Devoir surveillé 5
Samedi 13 décembre 2025 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- Pour toutes les questions `Python` du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"La question n'est pas de travailler, c'est de faire croire aux autres qu'on travaille."
Tristan Bernard

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir.

✘ Attention !
Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés.

Exercice 1 - Ecricome 2023 Appli

Partie 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

> **☞ Rappel...**
> $v = f(u) \iff V = AU$, où $V = \mathrm{Mat}_{bc}(v)$ et $U = \mathrm{Mat}_{bc}(u)$.

1. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (-1, 1, 0, 1) \quad ; \quad u_2 = (0, -1, 1, 0) \quad ; \quad u_3 = (0, 1, 1, 0) \quad ; \quad u_4 = (1, 0, 0, 1)$$

On note $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

1.a. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supposons $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$.
On a :

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \quad & \iff \quad \begin{cases} -a + d = 0 \\ a - b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{\iff} \quad \begin{cases} -a + d = 0 \\ -b + c + d = 0 \\ b + c = 0 \\ 2d = 0 \end{cases} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \quad \begin{cases} -a + d = 0 \\ -b + c + d = 0 \\ 2c + d = 0 \\ 2d = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

> **PARDON ?!**
> ON NE SUBSTITUE PAS !

D'où : $a = b = c = d = 0$.
Par conséquent, la famille $\mathscr{B}$ est :

- ✓ libre,
- ✓ de cardinal 4 égal à $\dim(\mathbb{R}^4)$.

Conclusion : $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

1.b. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$.

Utilisons le fait que A soit la matrice canoniquement associée à f. On a :

- $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $f(u_1) = (0, 0, 0, 0)$;
- $A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $f(u_2) = (0, 0, 0, 0)$;
- $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $f(u_3) = (0, 2, 2, 0) = 2u_3$;
- $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $f(u_4) = (2, 1, 1, 2) = u_3 + 2u_4$;

> **Confusion d'objets !**
> $\cancel{Au_1}$: u_1 est un vecteur ligne...
> Et f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$, donc $f(u_1) \in \mathbb{R}^4$, pas $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$!

Conclusion : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.c. En déduire une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice T de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.

Posons alors
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
de sorte que :

- ✓ T est triangulaire,
- ✓ P est inversible, comme matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ vers la base $\mathscr{B}$,
- ✓ par formule de changement de bases : $A = PTP^{-1}$.

☞ **Rappel...**
$\mathrm{Mat}_{bc}(f) = P_{bc,\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{bc,\mathscr{B}}^{-1}$

Conclusion : $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = PTP^{-1}$.

2. 2.a. Calculer A^2 et A^3 puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.

On obtient :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
et ainsi :
$$\begin{aligned} 4A^2 - 4A &= 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A^3 \end{aligned}$$

Conclusion : $A^3 = 4A^2 - 4A$.

2.b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que :
$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$
vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

★ **Classique !** ★
C'est une récurrence classique aux écrits qu'**il faut parfaitement savoir rédiger** !

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  On a $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$.
  En posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, on a ainsi :
  $$A^1 = a_1 A^2 + b_1 A$$
  L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$.
  Montrons qu'il existe deux réels a_{n+1}, b_{n+1} tels que $A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A$.
  On a :
  $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= A(a_n A^2 + b_n A) \\ &= a_n A^3 + b_n A^2 && \text{question précédente} \\ &= a_n(4A^2 - 4A) + b_n A^2 \\ &= (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A \end{aligned}$$
  Posons alors $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$. Ainsi :
  $$A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$.
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont également définies par :
$$\begin{cases} a_1 = 0 \quad ; \quad b_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \; a_{n+1} = 4a_n + b_n \quad ; \quad b_{n+1} = -4a_n \end{cases}$$

3. 3.a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 4a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 4a_{n+1} - 4a_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

3.b. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique, $x^2 - 4x + 4 = 0$, possède une unique solution : 2.

Par conséquent :

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = (\lambda n + \mu)2^n$$

Or $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$; et :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 0 \\ 8\lambda + 4\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 8\lambda + 4\mu = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -4\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{4} \\ \mu = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = \dfrac{1}{4}(n-1)2^n = (n-1)2^{n-2}$.

✍ Rédaction
On adopte une rédaction fluide et sans notations inutiles...

LE COURS, LE COURS, LE COURS !

Important !
La relation de récurrence sur la suite (a_n) étant donnée en question précédente, cette question n'est qu'une question de cours : il faut donc prendre tous les points.

3.c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $a_{n+1} = 4a_n + b_n$, d'où :

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - 4a_n \\ &= n2^{n-1} - 4(n-1)2^{n-2} && \text{question précédente} \\ &= n2^{n-1} - 2(n-1)2^{n-1} \\ &= 2^{n-1}\big(n - 2(n-1)\big) \\ &= 2^{n-1}(2-n) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ b_n = (2-n)2^{n-1}$.

Ou alors...

- On sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ b_{k+1} = -4a_k$$

Autrement dit, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\begin{aligned} b_n &= -4a_{n-1} \\ &= -4(n-2)2^{n-3} && \text{question précédente, licite car } n-1 \geqslant 1 \\ &= (2-n)2^{n-1} \end{aligned}$$

- Puis :

$$b_1 = 1 = (2-1)2^{1-1}$$

L'expression trouvée est donc encore valable pour $n = 1$.

✘ Attention !
Ne pas oublier de vérifier que l'expression est encore valable si $n = 1$... La relation étant $b_{n+1} = -a_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, elle ne fournit bien les termes qu'à partir de b_2.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2.b. :

$$\begin{aligned} A^n &= a_nA^2 + b_nA && \text{questions précédentes} \\ &= (n-1)2^{n-2}A^2 + (2-n)2^{n-1}A && \text{question 2.a.} \end{aligned}$$

$$= (n-1)2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (2-n)2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2^{n-2}\begin{pmatrix} 2(n-1)+2(2-n) & 0 & 0 & 2(n-1)+2(2-n) \\ 3(n-1)+2(2-n) & 2(n-1)+2(2-n) & 2(n-1)+2(2-n) & n-1 \\ 3(n-1)+2(2-n) & 2(n-1)+2(2-n) & 2(n-1)+2(2-n) & n-1 \\ 2(n-1)+2(2-n) & 0 & 0 & 2(n-1)+2(2-n) \end{pmatrix}$$

$$= 2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

♥ L'avis du chef ! ♥

Puisque le résultat est donné, l'intérêt de traiter cette question est assez faible... Il n'a sans doute pas été très simple pour les correcteurs ne repérer les candidates et candidats honnêtes parmi le lot de malhonnêteté qu'ils ont dû rencontrer...

Partie 2

Soient p un entier naturel non nul et G un graphe non pondéré orienté à p sommets. On note $s_0, s_1, \dots, s_{p-1}$ les sommets de G.

5. **5.a.** Rappeler la définition de la matrice d'adjacence du graphe G.
La matrice d'adjacence du graphe G est la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j \leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $m_{i,j}$ est égal au nombre d'arcs de s_{i-1} vers s_{j-1}.

☞ Rappel...

On utilise souvent "arc" à la place de "arête" pour les graphes orientés ; même si ce n'est pas le cas dans cet exercice.

5.b. Soient n un entier naturel non nul, i un entier de $[\![1;p]\!]$ et j un entier de $[\![1;p]\!]$.
Rappeler sans justification l'interprétation du coefficient situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice M^n, où M est la matrice d'adjacence du graphe G.
Le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice M^n est égal au nombre de chemins de longueur n pour aller de s_{i-1} à s_{j-1} ; la longueur d'un chemin étant le nombre d'arcs dont il est composé.

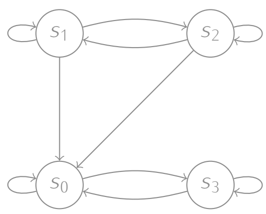
LE COURS, LE COURS, LE COURS !

6. Dans cette question uniquement, on suppose que $p = 4$ et que la matrice d'adjacence du graphe G est la matrice A étudiée dans la partie 1..

6.a. Représenter les sommets et les arêtes du graphe G sous la forme d'une diagramme.
On avait :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :



6.b. Le graphe G est-il connexe ? Justifier votre réponse.
Le graphe n'est pas connexe car il n'existe aucun chemin permettant de passer du sommet s_0 à s_1.

Autre méthode

On peut procéder autrement, en utilisant la matrice d'adjacence.Remarquons que le coefficient situé à l'intersection de la ligne 1 et colonne 2 de la matrice $I + A + A^2 + A^3$ est nul.
Par conséquent, les coefficients de la matrice $I + A + A^2 + A^3$ ne sont pas tous strictement positifs.
Conclusion : le graphe G n'est pas connexe.

☞ Rappel...

Si M est la matrice d'adjacence d'un graphe G qui est d'ordre p, alors G est connexe si, et seulement si, tous les coefficients de la matrice $I + M + \dots + M^{n-1}$ sont strictement positifs.

6.c. Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer le nombre de chemins de longueur n menant du sommet s_3 au sommet s_0.
Ce nombre de chemins est donné par le coefficient situé en ligne 4 et colonne 1 de la matrice A^n.

Conclusion : d'après la question 4., il y a 2^{n-1} chemins de longueur n menant du sommet s_3 au sommet s_0.

7. Dans cette question et les suivantes, on revient au cas général décrit au début de la partie 2..
Soit s un sommet de G. On dit que le sommet t est un voisin de s quand $s \neq t$ et (s, t) est une arête du graphe. Comme le graphe est orienté, si t est voisin de s, alors s n'est pas forcément voisin de t.
On appelle liste d'adjacence du graphe G une liste de p sous-listes telle que, pour tout entier k de $[\![0; p-1]\!]$, la sous-liste située à la position k contient tous les numéros des sommets voisins de s_k.
Par exemple, la liste d'adjacence du graphe étudié à la question 6. est :

`L=[[0,3],[0,1,2],[0,1,2],[0,3]]`

Écrire une fonction en langage **Python**, nommée **matrice_vers_liste**, prenant en entrée la matrice d'adjacence **A** d'un graphe G (définie sous forme de liste de listes) et renvoyant la liste d'adjacence de G.
Idée : pour chaque sommet i du graphe, on parcourt la liste A[i] (la ligne i de la matrice d'adjacence associée au graphe) : si le coefficient en colonne j est non nul, alors j est adjacent à i...

Remarque
Il est un peu dommage que la *matrice* d'adjacence soit définie sous forme de liste de listes alors que les tableaux (**numpy.array**) font ça très bien...

```python
def matrice_vers_liste(A):
    p=len(A)
    L=[]
    for i in range(0,p):
        liste_adj_i=[]
        for j in range(0,p):
            if A[i][j]!=0:
                liste_adj_i.append(j)
        L.append(liste_adj_i)
    return L
```

8. On cherche à écrire une fonction en langage **Python** permettant d'obtenir la longueur du plus court chemin menant d'une sommet de départ s_i à chaque sommet du graphe G.
On souhaite pour cela appliquer un algorithme faisant intervenir les variables suivantes :

- une liste **distances** à p éléments, où l'élément situé à la position k sera égal, à la fin de l'algorithme, à la longueur du plus court chemin menant du sommet de départ s_i au sommet s_k ;
- une liste **a_explorer** contenant tous les sommets restant à traiter ;
- une liste **marques** contenant tous les sommets déjà traités.

Nous donnons ci-dessous la description de l'algorithme :

- Initialisation des trois listes ci-dessus :
  * Initialement, chaque élément de la liste **distances** est égal à p, à l'exception du sommet s_i, auquel on affecte la distance 0.
  * La liste **marques** ne contient initialement que la numéro du sommet de départ s_i.
  * La liste **a_explorer** ne contient initialement que le numéro du sommet de départ s_i.
- Tant que la liste **a_explorer** n'est pas vide, on répète les opérations suivantes :
  * Nommer **s** le premier sommet de la liste **a_explorer** et le retirer de cette liste.
  * Pour chaque voisin **v** du sommet **s** : si **v** n'est pas dans la liste **marques**, on l'ajoute à la liste **marques**, on l'ajoute à la fin de la liste **a_explorer** et on lui affecte une distance égale à **distances[s]+1**.

8.a. On considère le graphe orienté G étudié à la question 6..
Donner la valeur de liste **distances** à l'issue de l'exécution de l'algorithme décrit ci-dessus lorsqu'on l'applique au graphe G et en choisissant s_1 comme sommet de départ.
En appliquant l'algorithme (ou pas), on obtient :

`distances=[1,0,1,2]`

Remarque
L'énoncé indique de "donner", aucune justification n'est donc attendue.

8.b. Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en entrée la liste d'adjacence **L** d'un graphe G et le numéro **i0** du sommet de départ, et renvoyant la liste **distances** après exécution de l'algorithme décrit ci-dessus.

```python
def parcours(L,i0):
    p=len(L)
    distances=.........
    distances[i0]=0
    a_explorer=.........
    marques=.........
    while .........
        s=.........
        .........
        for v in .........
            if v not in marques:
                marques.append(v)
                .........
                .........
    return distances
```

Le programme suivant respecte l'algorithme décrit ci-dessus :

```
def parcours(L,i0):
    p=len(L)
    distances=[p for k in range(p)]
    distances[i0]=0
    a_explorer=[i0]
    marques=[i0]
    while a_explorer != []:
        s=a_explorer[0]
        del a_explorer[0]
        for v in L[s]:
            if v not in marques:
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)
                distances[v]=distances[s]+1
    return distances
```

8.c. Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie la liste de tous les sommets s pour lesquels il existe un chemin menant du sommet de départ s_i au sommet s.

L'idée est de faire comme précédemment puis de renvoyer les sommets s tels que la distance entre s_i et s à la fin de l'exécution n'est plus égale à la distance initiale valant p (il y a alors eu changement, donc un chemin existe).

```
def parcours(L,i0):
    p=len(L)
    distances=[p for k in range(p)]
    distances[i0]=0
    a_explorer=[i0]
    marques=[i0]
    while a_explorer != []:
        s=a_explorer[0]
        del a_explorer[0]
        for v in L[s]:
            if v not in marques:
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)
                distances[v]=distances[s]+1
    return [s for s in range(0,p) if distances[s]<p]
```

☞ **Pour info...**

L'exécution de ce programme permet donc de trouver la *composante connexe* du sommet de départ s_i...

Exercice 2 - ESC 2001 E

1. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$.

1.a. Calculer, pour $A \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln(t)}{t} dt$ puis en déduire que I_1 est divergente.

Soit $A \in [1; +\infty[$. On a :

$$\int_1^A \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_1^A \frac{1}{t} \ln(t) dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t)^2\right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2}$$

Remarque

On reconnaît la forme $u'u$... dont une primitive est $\frac{u^2}{2}$.

Or $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{\ln(A)^2}{2} = +\infty$.

Conclusion : l'intégrale I_1 (qui n'est impropre qu'en $+\infty$) est divergente.

1.b. Montrer, grâce à une intégration par parties, que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, l'intégrale I_n est convergente et vaut $\dfrac{1}{(n-1)^2}$.

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^n}$ est continue sur $[1; +\infty[$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1; +\infty[$, donc I_n est impropre en $+\infty$ seulement.
- Soit $A \in [1; +\infty[$. Effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^n} dt$.

Posons, puisque $n \neq 1$: $\left| \begin{array}{l} u : t \longmapsto \ln(t) \\ v : t \longmapsto \dfrac{-1}{(n-1)t^{n-1}} \end{array} \right.$.

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[1; A]$ et pour tout $t \in [1; A]$: $\left| \begin{array}{l} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = \dfrac{1}{t^n} \end{array} \right.$.

♥ Astuce du chef ♥

Pour primitiver $t \longmapsto \frac{1}{t^n}$, on écrit que $\frac{1}{t^n} = t^{-n}$...

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln(t)}{t^n} dt &= \left[\frac{-\ln(t)}{(n-1)t^{n-1}}\right]_1^A - \int_1^A \frac{-1}{(n-1)t^{n-1}} \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int_1^A \frac{1}{t^n} dt \\ &= \frac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \left[\frac{-1}{(n-1)t^{n-1}}\right]_1^A \quad n \neq 1 \\ &= \frac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 A^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)^2} \end{aligned}$$

Or :

- ⁎ par opérations, puisque $n - 1 > 0$ (car $n \geqslant 2$) : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{(n-1)^2 A^{n-1}} = 0$
- ⁎ par croissances comparées, puisque $n - 1 > 0$ (car $n \geqslant 2$) : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} = 0$.

D'où :

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 A^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{(n-1)^2}$$

Par conséquent, l'intégrale I_n est convergente et vaut $\dfrac{1}{(n-1)^2}$.

Conclusion : pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, l'intégrale I_n est convergente et vaut $\dfrac{1}{(n-1)^2}$.

2. Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{\ln(k)}{k^2}$.

✓ Par croissances comparées, on obtient rapidement : $\dfrac{\ln(k)}{k^2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$

✓ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(k)}{k^2} \geqslant 0$; $\dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$

✓ La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente (car $\dfrac{3}{2} > 1$).

Conclusion : par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série de terme général $\dfrac{\ln(k)}{k^2}$ est convergente.

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$.

3.a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est une densité de probabilité. Dans toute la suite, X est une variable aléatoire de densité g.

- ∗ Sur $]-\infty;1[$:
  g est continue sur $]-\infty;1[$ car constante sur cet intervalle.
  ∗ Sur $]1;+\infty[$:
  g est continue sur $]1;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
  ∗ En 1 :
  On a :
  $$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} g(t) = \lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} g(t) = g(1) = 0$$
  Ainsi g est continue en 1.

  Conclusion : la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

- ✓ **Continuité ?**
  g est continue sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède,
  ✓ **Positivité ?**
  g est positive sur $\mathbb{R}$ car :
  × g nulle sur $]-\infty;1[$
  × $\forall t \geqslant 1,\ \ln(t) \geqslant 0 \ ; \ t^3 > 0$.
  ✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$?
  × L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} g(t)dt$ est convergente et vaut 0.
  × D'après la question **1.b.**, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3}dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{4}$.
  Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g(t)dt$ est convergente et vaut 1.

  Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ est convergente et, par relation de Chasles, vaut 1.

  Conclusion : la fonction g est une densité de probabilité.

3.b. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.

- On considère que $X(\Omega) = [1;+\infty[$. On a :
  X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|dt$ est convergente
  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} tg(t)dt$ est convergente,
  car $t \longmapsto tg(t)$ est nulle sur $]-\infty;1[$ et positive sur $[1;+\infty[$
  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{4\ln(t)}{t^2}dt$ est convergente
- Or, d'après la question **1.b.**, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$ est convergente. Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{4\ln(t)}{t^2}dt$ est également convergente.

✘ Attention !
Ne pas refaire ce qui a été fait en question **1.b.**. Il est important de bien faire les liens entre les questions du sujet.

- On en déduit que X admet une espérance et :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt \\ &= \int_{1}^{+\infty} \frac{4\ln(t)}{t^2}dt \\ &= 4I_2 \\ &= 4\end{aligned}$$
question **1.b.**

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 4$.

3.c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

- On sait que $X(\Omega) = [1;+\infty[$. Ainsi, par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $X(\Omega)$:

X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 g(t)| dt$ est convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^2 g(t) dt$ est convergente,

car $t \longmapsto t^2 g(t)$ est nulle sur $]-\infty;1[$ et positive sur $[1;+\infty[$

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} 4\frac{\ln(t)}{t} dt$ est convergente.

- Or, d'après la question **1.a.**, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ est divergente. Par conséquent, puisque $4 \neq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} 4\frac{\ln(t)}{t} dt$ est également divergente.
- On en déduit que X n'admet pas de moment d'ordre 2.

Conclusion : X n'admet pas de variance.

4. On note G la fonction de répartition de X.

4.a. Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

D'après la question **3.a.**, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Or G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$...

Conclusion : G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4.b. Dresser le tableau de variations de G puis démontrer que G est bijective de $[1;+\infty[$ dans un intervalle à déterminer.

D'après la question précédente, la fonction G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G'(t) = g(t)$$

Ainsi :

$$G'(1) = 0 \quad ; \quad \forall t > 1,\ G'(t) > 0$$

Ensuite :

- puisque $X(\Omega) = [1;+\infty[$, $G(1) = \mathbb{P}([X \leqslant 1]) = 0$;
- G est donc constante égale à 0 sur $]-\infty;1[$;
- $\lim\limits_{t \to +\infty} G(t) = 1$, car G est une fonction de répartition.

D'où :

x	1		$+\infty$
$G'(t)$	0	$+$	
G	0	$\nearrow$	1

Par conséquent, la fonction G est :

✓ continue sur $[1;+\infty[$ car $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle,

✓ strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Ainsi, par théorème de bijection, G est bijective de $[1;+\infty[$ dans $G([1;+\infty[)$, avec $G([1;+\infty[) = [0;1[$.

Important !
G est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et continue en 1, donc strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

✘ Attention !
C'est bien $[0;1[$, et pas $[0;1]$!

Conclusion : G est bijective de $[1;+\infty[$ dans $[0;1[$.

4.c. On pose $Y = G(X)$. Démontrer que la variable aléatoire Y est à densité et en déterminer une densité.

★ Classique ! ★
Très classiques à l'écrit comme à l'oral. Il faut s'entraîner dessus, même si le chapitre 12 sera l'occasion de revenir dessus.

- On a :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= G(X)(\Omega) \\ &= G(X(\Omega)) \\ &= G([1;+\infty[) \\ &= [0;1[\quad \text{question précédente} \end{aligned}$$

- Notons F_Y la fonction de répartition de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ∗ Si $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \quad Y(\Omega) = [0;1[\text{ et } x < 0 \text{ donc } [Y \leqslant x] = \varnothing \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\ast$ Si $x \in [0;1[$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([G(X) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant G^{-1}(x)]) \\ &= G(G^{-1}(x)) \\ &= x \end{aligned}$$

G^{-1} est strictement croissante sur $[0;1[$

$\ast$ Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(\Omega) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$Y(\Omega) = [0;1[$ et $x \geqslant 1$ donc $[Y \leqslant x] = \Omega$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{array} \right.$

- Ensuite :
  ✓ **Continuité ?**
  × Sur $]-\infty;0[$: F_Y est continue sur $]-\infty;0[$ car constante sur cet intervalle.
  × Sur $[0;1[$: F_Y est continue sur $]0;1[$ car affine sur cet intervalle.
  × Sur $[1;+\infty[$: F_Y est continue sur $[1;+\infty[$ car constante sur cet intervalle.
  × En 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} F_Y(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F_Y(x) = F_Y(0)$$

  Donc F_Y est continue en 0.
  × En 1 :
  De même, F_Y est continue en 1.
  Par conséquent, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.
  ✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$?**
  Par des arguments similaires à la continuité, la fonction F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 et en 1.

Conclusion : la variable aléatoire Y est à densité et, en notant f_Y une densité de Y, on a :

$$\forall x < 0,\ f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$$
$$\forall x \in]0;1[,\ f_Y(x) = F_Y'(x) = 1$$
$$\forall x > 1,\ f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$$

et on pose

$$f_Y(0) = 1 \quad ; \quad f_Y(1) = 0$$

Remarque
Bien évidemment, toute valeur positive pour $f_Y(0)$ et $f_Y(1)$ convient...

Conclusion : Y est à densité et admet pour densité la fonction $f_Y : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \in\in [0;1[\\ 1 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

4.d. Établir enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{2\ln(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant t]) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$X(\Omega) = [1;+\infty[$ et $x < 1$, donc $[X \leqslant x] = \varnothing$

- Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} g(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{1} g(t)dt + \int_{1}^{x} g(t)dt \\ &= \int_{1}^{x} g(t)dt \\ &= 4\int_{1}^{x} \frac{\ln(t)}{t^3}dt \\ &= 4\left(\frac{-\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}\right) \\ &= 1 - \frac{2\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

relation de Chasles, avec $x \geqslant 1$

g est nulle sur $]-\infty;1[$

calcul effectué en question **1.b.**, avec $n = 3$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{2\ln(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

5. On pose $Z = \lfloor X \rfloor$.

5.a. Déterminer $Z(\Omega)$.

Notons $h = \lfloor . \rfloor$ de sorte que $Z = h(X)$. On a :

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= h(X)(\Omega) \\ &= h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h\big([1; +\infty[\big) \\ &= \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Conclusion : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

5.b. Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Z = k]\big) = G(k+1) - G(k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Z = k]\big) &= \mathbb{P}\big([\lfloor X \rfloor = k]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([k \leqslant X < k+1]\big) && k \in \mathbb{N}^* \\ &= G(k+1) - G(k) && X \text{ est à densité} \end{aligned}$$

☞ Rappel...
$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},$
$\lfloor x \rfloor = k \iff k \leqslant x < k+1$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Z = k]\big) = G(k+1) - G(k)$.

5.c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([Z = k]\big) = -(n+1)\big(1 - G(n+1)\big) + \sum_{k=0}^{n} \big(1 - G(k+1)\big)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k\mathbb{P}\big([Z = k]\big) = kG(k+1) - kG(k)$$

D'où, en sommant pour $k \in [\![0; n]\!]$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([Z = k]\big) &= \sum_{k=0}^{n} \big(kG(k+1) - kG(k)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+1-1)G(k+1) - \sum_{k=0}^{n} kG(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)G(k+1) - \sum_{k=0}^{n} kG(k) - \sum_{k=0}^{n} G(k+1) && \text{télescopage} \\ &= (n+1)G(n+1) - \sum_{k=0}^{n} G(k+1) \end{aligned}$$

Et, d'autre part :

$$\begin{aligned} -(n+1)\big(1 - G(n+1)\big) + \sum_{k=0}^{n} \big(1 - G(k+1)\big) &= -(n+1) + (n+1)G(n+1) + \sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} G(k+1) \\ &= -(n+1) + (n+1)G(n+1) + n + 1 - \sum_{k=0}^{n} G(k+1) \\ &= (n+1)G(n+1) - \sum_{k=0}^{n} G(k+1) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([Z = k]\big) = -(n+1)\big(1 - G(n+1)\big) + \sum_{k=0}^{n} \big(1 - G(k+1)\big)$.

5.d. Montrer : $\big(1 - G(k)\big) \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(k)}{k^2}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$.Ainsi $\ln(k) \neq 0$ et :

Important !
Il fait traiter cette question : le résultat de la question 4.d. est donné, c'est donc possible !

$$\begin{aligned} \frac{1 - G(k)}{\frac{2\ln(k)}{k^2}} &= \frac{k^2\big(1 - G(k)\big)}{2\ln(k)} && \text{question 4.d. avec } k \geqslant 1 \\ &= \frac{k^2\left(\frac{2\ln(k)}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right)}{2\ln(k)} \\ &= 1 + \frac{1}{2\ln(k)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\left(1 - G(k)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(k)}{k^2}$.

5.e. Démontrer alors que la variable aléatoire Z admet une espérance.

- On sait que $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ainsi :
  Z admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \left|k\mathbb{P}\left([Z=k]\right)\right|$ est convergente
  si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}\left([Z=k]\right)$ est convergente, car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k\mathbb{P}\left([Z=k]\right) \geqslant 0$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}\left([Z=k]\right) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\left([Z=k]\right) && \text{question précédente}\\ &= -(n+1)\left(1-G(n+1)\right) + \sum_{k=0}^{n}\left(1-G(k+1)\right) && i = k+1\\ &= -(n+1)\left(1-G(n+1)\right) + \sum_{i=1}^{n+1}\left(1-G(i)\right)\end{aligned}$$

Or :

* d'après la question précédente, $\left(1 - G(n+1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n+1)}{(n+1)^2}$, d'où :

$$-(n+1)\left(1-G(n+1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-2\ln(n+1)}{n+1}$$

Et :

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

D'où, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$$

Et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} -(n+1)\left(1-G(n+1)\right) = 0$$

* ensuite :

✓ toujours d'après la question précédente,

$$1 - G(i) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(i)}{i^2}$$

✓ $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ 1 - G(i) \geqslant 0$; $\dfrac{\ln(i)}{i^2} \geqslant 0$

✓ d'après la question ??, la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} \dfrac{\ln(i)}{i^2}$ est convergente.

Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{i\geqslant 1}\left(1-G(i)\right)$ est convergente. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1-G(i)\right)$ existe et est finie.

Par conséquent, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}\left([Z=k]\right)$ existe et est finie.

Conclusion : la variable aléatoire X admet une espérance.

Exercice 3 - Ecricome 2017 E

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   ✓ L'expérience consiste au tirage d'une boule de façon équiprobable parmi les n boules (tirages avec remise) numérotées de 1 à n.
   ✓ La variable aléatoire X_k prend comme valeur le numéro de la boule tirée.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$X_k \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\llbracket 1; n \rrbracket\right) \quad ; \quad X_k(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \quad ; \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket,\ \mathbb{P}\left([X_k = i]\right) = \frac{1}{n} \quad ; \quad \mathbb{E}(X_k) = \frac{n+1}{2}$$

2. 2.a. Déterminer $T_n(\Omega)$.
   Démontrons que $T_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

   $\boxed{\subset}$ T_n prend comme valeur le nombre de tirages nécessaires pour que la somme des nombres obtenus soit supérieure ou égale à n.
   - T_n prend donc des valeurs dans $\mathbb{N}^*$;
   - et puisque les boules sont numérotées à partir de 1, il faudra au plus n tirages pour obtenir une somme supérieure ou égale à n.

   D'où :

$$T_n(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$$

   $\boxed{\supset}$ Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. L'issue consistant à :
   - tirer la boule 1 des tirages 1 à $k-1$ (éventuellement, si $k > 1$)
   - puis à tirer la boule n au tirage k et aux tirages suivants

   réalisé l'évènement $[T_n = k]$. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket,\ [T_n = k] \neq \varnothing$$

   D'où :

$$\llbracket 1; n \rrbracket \subset T_n(\Omega)$$

Remarque
Tirer la boule $n-(k-1)$ (licite car $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, donc $n-(k-1) \in \llbracket 1; n \rrbracket$) au tirage k suffit.

Conclusion : $T_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

2.b. Calculer $\mathbb{P}\left([T_n = 1]\right)$.
$[T_n = 1]$ est réalisé si, et seulement si, la somme des numéros obtenus devient supérieure ou égale à n au premier tirage
si, et seulement si, on tire la boule n au premier tirage

D'où :

$$[T_n = 1] = [X_1 = n]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([T_n = 1]\right) &= \mathbb{P}\left([X_1 = n]\right) \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned} \qquad X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\llbracket 1; n \rrbracket\right)$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left([T_n = 1]\right) = \dfrac{1}{n}$.

2.c. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left([T_n = n]\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

$[T_n = n]$ est réalisé si, et seulement si, la somme des numéros obtenus devient supérieure ou égale à n au n-ième tirage

si, et seulement si, on tire la boule 1 des tirages 1 à $n-1$ puis n'importe quelle boule au tirage n

D'où :

$$[T_n = n] = \bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([T_n = n]\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}[X_k = 1]\right) && \text{indépendance de } X_1, \dots, X_n \text{, car indépendance des tirages} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left([X_k = 1]\right) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left([T_n = n]\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

Immédiat d'après les trois questions précédentes.

Important ! Il faut traiter cette question !

Conclusion :

$$T_2(\Omega) = \{1;2\} \quad ; \quad \mathbb{P}\left([T_2 = 1]\right) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}\left([T_2 = 2]\right) = \frac{1}{2}$$

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Calculer $\mathbb{E}(T_3)$.

Important ! Il faut traiter cette question !

- D'après les questions **2.a.**, **2.b.** et **2.c.**, et en complétant puisque $\sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}\left([T_3 = k]\right) = 1$, on obtient la loi.

Conclusion :

$$T_3(\Omega) = [\![1;3]\!] \quad ; \quad \mathbb{P}\left([T_3 = 1]\right) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mathbb{P}\left([T_3 = 2]\right) = \frac{5}{9} \quad ; \quad \mathbb{P}\left([T_3 = 3]\right) = \frac{1}{9}$$

- On sait que $T_3(\Omega) = [\![1;3]\!]$. Ainsi $T_3(\Omega)$ est fini, donc T_3 admet une espérance ; et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_3) &= \sum_{k=1}^{3} k\mathbb{P}\left([T_3 = k]\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{10}{9} + \frac{3}{9} \\
&= \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

5. Donner $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ S_k(\Omega) = [\![k; nk]\!]$.

Remarque L'inclusion $S_k(\Omega) \subset [\![k; nk]\!]$ est immédiate ; l'autre pourrait se démontrer par récurrence...

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

6.a. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

Conclusion : $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.

6.b. En utilisant un système complet d'évènements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}\left([S_{k+1} = i]\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}\left([S_k = j]\right)$$

Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([S_k = j]\big)_{j \in [\![k;nk]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([S_{k+1} = i]\big) &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}\big([S_k = j] \cap [S_{k+1} = i]\big) \\
&= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}\big([S_k = j] \cap [S_k + X_{k+1} = i]\big) \\
&= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}\big([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i-j]\big) \\
&= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}\big([S_k = j]\big) \mathbb{P}\big([X_{k+1} = i-j]\big)
\end{aligned}$$

$X_1, \ldots, X_{k+1}$ sont indépendantes et $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_k$, donc par lemme des coaliations S_k et X_{k+1} sont indépendantes

Or :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} j \in [\![k;nk]\!] \\ i-j \in X_{k+1}(\Omega) \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{l} k \leqslant j \leqslant nk \\ 1 \leqslant i-j \leqslant n \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} k \leqslant j \leqslant nk \\ i-n \leqslant j \leqslant i-1 \end{array}\right. \\
&\iff \max(k, i-n) \leqslant j \leqslant \min(nk, i-1) \\
&\iff k \leqslant j \leqslant i-1
\end{aligned}$$

$i \leqslant n$ et $k \geqslant 1$, donc $i-n \leqslant k$
$i \leqslant n$ et $k \geqslant 1$, donc $i-1 \leqslant nk$

> **Rédaction**
> Pour changer un peu, une autre rédaction qui peut être utile pour voir comment s'opèrent les réductions des sommes dans ces cas.

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}\big([S_k = j]\big) \mathbb{P}\big([X_{k+1} = i-j]\big) &= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}\big([S_k = j]\big) \mathbb{P}\big([X_{k+1} = i-j]\big) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}\big([S_k = j]\big)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_{k+1} = i]\big) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}\big([S_k = j]\big)$.

7. **7.a.** Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

> **★ Classique ! ★**
> Très classique...

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![k+1; +\infty[\![$.
D'après la relation de Pascal, on a :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\quad \binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$$

Autrement dit :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\quad \binom{j-1}{k-1} = \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}$$

D'où, en sommant pour $j \in [\![k; i-1]\!]$ (licite car $k \geqslant 1$ et $i-1 \geqslant k$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \left(\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \right) \\
&= \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k} \\
&= \binom{i-1}{k}
\end{aligned}$$

télescopage

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![k+1; +\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$.

> **♣ Méthode !**
> On peut également procéder par récurrence (récurrence sur i, après avoir fixé k.

7.b. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\forall i \in [\![k, n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_k = i]\big) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

- **Initialisation.** Pour $k = 1$:
  On a $S_1 = X_1$ et donc, d'après la question **1.**, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

$$\mathbb{P}\big([S_1 = i]\big) = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\binom{i-1}{0}$$

  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$. Supposons que "$\forall i \in [\![k,n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_k = i]\big) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$".
  Démontrons que "$\forall i \in [\![k+1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_{k+1} = i]\big) = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k}$".
  Soit $i \in [\![k+1,n]\!]$. On a, d'après la question **6.b.**, licite car $i \in [\![k+1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([S_{k+1} = i]\big) &= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\mathbb{P}\big([S_k = j]\big) && \text{hyppthèse de récurrence, car } j \text{ parcourt } [\![k;-1]\!] \subset [\![k,n]\!] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{i-1}{k-1} && \text{question précédente} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k}\end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall i \in [\![k,n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_k = i]\big) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$.

8. **8.a.** Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

$[T_n > k]$ est réalisé si, et seulement si, il faut plus de k boules pour obtenir une somme des numéros supérieure ou égale à n
si, et seulement si, les k premières boules donnent une somme des numéros strictement inférieure à n
si, et seulement si, $[S_k \leqslant n-1]$ est réalisé

Conclusion : $[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1]$.

8.b. En déduire que : $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\mathbb{P}\big([T_n > k]\big) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.

Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([T_n > k]\big) &= \mathbb{P}\big([S_k \leqslant n-1]\big) && S_k(\Omega) = [\![k;nk]\!] \\ &= \sum_{i=k}^{n-1}\mathbb{P}\big([S_k = j]\big) && \text{question } \textbf{7.b.} \text{ licite car } i \text{ parcourt } [\![k,n-1]\!] \\ &= \frac{1}{n^k}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1} && \text{question } \textbf{7.a.} \text{ licite cra } n \geqslant k+1 \\ &= \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\mathbb{P}\big([T_n > k]\big) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\big([T_n > k]\big)$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

★ Classique ! ★
Ce début de question est un grand classique, à l'écrit comme à l'oral.

-
  - On sait que $T_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Ainsi, $T_n(\Omega)$ est fini donc T_n admet une espérance ; et :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}\big([T_n = k]\big)$$

  - Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On a

$$[T_n \geqslant k] = [T_n > k] \cup [T_n = k]$$

Mais, puisque T_n est à valeurs entières et que k est entier :

$$[T_n \geqslant k] = [T_n \geqslant k-1]$$

D'où :

$$[T_n > k-1] = [T_n > k] \cup [T_n = k]$$

Et ainsi, par incompatibilité de $[T_n > k]$ et $[T_n = k]$, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([T_n = k]\big) = \mathbb{P}\big([T_n > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([T_n > k]\big)$$

Des deux points, on déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}\big([T_n > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([T_n > k]\big)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}\big([T_n > k-1]\big) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}\big([T_n > k]\big) && \text{$j = k-1$ dans la première somme} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\mathbb{P}\big([T_n > j]\big) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}\big([T_n > k]\big) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} j\mathbb{P}\big([T_n > j]\big) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}\big([T_n > k]\big) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([T_n > j]\big) \\
&= 0\mathbb{P}\big([T_n > 0]\big) - n\mathbb{P}\big([T_n > n]\big) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([T_n > j]\big) && \text{$T_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$, donc $[T_n > n] = \varnothing$} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([T_n > j]\big)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([T_n > k]\big)$.

- On poursuit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([T_n > k]\big) && \text{question précédente, licite car k parcourt $[\![0;n-1]\!]$} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-1-k} && \text{formule du binôme de Newton} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(T_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

10. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Important !
Il faut traiter cette question, c'est du cours !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} && 1+\frac{1}{n} > 0 \\
&= \exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or :

✓ $\frac{1}{n} \neq 0$

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'où :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Et donc :

$$(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

✍ Rédaction
Je détaille… Mais à ce stade de l'exercice, pour un résultat si classique, on peut écrire directement que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et poursuivre. À l'oral, on pourrait même dire que

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{n}}$$

et dire que l'on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle en 1 :

Remarque
Ou composition de limites.

$$\lim_{n\to+\infty}\exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\mathrm{e}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(T_n)=\mathrm{e}$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y=k])=\dfrac{k-1}{k!}$.

11.a. Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([Y=k])=1$.

Important !
Il faut traiter cette question !

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([Y=k])&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\\&=1-\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

télescopage

Remarque
Il est possible, ici, de travailler directement sur la somme infinie, en mentionnant bien la convergence des deux séries en jeu au moment de la linéarité. Attention cependant, pas de télescopage sur les sommes infinies : changement d'indice et décomposition.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n!}\right)=1$.

Conclusion : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([Y=k])=1$.

✍ Rédaction
Inutile de mentionner la convergence de cette série, elle est assurée par le cours de probabilités.

11.b. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

Important !
Il faut traiter cette question ! Et la rédiger parfaitement !

- On sait que $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Ainsi :
  Y admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left|k\mathbb{P}([Y=k])\right|$ est convergente
  si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}k\mathbb{P}([Y=k])$ est convergente, car pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $k\mathbb{P}([Y=k])\geqslant 0$
- Soit $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}([Y=k])&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{k!}\\&=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{k!}\\&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}\\&=\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{j!}\end{aligned}$$

$j=k-2$

Or $\sum\limits_{j\geqslant 0}\dfrac{1}{j!}$ est une série exponentielle convergente. Par conséquent, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}k\mathbb{P}([Y=k])$ est convergente.
- On en déduit que Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y)&=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\\&=\mathrm{e}\end{aligned}$$

Conclusion : Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y)=\mathrm{e}$.

12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([T_n > k]\right) = \frac{1}{k!}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$. En particulier, $n > k$ et donc d'après la question **8.b.** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([T_n > k]\right) &= \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \\
&= \frac{1}{n^k}\,\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{1}{n^k}\,\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} \\
&= \frac{1}{k!}\,\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k}
\end{aligned}$$

Important !

On vérifie que le nombre de facteurs de ce produit ne dépend pas de n. Sinon, ce n'est plus un produit, mais une composition...

Or, pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, $n - i \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. D'où :

$$(n-1)(n-2)\dots(n-k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([T_n > k]\right) = \frac{1}{k!}$.

13. Démontrer alors que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([T_n = k]\right) = \mathbb{P}\left([Y = k]\right)$. *On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$. On a vu dans la question **9.** :

$$\mathbb{P}\left([T_n = k]\right) = \mathbb{P}\left([T_n > k-1]\right) - \mathbb{P}\left([T_n > k]\right)$$

✓ Rigueur !

On ne peut pas utiliser directement la question précédente pour $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([T > k-1]\right)$; même si le résultat de la question précédente est bien évidemment valable pour $k = 0$, puisque $\mathbb{P}\left([T_n > 0]\right) = 1$ (car $T_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$). On pourrait donc commencer par dire que le résultat de la question précédente est valable pour $k = 0$ et traiter cette question sans distinguer de cas. Au choix !

Distinguons deux cas :

- si $k \geqslant 2$:
  Dans ce cas, $k - 1 \geqslant 1$ et, d'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([T_n = k]\right) &= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k} \\
&= \frac{k-1}{k!} \\
&= \mathbb{P}\left([Y = k]\right)
\end{aligned}$$

- si $k = 1$:
  On sait alors, d'après la question **2.b.**, que

$$\mathbb{P}\left([T_n = 1]\right) = \frac{1}{n}$$

  D'où :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([T_n = 1]\right) &= 0 \\
&= \mathbb{P}\left([Y = 1]\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([T_n = k]\right) = \mathbb{P}\left([Y = k]\right)$.

14. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sort que l'exécution de `simule_T(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire T_n.

```python
def simule_T(n):
    S = ...
    T = ...
    while ...
        tirage = ...
        S = S + tirage
        T = T+1
    return T
```

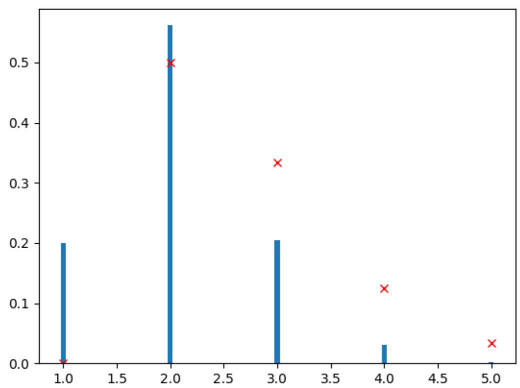
```python
def simule_T(n):
    S = 0
    T = 0
    while S<n:
        tirage = rd.randint(1,n+1)
        S = S + tirage
        T = T+1
    return T
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

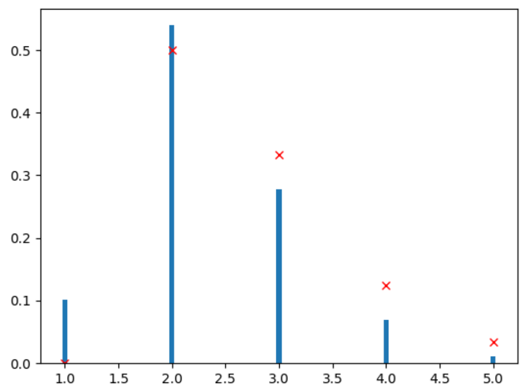
```python
def freqT(n):
    L=[0 for k in range(0,n+1)]
    for i in range(100000):
        k = simule_T(n)
        L[k] = L[k]+1/100000
    return L

def loitheoY(n):
    y=[0 for k in range(0,n+1)]
    for k in range(1,n+1):
        y[k] = (k-1)/np.prod(range(1,k+1))
    return y

n = int(input('n=?'))
x=[1,2,3,4,5]
y1=freqT(n)[1:6]
y2=loitheoY(n)[1:6]
plt.bar(x,y1,width=0.05)
plt.plot(x,y2,'rx')
plt.show()
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphiques ci-dessous :

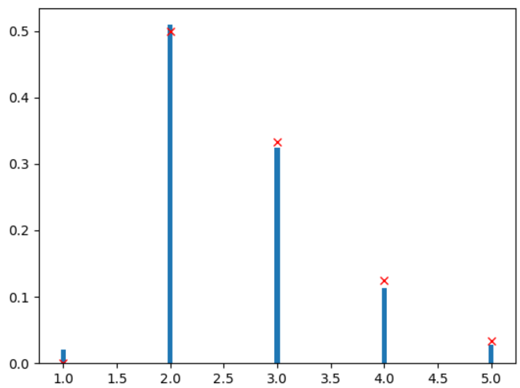
n=5



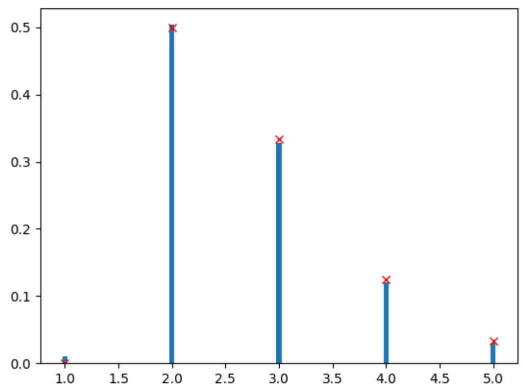
n=10



n=50



n=100



15.a. Expliquer ce que représentent les listes renvoyées par les fonctions **freqT** et **loitheoY**. Comment ces listes sont-elles représentées graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

- La liste renvoyée par l'exécution de `freqT(n)` contient les fréquences d'apparition des évènements $[T_n = i]$ pour $i \in [\![0; n]\!]$ sur 100000 réalisations indépendantes de la variable aléatoire T_n. Ces valeurs sont représentées par les barres.
- La liste renvoyée par l'exécution de `loitheoY(n)` contient les probabilités des évènements $[Y = k]$ pour $k \in [\![0; n]\!]$. Ces valeurs sont représentées par les croix.

15.b. Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question 13..

On voit, à travers ces graphiques, que plus n est grand, plus, pour tout $i \in [\![1; 5]\!]$, la valeur de la fréquence d'apparition de l'évènement $[T_n = i]$ est proche de $\mathbb{P}\big([Y = i]\big)$.

Or, pour un grand nombre de réalisations indépendantes (100000 ici), la fréquence d'apparition de $[T_n = i]$ est elle-même proche de $\mathbb{P}\big([T_n = i]\big)$.

Pourquoi ?
C'est la loi faible des grands nombres qui permet de justifier cela...

Conclusion : ces graphiques permettent bien de vérifier que, pour tout $i \in [\![1; 5]\!]$ et pour n suffisamment grand, on a $\mathbb{P}\big([T_n = i]\big) \simeq \mathbb{P}\big([Y = i]\big)$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★