = i]\big) - n\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) &= (n+1)\frac{V(i,n+1)}{(n+1)!} - n\frac{V(i,n)}{n!}\\ &= \frac{V(i,n+1) - nV(i,n)}{n!}\\ &= \frac{V(i-1,n)}{n!}\\ &= \mathbb{P}\big([X_n = i-1]\big)\end{aligned}$$

question 11.e, licite car $i \in [\![1;n]\!]$

Conclusion : pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $(n+1)\mathbb{P}\big([X_{n+1} = i]\big) - n\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) = \mathbb{P}\big([X_n = i-1]\big)$.

13.b. En utilisant les résultats de la partie I.B, montrer alors par récurrence que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_n = i]\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!n}\big(\ln(n)\big)^{i-1}$$

- **Initialisation.** Pour $i = 1$:
D'après les questions 12.b et 11.d, on a d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) = \frac{1}{n}$$

Et d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(1-1)!n}\big(\ln(n)\big)^{1-1} = \frac{1}{n}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!n}\big(\ln(n)\big)^{i-1}$ et montrons $\mathbb{P}\big([X_n = i+1]\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{i!n}\big(\ln(n)\big)^{i}$.
Pour tout n suffisamment proche de $+\infty$, on a $i+1 \in [\![1;n]\!]$ et donc, d'après la question précédente :

$$(n+1)\mathbb{P}\big([X_{n+1} = i+1]\big) - n\mathbb{P}\big([X_n = i+1]\big) = \mathbb{P}\big([X_n = i]\big)$$

Or, par hypothèse de récurrence : $\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!n}\big(\ln(n)\big)^{i-1}$.
Autrement dit :

$$(n+1)\mathbb{P}\big([X_{n+1} = i+1]\big) - n\mathbb{P}\big([X_n = i+1]\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!n}\big(\ln(n)\big)^{i-1}$$

Posons donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = n\mathbb{P}\big([X_n = i+1]\big)$$

ainsi que la fonction $g : t \longmapsto \frac{1}{(i-1)!t}\big(\ln(t)\big)^{i-1}$. Dans ce cas :

✓ $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} g(n)$

- ✓ g est positive sur $[1;+\infty[$, continue sur ce même intervalle comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
- ✓ La fonction g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout $t \in]1;+\infty[$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{(i-1)!} \frac{(i-1)\frac{1}{t}\ln(t)^{i-2}t - \ln(t)^{i-1}}{t^2} \\ &= \frac{\ln(t)^{i-2}}{(i-1)!}\Big((i-1)-\ln(t)\Big) \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in]1;+\infty[$:

◇ $\ln(t)^{i-2} \geqslant 0$;

◇ et :

$$\begin{aligned} i-1-\ln(t) \geqslant 0 &\iff \ln(t) \leqslant i-1 \\ &\iff t \leqslant e^{i-1} \qquad \text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}$$

Puisque $i-1 \geqslant 0$, on a $e^{i-1} \geqslant 1$ et donc la fonction g est décroissante sur $[e^{i-1};+\infty[$.

- ✓ Ensuite, pour tout $B \in [1;+\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_1^B g(t)dt &= \frac{1}{(i-1)!}\int_1^B \frac{1}{t}\Big(\ln(t)\Big)^{i-1}dt \qquad i-1 \neq -1 \\ &= \frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{1}{i}\Big(\ln(t)\Big)^i\right]_1^B \\ &= \frac{\Big(\ln(B)\Big)^i}{i!} \end{aligned}$$

Or $i > 0$, donc $\lim\limits_{B\to+\infty}\Big(\ln(B)\Big)^i = +\infty$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est divergente.

Les hypothèses de la partie I.B sont ainsi vérifiées. On en déduit :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n g(t)dt$$

Le calcul du point précédent fournit alors :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^i}{i!}$$

Autrement dit :

$$n\mathbb{P}\Big([X_n = i+1]\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^i}{i!}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}\Big([X_n = i+1]\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{i!n}\Big(\ln(n)\Big)^i$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\Big([X_n = i]\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(i-1)!n}\Big(\ln(n)\Big)^{i-1}$.

Partie III – Calcul de l'inverse d'une certaine matrice

On désigne toujours par n un entier naturel non nul, et $V(i,n)$ a toujours la même signification qu'on lui a attribuée dans la partie II. On convient que $V(0,0) = 0$ et $V(i,0) = 0$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2$, $a_{i,j} = (-1)^{j-i}V(i-1,j-1)$.

14. Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ et tout réel x, on a $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(x-i) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}V(i,k)x^i$.

Soient $k \in [\![1;n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Par définition de P_k, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} V(i,k)y^i &= P_k(y) \qquad \text{question 11.f.ii} \\ &= \prod_{i=0}^{k-1}(i+y) \end{aligned}$$

Avec $y = -x$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{k} V(i,k)(-x)^i = \prod_{i=0}^{k-1}(i-x)$$

Et ainsi, en multipliant par $(-1)^k$:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}V(i,k)x^i = \prod_{i=0}^{k-1}-(i-x)$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ et tout réel x, on a $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(x-i) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}V(i,k)x^i$.

15. On définit la famille de fonctions polynomiales $(N_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ N_0(x) = 1$$

et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ N_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$$

15.a. Montrer que $(N_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

La famille $(N_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une famille de $\mathbb{R}_n[x]$ qui est :

- ✓ libre car constituée de fonctions polynomiales échelonnées en degré (en effet, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\deg(N_k) = k$) ;
- ✓ de cardinal $n+1$ égal à $\dim\big(R_n[x]\big)$.

Conclusion : $(N_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

15.b. Quelle est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, notée $(P_0, \dots, P_n)$, vers la base $(N_0, \dots, N_n)$?

Pour déterminer cette matrice de passage, exprimons, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, la fonction polynomiale N_k en fonction de $P_0, \dots, P_n$.
D'après la question **14**, on a, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$:

$$\begin{aligned} N_k &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}V(i,k)P_i \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_{i+1,k+1}P_i \\ &= a_{1,k+1}P_0 + \dots + a_{n,k+1}P_k \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]$, le coefficient situé en ligne i et colonne j de la matrice recherchée est égal à $a_{i,j}$.

Conclusion : la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ à la base $(N_0, \dots, N_n)$ est la matrice A.

16. 16.a. Justifier que la matrice A est inversible.

Conclusion : A est inversible car, d'après la question précédente, c'est une matrice de passage (de la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ à la base $(N_0, \dots, N_n)$).

Petite remarque

Le seul argument "A est inversible car c'est une matrice de passage", sans avoir traité la question précédente ne peut pas rapporter de points ! En effet, toutes les matrices inversibles sont des matrices de passage... C'est donc un argument qui fonctionne, en théorie, toujours ! Il faut donc être plus précis.

Pour tout $(i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2$, on note $\omega(i-1, j-1)$ l'élément situé sur la i-ème ligne et j-ième colonne de la matrice A^{-1}.

16.b. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\omega(k,n)N_k(x)$.

Puisque A est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ vers la base $(N_0, \dots, N_n)$, la matrice A^{-1} est la matrice de passage de la base $(N_0, \dots, N_n)$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
Par conséquent, en interprétant seulement la dernière colonne de A^{-1} :

$$\begin{aligned} P_n &= \omega(0,n)N_0 + \dots + \omega(n,n)N_n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\omega(k,n)N_k \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\omega(k,n)N_k(x)$.

17. 17.a. Pour tout $p \in [\![0;n]\!]$, comparer p^n et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}k!\omega(k,n)$.

Soit $p \in [\![0;n]\!]$. D'après la question précédente :

$$p^n = \sum_{k=0}^{n}\omega(k,n)N_k(p)$$

Or :

- $N_0(p) = 1$;
- pour tout $k \in [\![1;n]\!]$:

$$N_k(p) = \prod_{i=0}^{k-1}(p-i)$$

Distinguons deux cas :

⋆ Si $k-1 \geqslant p$, autrement dit, si $k \geqslant p+1$:

Dans ce cas, le produit $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(p-i)$ contient le facteur $(p-p)$...

Et donc, dans ce cas :

$$N_k(p) = 0$$

⋆ Si $k-1 < p$, autrement dit, si $k \leqslant p$:

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} N_k(p) &= \prod_{i=0}^{k-1}(p-i) \\ &= p(p-1)\dots(p-k+1) \\ &= \frac{p!}{(p-k)!} \\ &= \binom{p}{k}k! \end{aligned}$$

Les cas $k=0$ et $k \in [\![1;p]\!]$ se regroupent...

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ N_k(p) = \begin{cases} \binom{p}{k}k! & \text{si } k \in [\![0;p]\!] \\ 0 & \text{si } k > p \end{cases}$$

D'où le résultat.

Conclusion : $\forall p \in [\![0;n]\!],\ p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}k!\omega(k,n)$.

17.b. En utilisant les résultats de la partie I.A, donner une expression de $\omega(k,n)$.

Posons :

- pour tout $p \in [\![0;n]\!],\ b_p = p^n$;
- pour tout $k \in [\![0;n]\!],\ a_k = k!\omega(k,n)$.

De la sorte, on a, d'après la question précédente :

$$\forall p \in [\![0;n]\!],\ b_p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a_k$$

D'après la question 4.b, on obtient :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ a_k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}b_i$$

Autrement dit :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ k!\omega(k,n) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}i^n$$

Conclusion : $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \omega(k,n) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}i^n$.

Partie IV - Interprétation des nombres $\omega(k, n)$

Dans cette partie, n désignera encore un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel non nul k, on appelle k-partition de $[\![1; n]\!]$, tout ensemble $\{A_1, \dots, A_k\}$ dont les éléments A_i sont des parties non vides de $[\![1; n]\!]$, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à $[\![1; n]\!]$.
On note $s(k, n)$ le nombre de k-partitions de $[\![1; n]\!]$ et on convient que $s(0, n) = 0$.

18. En justifiant rapidement, donner $s(1, 1)$, $s(n, n)$, $s(1, n)$ et $s(k, n)$ lorsque k est un entier strictement supérieur à n.

- Il y a une seule 1-partition de $\{1\}$: $\big\{\{1\}\big\}$.
  Donc $s(1, 1) = 1$.
- Il y a une seule n-partition de $[\![1; n]\!]$: $\big\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\big\}$.
  Donc $s(n, n) = 1$.
- Il y a une seule 1-partition de $[\![1; n]\!]$: $\big\{\{1, 2, \dots, n\}\big\}$.
  Donc $s(1, n) = 1$.
- Puisque $[\![1; n]\!]$ ne contient que n éléments distincts, il n'existe pas, pour $k \in [\![n+1; +\infty[\![$, de k-partition de $[\![1; n]\!]$.
  Donc pour tout $k \in [\![n+1; +\infty[\![$, $s(k, n) = 0$.

Conclusion : $s(1, 1) = 1$, $s(n, n) = 1$, $s(1, n) = 1$ et pour tout $k \in [\![n+1; +\infty[\![$, $s(k, n) = 0$.

19. Soit p un entier naturel non nul.

19.a. Rappeler le nombre de n-uplets dont les éléments appartiennent à $[\![1; p]\!]$.

Choisir un n-uplet dont les éléments appartiennent à $[\![1; p]\!]$ c'est :

- choisir un premier élément : p choix possibles,
- puis choisir un second élément : p choix possibles,...
- ...
- choisir un n-ième élément : p choix possibles.

Conclusion : il y a p^n n-uplets dont les éléments appartiennent à $[\![1; p]\!]$.

19.b. Soit $k \in [\![1; p]\!]$. Déterminer le nombre de n-uplets composés de k éléments différents de $[\![1; p]\!]$.

Distinguons deux cas :

- Si $k > n$:
  Il est impossible de composer un n-uplet avec plus de n éléments différents. Ce nombre est donc nul.
- Si $k \in [\![1; n]\!]$.
  Choisir un n-uplet composé de k éléments différents de $[\![1; p]\!]$, c'est :
  - ⋆ choisir k éléments différents de $[\![1; p]\!]$: $\displaystyle\binom{p}{k}$ choix possibles ;
  - ⋆ découper le n-uplet en k "groupements de cases" (chaque groupement contiendra ensuite un des k entiers sélectionnés précédemment) ; autrement dit, choisir une k-partition de $[\![1; n]\!]$: $s(k, n)$ choix possibles ;
  - ⋆ associer à chaque "groupement de cases" précédemment choisi un des k entiers choisis : $k!$ choix possibles.

  il y a donc $\displaystyle\binom{p}{k} k! s(k, n)$ tels n-uplets.

Remarquons alors que, puisque $s(k, n) = 0$ si $k > n$, les deux cas se regroupent...

Conclusion : le nombre de n-uplets dont les éléments appartiennent à $[\![1; p]\!]$ est $\displaystyle\binom{p}{k} k! s(k, n)$.

19.c. En déduire : $\displaystyle p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} k! s(k, n)$.

Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des n-uplets composés d'éléments de $[\![1; p]\!]$ et, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des n-uplets composés de k éléments distincts de $[\![1; p]\!]$.
De la sorte :

$$\mathscr{E} = \bigcup_{k=1}^{p} \mathscr{E}_k \quad ; \quad \forall (i, j) \in [\![1; p]\!], \ \big(i \neq j \Longrightarrow \mathscr{E}_i \cap \mathscr{E}_j = \varnothing\big)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} p^n &= \operatorname{Card}(\mathscr{E}) \\ &= \operatorname{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} \mathscr{E}_k\right) \end{aligned}$$

union d'ensembles deux à deux disjoints

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Card}(\mathscr{E}_k) && \text{question précédente}\\
&= \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} k! s(k, n) && s(0, n) = 0\\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} k! s(k, n)
\end{aligned}
$$

Conclusion : $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} k! s(k, n)$.

20. Comparer, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, les nombres $s(k, n)$ et $\omega(k, n)$.
A partir de la question précédente et en procédant comme en question **17.b**, on obtient :

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \ s(k, n) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^n$$

Conclusion : $\forall k \in [\![0; n]\!], \ s(k, n) = \omega(k, n)$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★