Concours blanc 1 - Épreuve 2

Mercredi 20 novembre - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,***
- ***la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Une des clés du succès est la confiance en soi. Une des clés de la confiance en soi est la préparation."
Arthur Ashe

1. **Questions de cours en `Python`.** Répondre aux trois questions suivantes sans utiliser la fonction **`max`** et la commande **`count`** existantes en **`Python`**.
   1.a. Écrire une fonction **`Python`** telle que l'exécution de **`monmax(L)`** renvoie, pour **`L`** une liste de réels, le maximum de ces réels.
   1.b. Écrire une fonction **`Python`** telle que l'exécution de **`monmax_bis(L)`** renvoie, pour **`L`** une liste de réels, le maximum de ces réels ainsi que le rang de sa première occurrence.
   1.c. Écrire une fonction **`Python`** telle que l'exécution de **`monmax_ter(L)`** renvoie, pour **`L`** une liste de réels, le maximum de ces réels ainsi que son nombre d'occurrences.

Ce problème a pour objet l'étude du nombre de fois où, dans une recherche séquentielle du maximum de n entiers distincts deux à deux, celui-ci est amené à changer de valeur au cours de l'exécution de l'algorithme.

Partie I – Quelques résultats préliminaires

Les sous-parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre, leurs résultats seront utilisés dans la suite du problème.

Sous-partie A

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel. On note $\mathscr{B} = (P_0, \dots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Donner, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, l'expression de $P_k(x)$ en fonction de x.
3. On considère l'application φ qui à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe la fonction $\varphi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = P(x+1)$$

   3.a. Démontrer que l'application φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   3.b. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
   3.c. Déterminer la matrice M^{-1}.
   On pourra considérer l'application ψ est qui à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe la fonction $\psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(P)(x) = P(x-1)$$

4. On considère $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\forall p \in [\![0; n]\!],\ b_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k$$

   4.a. On note $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$. Donner une égalité reliant les matrices A, B, M.
   4.b. En déduire, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, l'expression de a_k en fonction de $b_0, \dots, b_k$.

Sous-partie B

Dans cette sous-partie, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels et g une fonction positive, continue sur $[1; +\infty[$, décroissante sur un intervalle $[c; +\infty[$ inclus dans $[1; +\infty[$ telles que :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ soit divergente ;
- $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} g(n)$.

5. On suppose que p et n sont deux entiers naturels tels que $c \leqslant p < n$.
   5.a. Montrer que pour tout entier naturel $k \geqslant p$, on a :

$$g(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} g(t)dt \leqslant g(k)$$

   5.b. En déduire :

$$\int_p^n g(t)dt \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} g(k) \leqslant g(p) + \int_p^n g(t)dt$$

6. On considère un réel ε de $]0; 1[$.
   6.a. Montrer qu'il existe un entier naturel $p \geqslant c$ tel que pour tout $k \geqslant p$:

$$(1-\varepsilon)g(k) \leqslant w_{k+1} - w_k \leqslant (1+\varepsilon)g(k)$$

   6.b. En déduire que pour tout entier $n > p$:

$$(1-\varepsilon)\int_1^n g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^p g(t)dt + w_p \leqslant w_n \leqslant (1+\varepsilon)\int_1^n g(t)dt + (1+\varepsilon)g(p) + w_p$$

7. Montrer finalement :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n g(t)dt$$

8. En utilisant ce qui vient d'être démontré, établir : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie II – Étude d'un algorithme

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

On considère la fonction **Python** suivante

```
def maximum(L,i):
    maxi=L[0]
    for k in range(1,i):
        if L[k]>maxi:
            maxi=L[k]
    return maxi
```

où L désigne une liste de n entiers deux à deux distincts.

9. On suppose $n \geqslant 10$. Quel sera le résultat renvoyé par l'exécution de la commande `maximum(L,10)` ?
10. Quel sera le résultat renvoyé par l'exécution de la commande `maximum(L,len(L))` ?
11. On considère n entiers deux à deux distincts et on suppose que ces nombres sont affectés aux n "cases" de `L`, variable représentant une liste en **Python**.
    - 11.a. Quel est le nombre de rangements possibles de ces n entiers dans les n "cases mémoires" `L[0],L[1],...,L[n-1]` ?

    Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note $V(i,n)$ le nombre de rangements des n entiers dans les n "cases mémoires" `L[0],L[1],...,L[n-1]` tels que l'appel de `maximum(L,n)` provoque i affectations de la variable `maxi` au cours de son exécution.
    On admettra que ce nombre $V(i,n)$ est indépendant des n entiers initiaux pourvu toutefois qu'ils soient deux à deux distincts.
    Par convention, on pose $V(0,n) = 0$ et $V(k,n) = 0$ lorsque $k > n$.

    - 11.b. Vérifier qu'effectivement, le nombre d'affectations possibles de la variable `maxi` au cours de l'exécution de `maximum(L,n)` appartient à $[\![1;n]\!]$.
    - 11.c. On considère ici que `L` contient les entiers de $\{1;2;...;n\}$ dans l'ordre décroissant ; autrement dit : `L[0]=n`, `L[1]=n-1`, ..., `L[n-1]=1`.
        - 11.c.i. Écrire un script **Python** permettant de créer une telle liste.
        - 11.c.ii. Quel est, dans ce cas, le nombre d'affectations de la variable `maxi` au cours de l'exécution de `maximum(L,n)` ?
    - 11.d. On revient au cas général. Montrer que $V(1,n) = (n-1)!$ et déterminer $V(n,n)$.
    - 11.e.
        - 11.e.i. Supposons que $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, $V(i,n+1) = V(i-1,n) + nV(i,n)$.
          On pourra distinguer les rangements de $n+1$ entiers entiers deux à deux distincts dans `L[0],...,L[n]` selon que `L[n]` contient ou non le plus grand de ces $n+1$ entiers.
        - 11.e.ii. Montrer que la relation de la question précédente s'étend aux cas $i = 1$ et $i = n+1$.
        - 11.e.iii. Montrer qu'elle est encore vraie si $n = 1$ et $1 \leqslant i \leqslant 2$.
    - 11.f. On considère la fonction polynomiale $P_n : x \longmapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} V(i,n)x^i$.
        - 11.f.i. Établir : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = (n+x)P_n(x)$.
        - 11.f.ii. En déduire, pour tout réel x, l'expression de $P_n(x)$ en fonction de x.
    - 11.g. On pose $G_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n!}P_n(x)$.
        - 11.g.i. Calculer $G_n(1)$.
        - 11.g.ii. Exprimer, pour tout réel x, $G_{n+1}(x)$ à l'aide de $G_n(x)$ puis en déduire :
        $$G'_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}G_n(x) + \frac{n+x}{n+1}G'_n(x)$$
        - 11.g.iii. En déduire :
        $$G'_n(1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$
12. Considérant n entiers deux à deux distincts, on les range aléatoirement dans les n "cases" `L[0],...,L[n-1]` d'une liste `L`.
    Tous les rangements possibles constituent les évènements élémentaires d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; ces rangements étant de probabilités égales.
    On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'affectations de la variable `maxi` au cours de l'exécution de `maximum(L,n)`.
    - 12.a. Donner $X_n(\Omega)$.
    - 12.b. Exprimer, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}\big([X_n = i]\big)$ en fonction de $V(i,n)$ et n.
    - 12.c. Déterminer l'espérance de X_n.
    - 12.d. Montrer que si n est supérieur ou égal à 2, alors $\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$.

      Donner un équivalent simple de $\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
13.
    - 13.a. Montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $(n+1)\mathbb{P}\big([X_{n+1} = i]\big) - n\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) = \mathbb{P}\big([X_n = i-1]\big)$.
    - 13.b. En utilisant les résultats de la partie I.B, montrer alors par récurrence que :
    $$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_n = i]\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!\,n}\big(\ln(n)\big)^{i-1}$$

Partie III - Calcul de l'inverse d'une certaine matrice

On désigne toujours par n un entier naturel non nul, et $V(i,n)$ a toujours la même signification qu'on lui a attribuée dans la partie II. On convient que $V(0,0)=0$ et $V(i,0)=0$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.
Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j)\in [\![1;n+1]\!]^2$, $a_{i,j}=(-1)^{j-i}V(i-1,j-1)$.

14. Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ et tout réel x, on a $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}V(i,k)x^i$.

15. On définit la famille de fonctions polynomiales $(N_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ N_0(x)=1$$

et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ N_k(x)=\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$$

15.a. Montrer que $(N_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

15.b. Quelle est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, notée $(P_0,\dots,P_n)$, vers la base $(N_0,\dots,N_n)$?

16. 16.a. Justifier que la matrice A est inversible.
Pour tout $(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2$, on note $\omega(i-1,j-1)$ l'élément situé sur la i-ème ligne et j-ième colonne de la matrice A^{-1}.

16.b. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\omega(k,n)N_k(x)$.

17. 17.a. Pour tout $p \in [\![0;n]\!]$, comparer p^n et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}k!\,\omega(k,n)$.

17.b. En utilisant les résultats de la partie I.A, donner une expression de $\omega(k,n)$.

Partie IV - Interprétation des nombres $\omega(k,n)$

Dans cette partie, n désignera encore un entier naturel non nul.
Pour tout entier naturel non nul k, on appelle k-partition de $[\![1;n]\!]$, tout ensemble $\{A_1,\dots,A_k\}$ dont les éléments A_i sont des parties non vides de $[\![1;n]\!]$, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à $[\![1;n]\!]$.
On note $s(k,n)$ le nombre de k-partitions de $[\![1;n]\!]$ et on convient que $s(0,n)=0$.

18. En justifiant rapidement, donner $s(1,1)$, $s(n,n)$, $s(1,n)$ et $s(k,n)$ lorsque k est un entier strictement supérieur à n.

19. Soit p un entier naturel non nul.

19.a. Rappeler le nombre de n-uplets dont les éléments appartiennent à $[\![1;p]\!]$.

19.b. Soit $k\in[\![1;p]\!]$. Déterminer le nombre de n-uplets composés de k éléments différents de $[\![1;p]\!]$.

19.c. En déduire : $p^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}k!\,s(k,n)$.

20. Comparer, pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, les nombres $s(k,n)$ et $\omega(k,n)$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★