Devoir surveillé 5

Samedi 14 décembre 2024 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- un aide-mémoire **Python** est donné en fin de sujet.
  Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Un athlète ne peut arriver en compétition très motivé s'il n'a jamais été mis à l'épreuve."
Sénèque

Exercice 1

Question de cours. Définition de valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
   - 1.a. Déterminer le rang de A. En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base de l'espace propre associé.
   - 1.b. Justifier que 6 est valeur propre de A et donner une base de l'espace propre associé.
   - 1.c. La matrice A possède-t-elle d'autres valeurs propres ?
   - 1.d. Démontrer que la matrice A est diagonalisable puis donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
2. On considère maintenant trois variables aléatoires X, Y, Z définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1.
   On considère également la matrice aléatoire M définie par :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) & X(\omega) \\ Y(\omega) & Y(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & Z(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$$
   On définit également la variable aléatoire R définie par :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ R(\omega) = \operatorname{rg}\big(M(\omega)\big)$$
   - 2.a. Écrire un programme **Python** permettant de simuler au hasard 100 matrices $M(\omega)$ puis d'en afficher le rang.
   - 2.b. Démontrer que R suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-3}$.
   - 2.c. Calculer, pour tout $\omega \in \Omega$, le produit $M(\omega) \begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \\ Z(\omega) \end{pmatrix}$.
   - 2.d. Démontrer alors que pour tout $\omega \in \Omega$:
   $$X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 0 \iff \operatorname{Sp}\big(M(\omega)\big) = \{0\}$$
   - 2.e. En déduire la probabilité de l'évènement $[\operatorname{Sp}(M) = \{0\}]$.

Exercice 2

Question de cours. Lemme des coalitions.

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y, Z suivent la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, où $n \geqslant 2$.

1. Démontrer : $\forall k \in [\![2; n+1]\!],\ \mathbb{P}\big([X + Y = k]\big) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   Cette relation est-elle encore valable quand $k = 1$?
2. Démontrer alors :
   $$\mathbb{P}\big([X + Y = Z]\big) = \frac{n-1}{n^2}$$
3. Expliquer ce que permet d'obtenir l'exécution de la fonction **mystere**, écrite en langage **Python** ci-dessous.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def mystere(n):
    c=0
    for k in range(10000):
        (X,Y,Z)=rd.randint(1,n+1,3)
        if X+Y==Z:
            c=c+1
    return c/10000
```

4. On pose $T = n + 1 - Z$.
   - 4.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire T.
   - 4.b. Justifier que T est indépendante de X et Y.
   - 4.c. Déduire des questions précédentes la valeur de $\mathbb{P}\big([X + Y + Z = n+1]\big)$.

Exercice 3

Question de cours. Loi binomiale de paramètres n et p : définition, modèle, propriétés.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I. Étude d'une variable aléatoire à densité

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$\forall x \in [0;1],\ \ h(x) = \frac{x}{2-x}$$

   1.a. Montrer que h est une bijection de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et, pour tout $y \in [0;1]$, déterminer $h^{-1}(y)$.

   1.b. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in [0;1],\ \ h(x) = a + \dfrac{b}{2-x}$.

   1.c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $Y = \dfrac{X}{2-X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

   2.a. Rappeler la fonction de répartition de X, notée F_X.

   2.b. Démontrer que pour tout réel x, on a $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{1+x} & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

   2.c. En déduire que la variable aléatoire Y est à densité et en déterminer une densité.

   2.d. Justifier que Y possède une espérance puis déterminer la valeur de $\mathbb{E}(Y)$ en utilisant le résultat de la question 1.c.

Partie II. Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1, \ldots, I_n$.
Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.
Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on modélise l'instant d'arrivée de l'individu I_k par une variable aléatoire T_k suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On suppose que les variables aléatoires $T_1, \ldots, T_n$ sont mutuellement indépendantes.

3. Soit t un réel de $[0;1]$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'évènement $[T_k \leqslant t]$ est réalisé et la valeur 0 sinon.
   On note $S_t = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k$.

   3.a. Que modélise la variable aléatoire S_t ?

   3.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_t.

4. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

   4.a. Soit $t \in [0;1]$. Comparer les évènements $[R_1 > t]$ et $[S_t = 0]$.

   4.b. Montrer que la variable aléatoire R_1 est à densité et en déterminer une densité.

5. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la seconde arrivée.
   Montrer que la variable aléatoire R_2 est à densité et en déterminer une densité.

Exercice 4

Question de cours. Inégalité des accroissements finis.

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Partie I. Étude d'une fonction

1. 1.a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   1.b. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

   1.c. Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

   1.d. En déduire que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. 2.a. Etudier les variations de l'application $u : x \longmapsto (1-x)e^x - 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

2.b. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$$

2.c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ puis dresser le tableau de variations de f.

2.d. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2.e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère judicieusement choisi.

Partie II. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** ci-dessous de sorte que son exécution permet l'affichage de la courbe représentative de f sur $[0;1]$ ainsi que des 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représentés sur la courbe de f.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x):
    ...
    ...
    ...
    ...

X=...
Y=[]
for x in X:
    Y.append(f(x))
... #graphique de f

u=1
for k in range(5):
    v=...
    plt.plot(...,...,'r')
    plt.plot([u,v],[v,v],'r')
    u=...

plt.show()
```

4. Montrer que f possède un unique point fixe, noté α, que l'on calculera.

5. 5.a. Établir : $\forall x \in [0;+\infty[,\ e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

   5.b. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

   5.c. Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[,\ \dfrac{-1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

   5.d. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

   puis :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$$

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

7. Écrire un programme **Python** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-9}$.

Partie III. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$.

8. Justifier que G est définie sur $\mathbb{R}$.

9. Démontrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

10. 10.a. Démontrer : $\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant xf(x)$. En déduire la limite de G en $+\infty$.

    10.b. Démontrer : $\forall x \in]-\infty;0],\ G(x) \leqslant xf(x)$. En déduire la limite de G en $-\infty$.

11. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G\big(\ln(3)\big)$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★