Devoir surveillé 5

Samedi 13 décembre 2025 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"La question n'est pas de travailler, c'est de faire croire aux autres qu'on travaille."
Tristan Bernard

Exercice 1

Partie 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (-1, 1, 0, 1) \quad ; \quad u_2 = (0, -1, 1, 0) \quad ; \quad u_3 = (0, 1, 1, 0) \quad ; \quad u_4 = (1, 0, 0, 1)$$

   On note $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

   1.a. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

   1.b. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$.

   1.c. En déduire une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice T de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.

2. 2.a. Calculer A^2 et A^3 puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.

   2.b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

   vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

3. 3.a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

   3.b. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n.

   3.c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Partie 2

Soient p un entier naturel non nul et G un graphe non pondéré orienté à p sommets. On note $s_0, s_1, \dots, s_{p-1}$ les sommets de G.

5. 5.a. Rappeler la définition de la matrice d'adjacence du graphe G.

   5.b. Soient n un entier naturel non nul, i un entier de $[\![1;p]\!]$ et j un entier de $[\![1;p]\!]$.
   Rappeler sans justification l'interprétation du coefficient situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice M^n, où M est la matrice d'adjacence du graphe G.

6. Dans cette question uniquement, on suppose que $p = 4$ et que la matrice d'adjacence du graphe G est la matrice A étudiée dans la partie 1..

   6.a. Représenter les sommets et les arêtes du graphe G sous la forme d'une diagramme.

   6.b. Le graphe G est-il connexe ? Justifier votre réponse.

   6.c. Soit n un entier naturel non nul.
   Déterminer le nombre de chemins de longueur n menant du sommet s_3 au sommet s_0.

7. Dans cette question et les suivantes, on revient au cas général décrit au début de la partie 2..
   Soit s un sommet de G. On dit que le sommet t est un voisin de s quand $s \neq t$ et (s, t) est une arête du graphe.
   Comme le graphe est orienté, si t est voisin de s, alors s n'est pas forcément voisin de t.
   On appelle liste d'adjacence du graphe G une liste de p sous-listes telle que, pour tout entier k de $[\![0;p-1]\!]$, la sous-liste située à la position k contient tous les numéros des sommets voisins de s_k.
   Par exemple, la liste d'adjacence du graphe étudié à la question 6. est :

```
L=[[0,3],[0,1,2],[0,1,2],[0,3]]
```

   Écrire une fonction en langage **Python**, nommée **matrice_vers_liste**, prenant en entrée la matrice d'adjacence **A** d'un graphe G (définie sous forme de liste de listes) et renvoyant la liste d'adjacence de G.

8. On cherche à écrire une fonction en langage **Python** permettant d'obtenir la longueur du plus court chemin menant d'une sommet de départ s_i à chaque sommet du graphe G.
   On souhaite pour cela appliquer un algorithme faisant intervenir les variables suivantes :

   - une liste **distances** à p éléments, où l'élément situé à la position k sera égal, à la fin de l'algorithme, à la longueur du plus court chemin menant du sommet de départ s_i au sommet s_k ;
   - une liste **a_explorer** contenant tous les sommets restant à traiter ;
   - une liste **marques** contenant tous les sommets déjà traités.

   Nous donnons ci-dessous la description de l'algorithme :

   - Initialisation des trois listes ci-dessus :

- $\ast$ Initialement, chaque élément de la liste **distances** est égal à p, à l'exception du sommet s_i, auquel on affecte la distance 0.
- $\ast$ La liste **marques** ne contient initialement que la numéro du sommet de départ s_i.
- $\ast$ La liste **a_explorer** ne contient initialement que le numéro du sommet de départ s_i.

- Tant que la liste **a_explorer** n'est pas vide, on répète les opérations suivantes :
  - $\ast$ Nommer **s** le premier sommet de la liste **a_explorer** et le retirer de cette liste.
  - $\ast$ Pour chaque voisin **v** du sommet **s** : si **v** n'est pas dans la liste **marques**, on l'ajoute à la liste **marques**, on l'ajoute à la fin de la liste **a_explorer** et on lui affecte une distance égale à **distances[s]+1**.

8.a. On considère le graphe orienté G étudié à la question 6..
Donner la valeur de liste **distances** à l'issue de l'exécution de l'algorithme décrit ci-dessus lorsqu'on l'applique au graphe G et en choisissant s_1 comme sommet de départ.

8.b. Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en entrée la liste d'adjacence **L** d'un graphe G et le numéro **i0** du sommet de départ, et renvoyant la liste **distances** après exécution de l'algorithme décrit ci-dessus.

```
def parcours(L,i0):
    p=len(L)
    distances=..........
    distances[i0]=0
    a_explorer=..........
    marques=..........
    while ..........
        s=..........
        ..........
        for v in ..........
            if v not in marques:
                marques.append(v)
                ..........
                ..........
    return distances
```

8.c. Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie la liste de tous les sommets s pour lesquels il existe un chemin menant du sommet de départ s_i au sommet s.

Exercice 2

1. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n}\,dt$.

   1.a. Calculer, pour $A \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{A} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$ puis en déduire que I_1 est divergente.

   1.b. Montrer, grâce à une intégration par parties, que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, l'intégrale I_n est convergente et vaut $\dfrac{1}{(n-1)^2}$.

2. Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{\ln(k)}{k^2}$.

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$.

   3.a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est une densité de probabilité. Dans toute la suite, X est une variable aléatoire de densité g.

   3.b. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.

   3.c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

4. On note G la fonction de répartition de X.

   4.a. Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   4.b. Dresser le tableau de variations de G puis démontrer que G est bijective de $[1;+\infty[$ dans un intervalle à déterminer.

   4.c. On pose $Y = G(X)$. Démontrer que la variable aléatoire Y est à densité et en déterminer une densité.

   4.d. Établir enfin :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{2\ln(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

5. On pose $Z = \lfloor X \rfloor$.

   5.a. Déterminer $Z(\Omega)$.

   5.b. Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Z=k]\big) = G(k+1) - G(k)$.

   5.c. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([Z=k]\big) = -(n+1)\big(1-G(n+1)\big) + \sum_{k=0}^{n} \big(1-G(k+1)\big)$$

   5.d. Montrer : $\big(1-G(k)\big) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(k)}{k^2}$.

   5.e. Démontrer alors que la variable aléatoire Z admet une espérance.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. **2.a.** Déterminer $T_n(\Omega)$.
   2.b. Calculer $\mathbb{P}\big([T_n = 1]\big)$.
   2.c. Montrer que :
   $$\mathbb{P}\big([T_n = n]\big) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Calculer $\mathbb{E}(T_3)$.

Partie B

5. Donner $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   6.a. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.
   6.b. En utilisant un système complet d'évènements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :
   $$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_{k+1} = i]\big) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}\big([S_k = j]\big)$$
7. **7.a.** Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:
   $$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$
   7.b. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :
   $$\forall i \in [\![k, n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_k = i]\big) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$$
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.
8. **8.a.** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.
   8.b. En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}\big([T_n > k]\big) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([T_n > k]\big)$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.
10. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Y = k]\big) = \dfrac{k-1}{k!}$.
    11.a. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = k]\big) = 1$.
    11.b. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :
    $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([T_n > k]\big) = \frac{1}{k!}$$

13. Démontrer alors que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([T_n = k]\big) = \mathbb{P}\big([Y = k]\big)$. *On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.*

14. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sort que l'exécution de **simule_T(n)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire T_n.

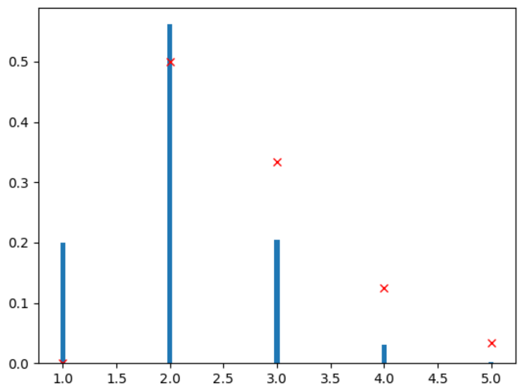
```python
def simule_T(n):
    S = ...
    T = ...
    while ...
        tirage = ...
        S = S + tirage
        T = T+1
    return T
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

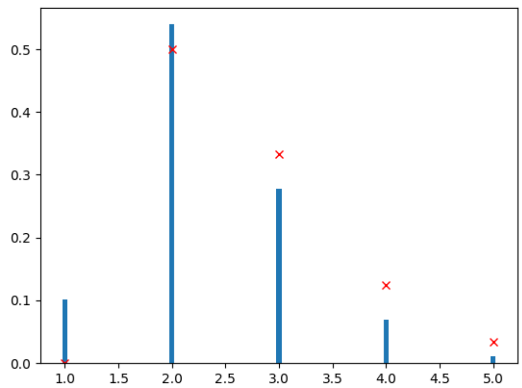
```python
def freqT(n):
    L=[0 for k in range(0,n+1)]
    for i in range(100000):
        k = simule_T(n)
        L[k] = L[k]+1/100000
    return L

def loitheoY(n):
    y=[0 for k in range(0,n+1)]
    for k in range(1,n+1):
        y[k] = (k-1)/np.prod(range(1,k+1))
    return y

n = int(input('n=?'))
x=[1,2,3,4,5]
y1=freqT(n)[1:6]
y2=loitheoY(n)[1:6]
plt.bar(x,y1,width=0.05)
plt.plot(x,y2,'rx')
plt.show()
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphiques ci-dessous :

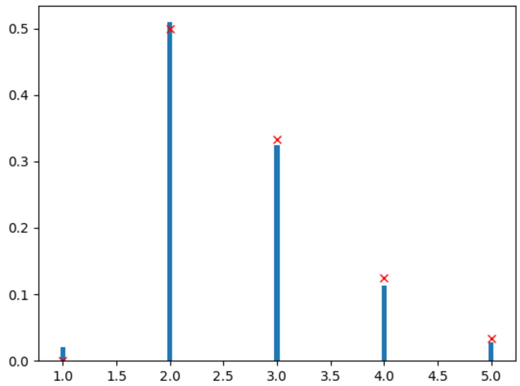
n=5



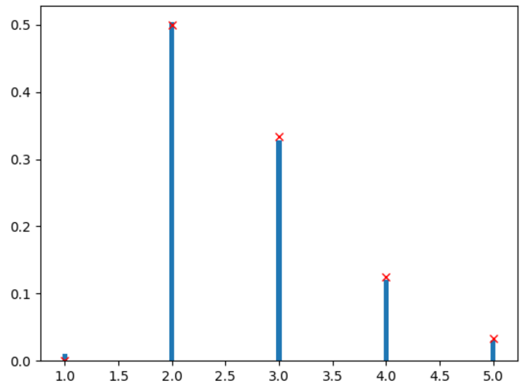
n=10



n=50



n=100



15.a. Expliquer ce que représentent les listes renvoyées par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces listes sont-elles représentées graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

15.b. Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question 13..

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★