Devoir surveillé 5
Samedi 14 décembre 2024 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- un aide-mémoire **Python** est donné en fin de sujet.
  Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Un athlète ne peut arriver en compétition très motivé s'il n'a jamais été mis à l'épreuve."
Sénèque

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont trop souvent été oubliés...

Exercice 1 (Fait maison)

Question de cours. Définition de valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.a. Déterminer le rang de A. En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base de l'espace propre associé.

- $$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right) && C_2 = C_1 \text{ et } C_3 = C_1 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) && \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est non nul} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- On en déduit que 0 est valeur propre de A et, par théorème du rang :
$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \mathrm{rg}(A) + \dim\left(\ker(A)\right)$$
D'où :
$$\dim\left(\ker(A)\right) = 2$$
L'espace propre associé à la valeur propre 0, noté $E_0(A)$, est de dimension 2.
- Ensuite :
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A) \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$$
Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_0(A)$ qui est :
  - ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires,
  - ✓ de cardinal 2, égal à $\dim\left(E_0(A)\right)$.

  C'est donc une base de $E_0(A)$.

Conclusion : 0 est valeur propre de A, $\dim\left(E_0(A)\right) = 2$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A)$.

1.b. Justifier que 6 est valeur propre de A et donner une base de l'espace propre associé.

- $$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - 6I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\right) && C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0_{3,1}\text{n donc } C_1 = -2C_2 - 3C_3 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right) && \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires} \\ &= 2 \end{aligned}$$

- On en déduit que 6 est valeur propre de A et, par théorème du rang :
$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \mathrm{rg}(A - 6I_3) + \dim\left(\ker(A - 6I_3)\right)$$
D'où :
$$\dim\left(\ker(A - 6I_3)\right) = 1$$
L'espace propre associé à la valeur propre 6, noté $E_6(A)$, est de dimension 1.
- Ensuite :
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \ker(A)$$
Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_6(A)$ qui est :

♡ Astuce du chef ! ♡
Remarquer les égalités $C_1 - C_3 = 0_{3,1}$ et $C_1 - C_2 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence deux vecteurs du noyau de la matrice A...
En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B, on a : $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3$,
donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$...

☞ Rappel...
Le rang d'une famille libre est son cardinal.

Pourquoi ?
Ce sont les combinaisons linéaires sur les colonnes mises en évidence dans le calcul du rang qui permettent d'avoir cela directement. Voir l'astuce du chef...

♣ Méthode !
On écrit la matrice $A - 6I_3$ au brouillon. On cherche une combinaison linéaire entre les colonnes pendant quelques secondes... Si on ne trouve pas, alors on se lance sans perdre de temps dans une résolution de $AX = 6X$.

♡ Astuce du chef ! ♡
Voir la précédente.

☞ Rappel...
Le rang d'une famille libre est son cardinal.

Pourquoi ?
Voir l'astuce du chef...

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
✓ de cardinal 1, égal à $\dim\left(E_6(A)\right)$.

C'est donc une base de $E_6(A)$.

> **Conclusion :** 6 est valeur propre de A, $\dim\left(E_6(A)\right) = 1$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_6(A)$.

1.c. La matrice A possède-t-elle d'autres valeurs propres ?

On sait que

✓ les espaces propres sont de dimension au moins 1,
✓ la somme des dimensions des espaces propres est inférieur ou égal à 3 (car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$),
✓ $\dim\left(E_0(A)\right) + \dim\left(E_6(A)\right) = 3$.

☞ Rappel...
Dans le cours, on a :
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim\left(E_\lambda(A)\right) \geqslant 1$$
et
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\left(\mathbb{E}_\lambda(A)\right) \leqslant n$$

> **Conclusion :** par saturation des dimensions, A ne possède aucune autre valeur propre.

1.d. Démontrer que la matrice A est diagonalisable puis donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Notons $\mathscr{B}$ la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$. La famille $\mathscr{B}$ est :

✓ libre car c'est la concaténation de familles libres de sous-espaces propres de A associées à des valeurs propres distinctes,
✓ de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

Par conséquent, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

> **Conclusion :** il existe donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A, donc A est diagonalisable et, en posant
>
> $$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 2\\0 & -1 & 3\end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$
>
> on a :
>
> ✓ P est inversible car c'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base $\mathscr{B}$,
> ✓ D est diagonale,
> ✓ $A = PDP^{-1}$.

Pourquoi ?
Cette égalité est une conséquence de la formule de changement de base sur les applications linéaires.

2. On considère maintenant trois variables aléatoires X, Y, Z définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1.
On considère également la matrice aléatoire M définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ M(\omega) = \begin{pmatrix}X(\omega) & X(\omega) & X(\omega)\\Y(\omega) & Y(\omega) & Y(\omega)\\Z(\omega) & Z(\omega) & Z(\omega)\end{pmatrix}$$

On définit également la variable aléatoire R définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ R(\omega) = \mathrm{rg}\big(M(\omega)\big)$$

2.a. Écrire un programme **Python** permettant de simuler au hasard 100 matrices $M(\omega)$ puis d'en afficher le rang.

Voici :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al

for k in range(100):
    (X,Y,Z)=rd.poisson(1,3)
    M=np.array([[X,X,X],[Y,Y,Y],[Z,Z,Z]])
    print(al.matrix_rank(M))
```

✗ Attention !
Il faut faire de sorte que les trois colonnes soient identiques...

2.b. Démontrer que R suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-3}$.

- Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) & X(\omega) \\ Y(\omega) & Y(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & Z(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}\right) && \quad C_2 = C_1 \text{ et } C_3 = C_1 \\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \\ Z(\omega) \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$R(\Omega) \subset \{0; 1\}$$

- Ensuite, d'après ce qui précède :

$$\forall \omega \in \Omega,\ R(\omega) = 0 \iff X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 0$$

D'où :

$$[R = 0] = [X = 0] \cap [Y = 0] \cap [Z = 0]$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([R = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X = 0] \cap [Y = 0] \cap [Z = 0]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X = 0]\big) \times \mathbb{P}\big([Y = 0]\big) \times \mathbb{P}\big([Z = 0]\big) && \quad \text{indépendance de } X, Y, Z \\ &= \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^3 && \quad X, Y, Z \text{ suivent la loi de Poisson de paramètre } 1 \\ &= \mathrm{e}^{-3} \end{aligned}$$

- Et, comme $R(\Omega) \subset \{0; 1\}$, on a :

$$\mathbb{P}\big([R = 0]\big) + \mathbb{P}\big([R = 1]\big) = 1$$

D'où :

$$\mathbb{P}\big([R = 1]\big) = 1 - \mathrm{e}^{-3}$$

Petite remarque

Puisque $\mathbb{P}\big([R = 0]\big) \neq 0$ et $\mathbb{P}\big([R = 1]\big) \neq 0$, on a $[R = 0] \neq \varnothing$ et $[R = 1] \neq \varnothing$, et donc $\{0; 1\} \subset R(\Omega)$. D'où l'égalité $R(\Omega) = \{0; 1\}$. Mais ce n'est pas un attendu et non nécessaire pour conclure.

Conclusion : R suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-3}$.

2.c. Calculer, pour tout $\omega \in \Omega$, le produit $M(\omega) \begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \\ Z(\omega) \end{pmatrix}$.

Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned} M(\omega) \begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \\ Z(\omega) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X(\omega)\big(X(\omega) + Y(\omega) + Z(\omega)\big) \\ Y(\omega)\big(X(\omega) + Y(\omega) + Z(\omega)\big) \\ Z(\omega)\big(X(\omega) + Y(\omega) + Z(\omega)\big) \end{pmatrix} \\ &= \big(X(\omega) + Y(\omega) + Z(\omega)\big) \times \begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \\ Z(\omega) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.d. Démontrer alors que pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 0 \iff \text{Sp}\big(M(\omega)\big) = \{0\}$$

Soit $\omega \in \Omega$. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 0$.
Dans ce cas :

$$M(\omega) = 0_3$$

Ainsi : $\text{Sp}\big(M(\omega)\big) = \{0\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Démontrons la contraposée de l'implication désirée...
Supposons que $X(\omega)$, $Y(\omega)$ et $Z(\omega)$ ne sont pas tous les trois nuls.
Dans ce cas

$$\begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \\ Z(\omega) \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$$

Par conséquent, d'après la question précédente, $X(\omega) + Y(\omega) + Z(\omega)$ est valeur propre de $M(\omega)$ et le vecteur $\begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \\ Z(\omega) \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

Mais X, Y, Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et au moins un des trois entiers $X(\omega), Y(\omega), Z(\omega)$ est non nul, donc

$$X(\omega) + Y(\omega) + Z(\omega) \neq 0$$

La valeur propre $X(\omega) + Y(\omega) + Z(\omega)$ est dnc non nulle... Par conséquent :

$$\text{Sp}\big(M(\omega)\big) \neq \{0\}$$

Par contraposée, on a ainsi démontré :

$$\text{Sp}\big(M(\omega)\big) = 0 \implies X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 0$$

Conclusion : pour tout $\omega \in \Omega,\ X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 0 \iff \mathrm{Sp}\big(M(\omega)\big) = \{0\}$.

2.e. En déduire la probabilité de l'évènement $[\mathrm{Sp}(M) = \{0\}]$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([\mathrm{Sp}(M) = \{0\}]\big) &= \mathbb{P}\big([X = Y = Z = 0]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([R = 0]\big) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-3}\end{aligned}$$

question 2.b

☞ Pour info...

On pourrait démontrer que pour tout $\omega \in \Omega$, la matrice $M(\omega)$ est diagonalisable...

Exercice 2 (EDHEC 1999 E)

Question de cours. Lemme des coalitions.

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y, Z suivent la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, où $n \geqslant 2$.

1. Démontrer : $\forall k \in [\![2;n+1]\!],\ \mathbb{P}\big([X+Y=k]\big) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   Cette relation est-elle encore valable quand $k=1$?

➠Réflexe ! La loi de la somme de 2 VA discrètes : FPT !!

- Soit $k \in [\![2;n+1]\!]$.D'après la formule des probabilités totales avec $\big([Y=i]\big)_{i\in[\![1;n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X+Y=k]\big) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([X+Y=k]\cap[Y=i]\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([X=k-i]\cap[Y=i]\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([X=k-i]\big)\mathbb{P}\big([Y=i]\big)\end{aligned}$$

X et Y sont indépendantes

Or, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l} k-i \in X(\Omega)\\ i \in Y(\Omega)\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant k-i \leqslant n\\ 1 \leqslant i \leqslant n\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{l} k-n \leqslant i \leqslant k-1\\ 1 \leqslant i \leqslant n\end{array}\right.\\ &\iff \max(k-n,1) \leqslant i \leqslant \min(k-1,n)\\ &\iff 1 \leqslant i \leqslant k-1\end{aligned}$$

$k \in [\![2;n+1]\!]$, donc $k-n \leqslant 1$ et $k-1 \leqslant n$

☞ Rappel... $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x \leqslant y\\ x \leqslant z\end{array}\right. \iff x \leqslant \min(y,z)$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} x \geqslant y\\ x \geqslant z\end{array}\right. \iff x \geqslant \max(y,z)$$

On en déduit que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, si $i \notin [\![1;k-1]\!]$, alors $\mathbb{P}\big([X=k-i]\big)\mathbb{P}\big([Y=i]\big) = 0$. D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X+Y=k]\big) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\big([X=k-i]\big)\mathbb{P}\big([Y=i]\big)\\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\\ &= \frac{k-1}{n^2}\end{aligned}$$

X et Y suivent la loi $\mathscr{U}\big([\![1;n]\!]\big)$ et pour tout $i \in [\![1:k-1]\!]$, $i \in Y(\Omega)$ et $k-i \in X(\Omega)$

Conseil Au moment de remplacer $\mathbb{P}\big([X=k-i]\big)$ et $\mathbb{P}\big([Y=i]\big)$, on vérifie que $k-i \in X(\Omega)$ et $i \in Y(\Omega)$...

- Ensuite, puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$, on a :

$$(X+Y)(\Omega) \subset [\![2;2n]\!]$$

Donc $\mathbb{P}\big([X+Y=2]\big) = 0$. La relation trouvée est donc encore valable si $k=1$...

Conclusion : $\forall k \in [\![1;n+1]\!],\ \mathbb{P}\big([X+Y=k]\big) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

2. Démontrer alors :

$$\mathbb{P}\big([X+Y=Z]\big) = \frac{n-1}{2n^2}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Z=k]\big)_{k\in[\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X+Y=Z]\big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([Z=k]\cap[X+Y=Z]\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([Z=k]\cap[X+Y=k]\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([Z=k]\big)\mathbb{P}\big([X+Y=k]\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\,\frac{k-1}{n^2}\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k-1\end{aligned}$$

X, Y, Z sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, $X+Y$ et Z le sont aussi

$Z \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1;n]\!]\big)$ et question précédente (licite car $k \in [\![1;n]\!]$)

$i = k-1$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i$$
$$= \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n}{2}$$
$$= \frac{n-1}{2n^2}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left([X+Y=Z]\right) = \dfrac{n-1}{2n^2}$.

3. Expliquer ce que permet d'obtenir l'exécution de la fonction **`mystere`**, écrite en langage **`Python`** ci-dessous.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def mystere(n):
    c=0
    for k in range(10000):
        (X,Y,Z)=rd.randint(1,n+1,3)
        if X+Y==Z:
            c=c+1
    return c/10000
```

Ce programme simule 10000 fois la même expérience consistant à :

- simuler une réalisation de X, Y, Z
- incrémenter un compteur de 1 lorsque $X+Y=Z$

Autrement dit, la variable `c` contiendra le nombre de fois où, sur les 10000 répétitions, l'évènement $[X+Y=Z]$ aura été réalisé.
L'exécution de `mystere(n)` renverra alors la fréquence de réalisation de cet évènement sur les 10000 répétitions.

Petite remarque
La loi faible des grands nombres permet d'affirmer qu'une moyenne empirique est proche de l'espérance ; et qu'une fréquence empirique est proche d'une probabilité.

Conclusion : par conséquence de la loi faible des grands nombres, la valeur obtenue par l'exécution de la fonctions sera proche de la probabilité de l'évènement $[X+Y=Z]$.

4. On pose $T = n+1-Z$.

4.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire T.

- Puisque $Z(\Omega) = [\![1;n]\!]$, on a : $T(\Omega) = [\![1;n]\!]$.
- Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([T=k]\right) &= \mathbb{P}\left([n+1-Z=k]\right)\\ &= \mathbb{P}\left([Z=n+1-k]\right)\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$Z \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1;n]\!]\right)$ et $k \in [\![1;n]\!]$, donc $n+1-k \in Z(\Omega)$

Important !
Il faut se poser la question de l'appartenance de $n+1-k$ à $Z(\Omega)$; et il faut montrer que l'on se pose cette question...

Conclusion : $T \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1;n]\!]\right)$.

4.b. Justifier que T est indépendante de X et Y.
On sait que Z est indépendante de X et Y ; donc, par lemme des coalitions, toute fonction de Z est encore indépendante de X et Y.

Conclusion : T est indépendante de X et Y.

4.c. Déduire des questions précédentes la valeur de $\mathbb{P}\left([X+Y+Z=n+1]\right)$.
On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([X+Y+Z=n+1]\right) &= \mathbb{P}\left([X+Y=n+1-Z]\right)\\ &= \mathbb{P}\left([X+Y=T]\right)\\ &= \frac{n-1}{n^2}\end{aligned}$$

on se retrouve dans le cas de 2

Conclusion : $\mathbb{P}\left([X+Y+Z=n+1]\right) = \dfrac{n-1}{2n^2}$.

Exercice 3 (EML 2008 E)

Question de cours. Loi binomiale de paramètres n et p : définition, modèle, propriétés.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I. Étude d'une variable aléatoire à densité

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$\forall x \in [0;1], \;\; h(x) = \frac{x}{2-x}$$

1.a. Montrer que h est une bijection de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et, pour tout $y \in [0;1]$, déterminer $h^{-1}(y)$.

Méthode !
En fait, il n'est pas nécessaire de commencer par utiliser le théorème de bijection. En effet, trouver une unique solution, pour tous $x, y \in [0;1]$, à l'équation $y = h(x)$, prouve que h est bijective de $[0;1]$ dans $[0;1]$...

- **Bijectivité.** La fonction h est dérivable sur $[0;1]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[0;1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$. Et, pour tout $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2-x-x(-1)}{(2-x)^2} \\ &= \frac{2}{(2-x)^2} \end{aligned}$$

On en déduit :

x	0	1
$h'(x)$	$+$	
h	$0 \nearrow$	1

Important !
Il faut prendre l'habitude de donner les tableaux de variations, même quand ils ne sont pas demandés.

Par conséquent :

✓ h est continue sur $[0;1]$ (car dérivable),
✓ h est strictement croissante sur $[0;1]$.

Par théorème de bijection, on en déduit que h est bijective de $[0;1]$ dans $h\big([0;1]\big)$.
Et $h\big([0;1]\big) = [0;1]$.

Conclusion : h est bijective de $[0;1]$ dans $[0;1]$.

- **Expression de h^{-1}.**
Soient $y \in [0;1]$. Résolvons l'équation $y = h(x)$, d'inconnue $x \in [0;1]$.
Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$\begin{aligned} y = h(x) &\iff y = \frac{x}{2-x} && x \in [0;1], \text{ donc } 2-x \neq 0 \\ &\iff (2-x)y = x \\ &\iff 2y = x + xy \\ &\iff (1+y)x = 2y && y \in [0;1], \text{ donc } 1+y \neq 0 \\ &\iff x = \frac{2y}{1+y} \end{aligned}$$

Petite remarque
Si la bijectivité de h n'avait pas été démontrée au préalable, on dirait ici "donc h est bijective de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et, pour tout $y \in [0;1]$, $h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y}$.

Conclusion : $\forall y \in [0;1], \;\; h^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1+y}$.

Petite remarque
Se contenter de "remarquer" la décomposition demandée suffit pour obtenir tous les points. Détaillons cependant la rédaction de cette question...

1.b. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in [0;1], \;\; h(x) = a + \dfrac{b}{2-x}$.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0;1], \; h(x) = a + \frac{b}{2-x} &\iff \forall x \in [0;1], \; \frac{x}{2-x} = \frac{a(2-x)+b}{2-x} \\ &\iff \forall x \in [0;1], \; \frac{x}{2-x} = \frac{2a+b-ax}{2-x} && \forall x \in [0;1], \; 2-x \neq 0 \\ &\iff \forall x \in [0;1], \; x = 2a+b-ax && \text{unicité des coefficients d'une fonction polynomiale (ou "par identification")} \end{aligned}$$

Important !
La quantification "$\forall x \in [0;1]$" est INDISPENSABLE à chaque étape. En effet, la ligne "$\forall x \in [0;1], \; x = 2a+b-ax$" traduit une égalité des deux fonctions polynomiales $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 2a+b-ax$: cette égalité de fonction est nécessaire pour l'argument "d'identification".

$$\iff \begin{cases} 2a+b=0 \\ -a \quad\;\; =1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=-1 \\ b=\;\;2 \end{cases}$$

Conclusion : $\forall x \in [0;1],\ h(x) = -1 + \dfrac{2}{2-x}.$

✍ **Rédaction**
C'est une des rares fois où la formulation de la conclusion diffère de la formulation de la question...

1.c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$.

Cette intégrale n'est pas impropre, car h est continue sur le segment $[0;1]$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x)dx &= \int_0^1 -1+\frac{2}{2-x}dx \\ &= \big[-x-2\ln(|2-x|)\big]_0^1 \\ &= -1-\big(-2\ln(2)\big) \\ &= 2\ln(2)-1\end{aligned}$$

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $Y = \dfrac{X}{2-X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

2.a. Rappeler la fonction de répartition de X, notée F_X.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}.$

2.b. Démontrer que pour tout réel x, on a $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2x}{1+x} & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}.$

- Remarquons qu'on a :
$$Y = h(X)$$
Ainsi :
$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h\big([0;1]\big) && X \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1]) \\ &= [0;1] && \text{question 1.a}\end{aligned}$$

Important !
On commence par regarder s'il est possible de déterminer $Y(\Omega)$... Il faut faire les liens avec ce qui précède !

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x<0$:
$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && x<0 \text{ et } Y(\Omega)=[0;1], \text{ donc } [Y \leqslant x]=\varnothing \\ &= 0 \end{aligned}$$
  - ⋆ Si $x>1$:
$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\Omega) && x>1 \text{ et } Y(\Omega)=[0;1], \text{ donc } [Y \leqslant x]=\Omega \\ &= 1 \end{aligned}$$
  - ⋆ Si $x \in [0;1]$:
$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([h(X) \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant h^{-1}(x)]\big) && h \text{ est bijective et strictement croissante sur } [0;1] \\ &= F_X\big(h^{-1}(x)\big) \\ &= h^{-1}(x) && \text{puisque } h \text{ est bijective de } [0;1] \text{ dans } [0;1], \text{ on a } h^{-1}(x) \in [0;1] \\ &= \frac{2x}{1+x} && \text{question 1.a, licite car } x \in [0;1] \end{aligned}$$

✓ **Rigueur !**
Il est nécessaire de se poser la question de l'appartenance de $h^{-1}(x)$ à $[0;1]$ avant de remplacer l'expression... On rappelle que F_X est définie en 3 morceaux !

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{1+x} & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Petite remarque
Le résultat est donné, il est donc d'autant plus important que les justifications soient précises et exhaustives pour avoir les points.

2.c. En déduire que la variable aléatoire Y est à densité et en déterminer une densité.

- **Continuité.**
  - sur $]-\infty;0[$: la fonction F_Y est continue sur $]-\infty;0[$ car constante sur cet intervalle
  - sur $]1;+\infty[$: la fonction F_Y est continue sur $]1;+\infty[$ car constante sur cet intervalle
  - sur $]0;1[$: F_Y est continue comme quotient de deux fonctions continues sur $]0;1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;1[$
  - en 0 :
  $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F_Y(x) = 0 = F_Y(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F_Y(x)$$
  Donc F_Y est continue en 0.
  - en 1 :
  $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F_Y(x) = F_Y(1) = 1 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} F_Y(x)$$
  Donc F_Y est continue en 1.

  La fonction F_Y est donc continue sur $\mathbb{R}$.
- **Caractère $\mathscr{C}^1$.**
  Par des arguments similaires à la continuité (sur les intervalles ouverts), F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

Par conséquent, la variable aléatoire Y est à densité et admet pour densité la fonction f_Y définie sur $\mathbb{R}$ par :

- pour tout $x \in]0;1[$
$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F'_Y(x) \\ &= \frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{2}{(1+x)^2} \end{aligned}$$
- pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$:
$$f_Y(x) = 0$$
- $f_Y(0) = 2$ et $f_Y(1) = \dfrac{1}{2}$

☞ Rappel...
On dérive sur les intervalles ouverts (car F_Y n'est peut-être pas dérivable en 0 et en 1) et on choisit des valeurs positives qui nous conviennent en 0 et en 1. La rédaction doit être claire sur ce point !

Conclusion : Y est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_Y : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.d. Justifier que Y possède une espérance puis déterminer la valeur de $\mathbb{E}(Y)$ en utilisant le résultat de la question 1.c.

- Puisque $Y(\Omega) = [0;1]$, qui est un ensemble borné, la variable aléatoire admet une espérance.
- Puis, comme $Y = h(X)$, par théorème de transfert, licite car h est continue sur $X(\Omega)$ ($X(\Omega) = [0;1]$), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_{X(\Omega)} h(x) f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 h(x)dx \\ &= 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

question 1.c

Conclusion : Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = 2\ln(2) - 1$.

Partie II. Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1, \dots, I_n$.
Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.
Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on modélise l'instant d'arrivée de l'individu I_k par une variable aléatoire T_k suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On suppose que les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ sont mutuellement indépendantes.

3. Soit t un réel de $[0;1]$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'évènement $[T_k \leqslant t]$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

   On note $S_t = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k$.

3.a. Que modélise la variable aléatoire S_t ?

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, B_k prend la valeur 1 si l'individu I_k est arrivé au plus tard à l'instant t ; et prend la valeur 0 sinon.
Et $S_t = B_1 + \dots + B_n$.

Conclusion : S_t compte le nombre d'individus arrivés au plus tard à l'instant t.

3.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_t.

✓ Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}\big([T_k \leqslant t]\big)$.
Or, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, puisque T_k suit la loi uniforme sur $[0;1]$ et que $t \in [0;1]$, on a :

$$\mathbb{P}\big([T_k \leqslant t]\big) = t$$

✓ Puisque les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ sont mutuellement indépendantes, les variables aléatoires $B_1, \dots, B_n$ le sont également.

Par conséquent, S_t est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre t.

Conclusion : S_t suit la loi binomiale de paramètres n et t.

➠Réflexe !
S_t est une somme de VA suivant une loi de Bernoulli !! Sont-elles indépendantes ? Ont-elles même paramètre ? Si oui, il suffira d'utiliser la stabilité de la loi binomiale (son cas particulier avec de Bernoulli).

4. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

4.a. Soit $t \in [0;1]$. Comparer les évènements $[R_1 > t]$ et $[S_t = 0]$.

$[R_1 > t]$ est réalisé	si, et seulement si,	le premier individu arrive après l'instant t
	si, et seulement si,	à l'instant t, personne n'est encore arrivé
	si, et seulement si,	$[S_t = 0]$ est réalisé

Conclusion : $[R_1 > t] = [S_t = 0]$.

4.b. Montrer que la variable aléatoire R_1 est à densité et en déterminer une densité.

- On considère déjà :

$$R_1(\Omega) = [0;1]$$

- Notons F_1 la fonction de répartition de R_1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :
  - ⋆ si $t < 0$:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \mathbb{P}\big([R_1 \leqslant t]\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$t < 0$ et $R_1(\Omega) = [0;1]$, donc $[R_1 < t] = \varnothing$

  - ⋆ si $t > 1$:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \mathbb{P}\big([R_1 \leqslant t]\big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$t > 1$ et $R_1(\Omega) = [0;1]$, donc $[R_1 < t] = \Omega$

  - ⋆ si $t \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \mathbb{P}\big([R_1 \leqslant t]\big) \\ &= 1 - \mathbb{P}\big([R_1 > t]\big) \\ &= 1 - \mathbb{P}\big([S_t = 0]\big) && \text{question précédente} \\ &= 1 - (1-t)^n && S_t \hookrightarrow \mathscr{B}(n,t) \end{aligned}$$

  Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(1-t)^n & \text{si } t \in [0;1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- ⋆ **Continuité.**
  La fonction F_1 est continue sur $\mathbb{R}$ (en vérifiant la continuité en 0 et en 1...).
  - ⋆ **Caractère $\mathscr{C}^1$.**
  La fonction F_1 est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

  La variable aléatoire R_1 est donc à densité et admet pour densité la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in]0;1[,\ f_1(t) = n(1-t)^{n-1} \quad ; \quad \forall t \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[,\ f_1(t) = 0 \quad ; \quad f_1(0) = n \quad ; \quad f_1(1) = 0$$

✍ Rédaction
En fin d'exercice, sur une question dont la méthode a déjà été mise en place précédemment (et suffisamment bien détaillée), on peut se permettre d'aller plus vite !

Conclusion : R_1 est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_1 : t \longmapsto \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la seconde arrivée.
Montrer que la variable aléatoire R_2 est à densité et en déterminer une densité.

- On considère déjà :

$$R_2(\Omega) = [0;1]$$

- Notons F_2 la fonction de répartition de R_2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :
  - si $t < 0$:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \mathbb{P}\big([R_1 \leqslant t]\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$t < 0$ et $R_2(\Omega) = [0;1]$, donc $[R_2 < t] = \varnothing$

  - si $t > 1$:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \mathbb{P}\big([R_2 \leqslant t]\big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$t > 1$ et $R_2(\Omega) = [0;1]$, donc $[R_2 < t] = \Omega$

  - si $t \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \mathbb{P}\big([R_2 \leqslant t]\big) \\ &= 1 - \mathbb{P}\big([R_2 > t]\big) \\ &= 1 - \mathbb{P}\big([S_t \leqslant 1]\big) \\ &= 1 - \Big(\mathbb{P}\big([S_t = 0]\big) + \mathbb{P}\big([S_t = 1]\big)\Big) \\ &= 1 - \left((1-t)^n + \binom{n}{1} t(1-t)^{n-1}\right) \\ &= 1 - (1-t)^n - nt(1-t)^{n-1} \end{aligned}$$

raisonnement analogue à la question 4.a : $[R_2 > t] = [S_t = 1]$

S_t est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$

$S_t \hookrightarrow \mathscr{B}(n,t)$

Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(1-t)^n - nt(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0;1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

-
  - **Continuité.**
  La fonction F_2 est continue sur $\mathbb{R}$ (en vérifiant la continuité en 0 et en 1...).
  - **Caractère $\mathscr{C}^1$.**
  La fonction F_2 est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

La variable aléatoire R_2 est donc à densité et admet pour densité la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[,\ f_2(t) = 0$$

pour tout $t \in]0;1[$:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= n(1-t)^{n-1} - n(1-t)^{n-1} + n(n-1)t(1-t)^{n-2} \\ &= n(n-1)t(1-t)^{n-2} \end{aligned}$$

et :

$$f_2(0) = 0 \quad ; \quad f_2(1) = 0$$

Conclusion : R_2 est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_2 : t \longmapsto \begin{cases} n(n-1)t(1-t)^{n-2} & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 4 (EML 2009 E)

Question de cours. Inégalité des accroissements finis.

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Partie I. Étude d'une fonction

1. 1.a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- f est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues sur ces intervalles **dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.**

PARDON ? ?!!
C'est assez visible ou je rajoute des paillettes ?

- En 0 :
Puisque $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$$
Par conséquent :
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$$
Donc f est continue en 0.

Conclusion : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

1.b. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Pour $x \neq 0$, suffisamment proche de 0, on a :
$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{x}{e^x-1} - 1}{x} \\ &= \frac{\frac{x-e^x+1}{e^x-1}}{x} \\ &= \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}\end{aligned}$$

Or, au voisinage de 0 :

- $$\begin{aligned} x - e^x + 1 &= x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= \frac{-x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{2}x^2 \end{aligned}$$
- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc
$$x(e^x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

Ainsi :
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{2}$$
Par conséquent :
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-1}{2}$$

Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$.

1.c. Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

1.d. En déduire que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On sait déjà que

✓ f est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$;

✓ f est dérivable en 0.

Il ne reste qu'à démontrer que f' est continue en 0. On avait :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

Or, au voisinage de 0 :

- $$\begin{aligned} e^x - 1 - xe^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2) - 1 - x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2) - x - x^2 \\ &= \frac{-1}{2}x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2) \\ &\underset{x \to 0}{\sim} \frac{-1}{2}x^2 \end{aligned}$$
- $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$, donc :

$$(e^x - 1)^2 \underset{x \to 0}{\sim} x^2$$

D'où :

$$f'(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-1}{2}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f'(x) &= \frac{-1}{2} \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

question précédente

La fonction f' est donc continue en 0.

Conclusion : la fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. 2.a. Etudier les variations de l'application $u : x \longmapsto (1-x)e^x - 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de telles fonctions.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} u'(x) &= -e^x + (1-x)e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	0	$-$
u	↗	0	↘

Pffff...
Comment peut-il y avoir des erreurs sur cette question ?!

2.b. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$$

✓ Rigueur !
Un peu de rigueur : on fait attention aux cas sur x... L'expression de la question 1.c n'est valable que si $x \neq 0$.

- $f'(0) = \frac{-1}{2} < 0$
- Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{u'(x)}{(e^x - 1)^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

question précédente, avec $x \neq 0$

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$

2.c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ puis dresser le tableau de variations de f.

- En $-\infty$:
  On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$. D'où, par quotient :
  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
- En $+\infty$:
  Pour x suffisamment proche de $+\infty$:
  $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x - 1} \\ &= \frac{x}{e^x}\,\frac{1}{1 - e^{-x}} \end{aligned}$$
  Or, par croissance comparée :
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
  et par opérations :
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 1$$
  Par produit :
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

D'après la question précédente, on en déduit :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

♣ Méthode !
Pour déterminer des limites, on procède dans cet ordre :
• on regarde si on peut conclure par opérations / composition, en détaillant bien chaque partie...
Sinon, c'est une FI et dans ce cas : • est-ce une CC ? On modifie si nécessaire l'expression pour le faire apparaître clairement
• on peut utiliser des équivalents
• si les équivalents ne permettent pas de conclure (des sommes ?) et que la limite est en 0, on teste des DL.

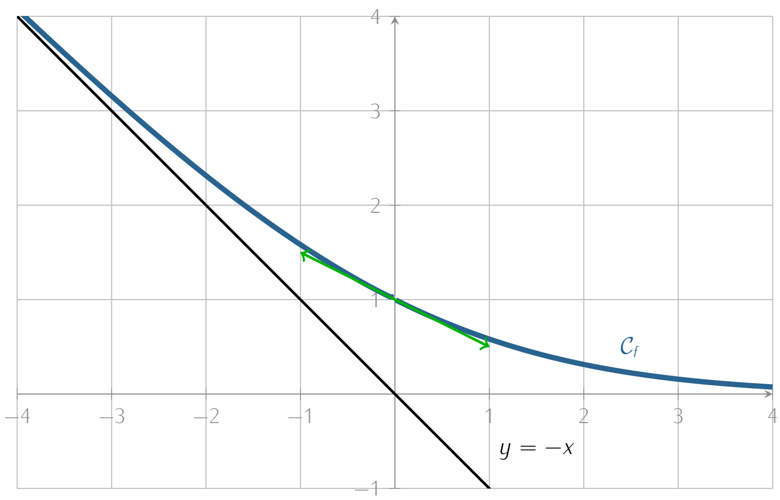
✘ Attention !
Aucune valeur interdite dans ce tableau : f et f' sont toutes deux bien définies en 0...

2.d. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

- Pour x suffisamment proche de $-\infty$:
  $$\begin{aligned} f(x) + x &= \frac{x}{e^x - 1} + x \\ &= \frac{x + xe^x - x}{e^x - 1} \\ &= \frac{xe^x}{e^x - 1} \end{aligned}$$
  Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. D'où, par opérations :
  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$$
- **Interprétation :**
  La courbe de la fonction f est la droite d'équation $y = -x$ sont proches au voisinage de $-\infty$.

> **Conclusion :** la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe de la fonction f au voisinage de $-\infty$.

2.e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère judicieusement choisi.



Important !
On doit faire figurer :
• la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0
• l'asymptote en $-\infty$
• l'asymptote en $+\infty$

Partie II. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** ci-dessous de sorte que son exécution permet l'affichage de la courbe représentative de f sur $[0;1]$ ainsi que des 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représentés sur la courbe de f.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x):
    ...
    ...
    ...
    ...

X = ...
Y = []
for x in X:
    Y.append(f(x))
... #graphique de f

u=1
for k in range(5):
    v = ...
    plt.plot(... , ... , 'r')
    plt.plot([u,v],[v,v], 'r')
    u = ...

plt.show()
```

Voici, avec le graphique obtenu au-dessous.

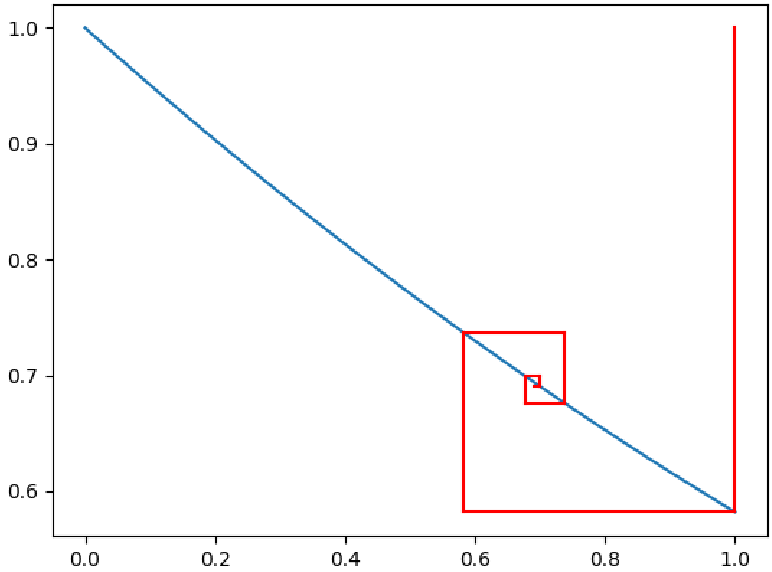
```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x):
    if x==0:
        return 1
    else:
        return x/(np.exp(x)-1)

X=np.linspace(0,1,100)
Y=[]
for x in X:
    Y.append(f(x))
plt.plot(X,Y)

u=1
for k in range(5):
    v=f(u)
    plt.plot([u,u],[u,v], 'r')
    plt.plot([u,v],[v,v], 'r')
    u=v

plt.show()
```



☞ **Rappel...**
Les valeurs des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont lues sur les abscisses des points d'intersection entre la ligne brisée rouge et la courbe de f bleue.

4. Montrer que f possède un unique point fixe, noté α, que l'on calculera.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

✓ **Rigueur !**
Deux expressions différentes pour $f(x)$, donc deux cas à distinguer !

- Si $x = 0$: on sait que $f(0) = 1$, donc 0 n'est pas un point fixe de f.
- Si $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff \frac{x}{e^x - 1} = x & \quad x \neq 0\text{, donc } e^x - 1 \neq 0\\
&\iff x = x(e^x - 1)\\
&\iff 2x - xe^x = 0\\
&\iff x(2 - e^x) = 0\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \ln(2) \end{array}\right. & \quad x \neq 0\\
&\iff x = \ln(2)
\end{aligned}$$

Conclusion : f possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$: $\ln(2)$.

5. 5.a. Établir : $\forall x \in [0; +\infty[,\ e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

Important !
Il faut avoir des idées et donc savoir traiter cette question !

Posons $g : x \longmapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$, définie sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x\\
&= 2e^x(e^x - x - 1)
\end{aligned}$$

Or la fonction exponentielle est convexe, donc sa courbe représentative est partout au-dessus de toutes ses tangentes et en particulier de sa tangente au point d'abscisse 0, dont l'équation réduite est $y = x + 1$.
Par conséquent : $e^x \geqslant x + 1$. On en déduit :

$$g(x) \geqslant 0$$

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. Et comme $g(0) = 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) \geqslant 0$$

Conclusion : $\forall x \in [0; +\infty[,\ e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

5.b. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.
Soit $x \in]0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2}$$

Conclusion : $\forall x \in]0;+\infty[, \ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2}$.

5.c. Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[, \ \frac{-1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

Soit $x \in [0;+\infty[$.

- Si $x = 0$: le résultat est vrai, car $f'(0) = \frac{-1}{2}$.
- Si $x > 0$:
  - ⋆ d'après la question 2.b, on sait déjà que $f'(x) \leqslant 0$
  - ⋆ ensuite, d'après la question précédente : $f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2}$.

    et d'après la question 5.a : $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$. Or $2(e^x-1)^2 > 0$. D'où : $f'(x) + \frac{1}{2} \geqslant 0$.
    Autrement dit :
    $$f'(x) \geqslant \frac{-1}{2}$$

  On a donc :
  $$\frac{-1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$$

Conclusion : $\forall x \in [0;+\infty[, \ \frac{-1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

5.d. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$
puis :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$$

✍ Rédaction
La rédaction de la première partie, avec l'IAF et son application à u_n et α doit être parfaite ! On s'entraîne autant de fois que nécessaire...

- On sait que :
  - ✓ f est dérivable sur $[0;+\infty[$,
  - ✓ d'après la question précédente, $\forall x \in [0;+\infty[, \ \frac{-1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$; donc :
    $$\forall x \in [0;+\infty[, \ \frac{-1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$
    Autrement dit :
    $$\forall x \in [0;+\infty[, \ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

  D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :
  $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+, \ |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|$$
- Ensuite :
  - ⋆ $\alpha \geqslant 0$, car $\alpha = \ln(2)$
  - ⋆ Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
    - ◇ **Initialisation.** Pour $n = 0$:
      $u_0 = 1$, donc l'initialisation est vérifiée.
    - ◇ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n \geqslant 0$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$.
      On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geqslant 0$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathbb{R}^+$.
      D'où $f(u_n) \geqslant 0$; autrement dit $u_{n+1} \geqslant 0$. L'hérédité est ainsi établie.

    On a donc :
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant 0$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le premier point, appliqué avec $a = \alpha$ et $b = u_n$, licite car $\alpha, u_n \geqslant 0$, on a :
  $$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$
  Or α est point fixe de f, donc $f(\alpha) = \alpha$; et $f(u_n) = u_{n+1}$.
  Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

- Démontrons enfin par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.
  - ⋆ **Initialisation.** Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} |u_0 - \alpha| &= |1 - \ln(2)| \\ &= 1 - \ln(2) \\ &= \frac{1}{2^0}\big(1 - \ln(2)\big) \end{aligned}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

  - ⋆ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$.

Par hypothèse de récurrence :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$$

D'où

$$\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$$

Or, d'après le point précédent

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Ainsi, par transitivité

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$$

L'hérédité est ainsi établie.

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha) = 0$

Par théorème d'encadrement, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$.

> **Conclusion :** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

☞ Rappel...
On ne pourrait rien conclure si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 1$, pas même la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$...

7. Écrire un programme **Python** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-9}$.

```
1 import numpy as np
2 def rang():
3     u=1
4     n=0
5     while abs(u-np.log(2))>10**(-9):
6         u=u/(np.exp(u)-1)
7         n=n+1
8     return n
```

Petite remarque
On peut également écrire `u=f(u)` en ligne 7, où `f` est la fonction créée dans la question 3.

Partie III. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$.

8. Justifier que G est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur le segment $[x; 2x]$ (ou $[2x; x]$).

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$ est bien définie.

> **Conclusion :** pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x)$ existe ; autrement dit, la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$.

9. Démontrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives, qui sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons F l'une d'elles. On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_x^{2x} f(t)dt \\ &= F(2x) - F(x) \end{aligned}$$

Or :

- ✓ $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 2x$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) ;
- ✓ F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= \begin{cases} \dfrac{4x}{e^{2x}-1} - \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2-1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{4x - x(e^x+1)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2-1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{3x - xe^x}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2-1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

F est une primitive de f

Méthode ! Il faut bien travailler cette méthode et cette rédaction : on procède toujours ainsi.

Attention ! Attention à la dérivée de la composée ! Si u est $\mathscr{C}^1$ sur I et à valeurs dans J et que f est $\mathscr{C}^1$ sur J, alors $f \circ u$ est $\mathscr{C}^1$ sur I et $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

10. 10.a. Démontrer : $\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant xf(x)$. En déduire la limite de G en $+\infty$.

- Soit $x \in [0;+\infty[$.
  Puisque $x \geqslant 0$, on a $x \leqslant 2x$.
  D'où, par décroissance de f sur $\mathbb{R}$, donc sur $[x;2x]$:
  $$\forall t \in [x;2x],\ f(x) \geqslant f(t)$$
  Et comme f est positive sur $\mathbb{R}$, on a même :
  $$\forall t \in [x;2x],\ f(x) \geqslant f(t) \geqslant 0$$
  Ainsi, par croissance de l'intégrale, licite car $x \leqslant 2x$:
  $$\int_x^{2x} f(x)dt \geqslant \int_x^{2x} f(t)dt \geqslant 0$$
  Autrement dit :
  $$(2x-x)f(x) \geqslant G(x) \geqslant 0$$
  Conclusion : $\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant xf(x)$.
- On a ainsi :
  - ✓ $\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant xf(x)$
  - ✓ et, pour tout $x > 0$:
  $$\begin{aligned} xf(x) &= \frac{x^2}{e^x-1} \\ &= \frac{x^2}{e^x}\frac{1}{1-e^{-x}} \end{aligned}$$
  Donc, par croissances comparées et opérations :
  $$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$$

Important ! C'est ici que sert la positivité de x...

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

10.b. Démontrer : $\forall x \in]-\infty;0],\ G(x) \leqslant xf(x)$. En déduire la limite de G en $-\infty$.

- Soit $x \in]-\infty; 0]$.
  Puisque $x \leqslant 0$, on a $x \geqslant 2x$.
  D'où, par décroissance de f sur $\mathbb{R}$, donc sur $[2x; x]$:
  $$\forall t \in [2x; x],\ \ f(x) \leqslant f(t)$$
  Ainsi, par croissance de l'intégrale, licite car $2x \leqslant x$:
  $$\int_{2x}^{x} f(x)dt \leqslant \int_{2x}^{x} f(t)dt$$
  Et ainsi :
  $$\int_{x}^{2x} f(x)dt \geqslant \int_{x}^{2x} f(t)dt$$
  Autrement dit :
  $$(2x - x)f(x) \geqslant G(x) \geqslant 0$$
  Conclusion : $\forall x \in]-\infty; 0],\ \ G(x) \leqslant xf(x)$.
- On a ainsi :
  ✓ $\forall x \in]-\infty; 0],\ \ G(x) \leqslant xf(x)$
  ✓ et, pour tout $x < 0$:
  $$xf(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$$
  Donc, opérations :
  $$\lim_{x \to -\infty} xf(x) = 0$$

Conclusion : par théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$.

Important ! C'est ici que sert la négativité de x...

11. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G\big(\ln(3)\big)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 3 - e^x \geqslant 0 &\iff e^x \leqslant 3 \\ &\iff x \leqslant \ln(3) \end{aligned}$$

stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$

et :

$$\begin{aligned} e^{2x} - 1 > 0 &\iff e^{2x} > 1 \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$

D'où :

x	$-\infty$		0		$\ln(3)$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$G'(x)$			$+$		0	$-$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$G\big(\ln(3)\big)$	$\searrow$	0

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★