Devoir surveillé 6

Samedi 1er février 2025 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- **la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,**
- **la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,**
- **toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,**
- **les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),**
- **les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.**
- un aide-mémoire `Python` est donné en fin de sujet.
  Pour toutes les questions `Python` du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"En dépit de tout ce qu'on peut vous raconter, les mots et les idées peuvent changer le monde."
John Keating, Le cercle des poètes disparus

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont trop souvent été oubliés...

Exercice 1 (Fait maison)

Question de cours. Matrices semblables : définition et propriétés.

Pour tout réel t, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ -t-1 & -1 & t+1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}$.

Partie I. Réduction des matrices $M(t)$

1. L'ensemble $\{M(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   Cet ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car il ne contient pas la matrice nulle.
2. On pose $A = M(0)$.

2.a. Déterminer une base de $\ker(A)$.

On a :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A) &\iff AX = 0_{n,1} \\ &\iff \begin{cases} -x = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z = z \end{cases} \\ &\iff X = z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est ainsi :

- ✓ génératrice de $\ker(A)$,
- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

♣ Méthode ! Bien évidemment, on peut travailler sur le rang de A, puis obtenir la dimension de $\ker(A)$ et remarquer un vecteur non nul de $\ker(A)$... Mais est-ce plus court ici ?

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(A)$.

2.b. Montrer que -1 est valeur propre de A et déterminer une base de l'espace propre associé, noté $E_{-1}(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = -X &\iff (A + I_3)X = 0_{3,1} \\ &\iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \\ &\iff X = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc -1 est valeur propre de A (car l'équation $AX = -X$ possède au moins une solution non nulle) et :

$$E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est ainsi :

✓ génératrice de $E_{-1}(A)$,

✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(A)$.

Autre méthode...

On peut procéder ainsi :

- On a :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A + I_3) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) && \curvearrowleft C_1 = -C_3 \text{ et } C_2 = 0_{3,1}\\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) && \curvearrowleft \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \neq 0_{3,1}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Par conséquent, -1 est valeur propre de A et, d'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \dim\left(\ker(A + I_3)\right) + \text{rg}(A + I_3)$$

Autrement dit :

$$\dim\left(E_{-1}(A)\right) = 2$$

- Puis, remarquons que $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_{-1}(A)$ qui est :

✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires,

✓ de cardinal 2, égal à $\dim\left(E_{-1}(A)\right)$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(A)$.

♡ Astuce du chef ! ♡

Remarquer l'égalité $C_1 + 0C_2 + C_3 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice $A + I_3$...

En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B, on a :

$B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3$,

donc : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$...

☞ Rappel...

Le rang d'une famille libre est son cardinal.

☞ Rappel...

$E_{-1}(A) = \ker(A + I_3)$...

2.c. En déduire que la matrice A est diagonalisable.

- D'après la question 2.a, 0 est valeur propre de A et $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de l'espace propre associé.

- Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est :

  ✓ libre car c'est la concaténation de familles libres associées à des valeurs propres distinctes,

  ✓ de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

  Par conséquent, cette famille est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

  Conclusion : la matrice A est diagonalisable.

3. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, t est valeur propre de $M(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\text{rg}\left(M(t) - tI_3\right) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}-1 & t & -t\\-t-1 & -1-t & t+1\\-1 & t & -t\end{pmatrix}\right) && \curvearrowleft C_3 = -C_2\\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}-1\\-t-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\-1-t\\t\end{pmatrix}\right)\\
&\neq 3
\end{aligned}$$

> **Petite remarque**
> Sans nécessairement travailler sur le rang, dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $M(t) - tI_3$ n'est pas inversible car $C_3 = -C_2$ suffit (ou $L_3 = L_1$).

Conclusion : pour tout $t \in \mathbb{R}$, t est valeur propre de $M(t)$.

Pour la suite, on considère la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet que cette matrice est inversible.

4. Justifier que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, que l'on notera $\mathscr{B}$.

Puisque la matrice Q est inversible, ses colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$...

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

> **Petite remarque**
> Il s'agit de la base de la question 2.c...

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note f_t l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice $M(t)$. Vérifier que la matrice de f_t dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$, que l'on notera $T(t)$.

En déduire une égalité entre $M(t)$, $T(t)$, Q et Q^{-1}.

- Puisque $M(t)$ est la matrice de f_t dans la base canonique, on a :

$$\begin{aligned} f_t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ -t-1 & -1 & t+1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} f_t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ -t-1 & -1 & t+1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} \\ &= t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} f_t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ -t-1 & -1 & t+1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \\ &= t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_t) = \begin{pmatrix} -1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$.

- Remarquons que Q est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base $\mathscr{B}$...

Conclusion : par formule de changement de base, on a ainsi $\mathrm{Mat}_{bc}(f_t) = Q\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_t)Q^{-1}$, autrement dit

$$M(t) = QT(t)Q^{-1}$$

6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $M(t)$?

On sait que si deux matrices sont semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres. Or :

✓ d'après la question précédente, $M(t)$ et $T(t)$ sont semblables ;
✓ $T(t)$ est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : -1 et t.

Conclusion : les valeurs propres de la matrice $M(t)$ sont -1 et t.

Partie II. Résolution d'un système différentiel

On considère à présent le système différentiel suivant, noté (S) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & (t-1)x(t) & + & ty(t) & - & tz(t) \\ y'(t) & = & -(t+1)x(t) & - & y(t) & + & (t+1)z(t) \\ z'(t) & = & -x(t) & + & ty(t) & & \end{array} \right.$$

d'inconnues x, y, z des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

7. Soient x, y, z des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Z = Q^{-1}X$. Vérifier que

$$\big(X \text{ est solution de } (S)\big) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = T(t)Z(t)$$

Les composantes de X sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et la matrice Q^{-1} est constante, donc les composantes de Z sont également des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Z'(t) = Q^{-1}X'(t)$$

Puis :

$$\begin{aligned} \big(X \text{ est solution de } (S)\big) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = M(t)X(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = QT(t)Q^{-1}X(t) && \text{question } 5 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ QZ'(t) = QT(t)Z(t) && Z = Q^{-1}X \text{ et } X' = QZ' \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = T(t)Z(t) && Q \text{ est inversible} \end{aligned}$$

Conclusion : $\big(X \text{ est solution de } (S)\big) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = T(t)Z(t)$.

8. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $w' + w = \beta t e^{-t}$, où w est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto (at^2 + bt + c)e^{-t}$.

L'équation $w' + w = ce^{-t}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de $w' + w = 0$.**
L'ensemble des solutions de $w' + w = 0$ est $\{t \longmapsto \lambda e^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- **Solution particulière de $w' + w = \beta t e^{-t}$.**
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : t \longmapsto (at^2 + bt + c)e^{-t}$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \big(f \text{ est solution de } w' + w = \beta t e^{-t}\big) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + f(t) = \beta t e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ (2at + b)e^{-t} - (at^2 + bt + c)e^{-t} + (at^2 + bt + c)e^{-t} = \beta t e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ (2at + b)e^{-t} = \beta t e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 2at + b = \beta t && \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t} \neq 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{\beta}{2} \\ b & = & 0 \end{array} \right. && \text{identification des coefficients d'une fonction polynomiale} \end{aligned}$$

Prenons donc $a = \dfrac{\beta}{2}$, $b = 0$ et, par exemple, $c = 0$.
La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\beta}{2} t^2 e^{-t}$ est solution particulière de $w' + w = \beta t e^{-t}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $w' + w = \beta t e^{-t}$ est $\left\{ t \longmapsto \dfrac{\beta}{2} t^2 e^{-t} + \lambda e^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

✘ Attention !
β est fixé et lié au second membre : aucune raison qu'il apparaisse en variable dans l'ensemble des solutions.

9. Soit w une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer :

$$\big(w' - tw = 0\big) \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ w(t) = \lambda e^{\frac{t^2}{2}}\big)$$

Raisonnons par double implication.

Petite remarque
Il s'agit d'un cas particulier de QCI42...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe un réel λ, que l'on considère ensuite, tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ w(t) = \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$.
La fonction w est ainsi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} w'(t) - tw(t) &= \lambda 2te^{\frac{t^2}{2}} - t\lambda e^{\frac{t^2}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $w' - tw = 0$.

Posons $g : t \longmapsto w(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ et montrons que g est constante.
La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme produit de telles fonctions et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= w'(t)e^{-\frac{t^2}{2}} - tw(t)e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= \big(w'(t) - tw(t)\big)e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= 0 && w' - tw = 0 \end{aligned}$$

La fonction g est donc dérivable et de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, qui est un intervalle. Par conséquent, g est constante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ \forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \lambda$$

Et ainsi :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ \forall t \in \mathbb{R},\ w(t) = \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$$

Conclusion : $\big(w' - tw = 0\big) \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ \forall t \in \mathbb{R},\ w(t) = \lambda e^{\frac{t^2}{2}}\big)$.

10. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions du système différentiel (S).
Avec les notations de la question 7, on a :

$$\begin{aligned}
\big(X \text{ est solution de } (S)\big) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = T(t)Z(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} && \text{en notant } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} z_1'(t) = -z_1(t) + tz_2(t) \\ z_2'(t) = -z_2(t) \\ z_3'(t) = tz_3(t) \end{cases} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} z_1'(t) + z_1(t) = tz_2(t) \\ z_2'(t) + z_2(t) = 0 \\ z_3'(t) - tz_3(t) = 0 \end{cases} && \text{question précédente} \\
&\iff \exists (c_2, c_3) \in \mathbb{R}^2\ /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} z_1'(t) + z_1(t) = c_2te^{-t} \\ z_2(t) = c_2e^{-t} \\ z_3(t) = c_3e^{\frac{t^2}{2}} \end{cases} && \text{question 8} \\
&\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3\ /\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} z_1(t) = c_1e^{-t} + \frac{c_2}{2}t^2e^{-t} \\ z_2(t) = c_2e^{-t} \\ z_3(t) = c_3e^{\frac{t^2}{2}} \end{cases} \\
&\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3\ /\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = Q\begin{pmatrix} c_1e^{-t} + \frac{c_2}{2}t^2e^{-t} \\ c_2e^{-t} \\ c_3e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3\ /\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + \frac{c_2}{2}t^2e^{-t} \\ c_2e^{-t} + c_3e^{\frac{t^2}{2}} \\ c_1e^{-t} + \frac{c_2}{2}t^2e^{-t} + c_3e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (S) est $\left\{ t \longmapsto \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + \frac{c_2}{2}t^2e^{-t} \\ c_2e^{-t} + c_3e^{\frac{t^2}{2}} \\ c_1e^{-t} + \frac{c_2}{2}t^2e^{-t} + c_3e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix},\ (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Exercice 2 (EDHEC 2022 E)

Question de cours. Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Que signifie graphiquement le fait que a soit un point d'inflexion pour la courbe représentative de f ? Comment, dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^2$, le déterminer ?

Partie I

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q \, dx$.

1. 1.a. Expliquer rapidement pourquoi cette intégrale est bien définie.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $x \longmapsto x^p(1-x)^q$ est définie et continue sur le segment $[0; 1]$.

Conclusion : pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $I(p, q)$ est bien définie.

1.b. Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'on a :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \ I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Posons : $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1} \\ v : x \longmapsto (1-x)^q \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0; 1]$:

$\left| \begin{array}{l} u'(x) = x^p \\ v'(x) = -q(1-x)^{q-1} \end{array} \right.$.

D'où :

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^q dx \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right]_0^1 - \int_0^1 -q(1-x)^{q-1}\frac{x^{p+1}}{p+1} dx \\ &= \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) \end{aligned}$$

intégration par parties

$p+1 > 0$ et $q > 0$, donc $0^{p+1} = 0$ et $0^q = 0$

Conclusion : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \ I(p, q) = \dfrac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.

1.c. En déduire :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Procédons par récurrence pour établir : $\forall p \in \mathbb{N}, \ \forall q \in \mathbb{N}, \ I(p, q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

- **Initialisation.** Pour $p = 0$:
  Soit $q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I(0, q) &= \int_0^1 (1-x)^q dx \\ &= \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{0!q!}{(0+q+1)!} &= \frac{q!}{(q+1)!} \\ &= \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \ I(0, q) = \frac{1}{q+1}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$.
  Supposons : $\forall q \in \mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Montrons : $\forall q \in \mathbb{N},\ I(p+1,q) = \dfrac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!}$.
  Soit $q \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, licite car $p \in \mathbb{N}$ et $q+1 \in \mathbb{N}^*$, on a :
  $$I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q)$$
  D'où :
  $$\begin{aligned} I(p+1,q) &= \frac{p+1}{q+1} I(p,q+1) \\ &= \frac{p+1}{q+1} \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!} \\ &= \frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!} \end{aligned}$$
  hypothèse de récurrence, licite car $q+1 \in \mathbb{N}$

  L'hérédité est ainsi établie.

Important !
L'HDR doit contenir "$\forall q \in \mathbb{N}$", car nous aurons besoin du résultat pour un autre q que celui qui serait fixé en dehors si nous faisions autrement.

Petite remarque
On utilise la question précédente avec $q+1$ au lieu de q (licite, car $q \in \mathbb{N}$, donc $q+1 \in \mathbb{N}^*$).

Conclusion : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$. En prenant $q = p$ dans la question précédente...

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Partie II

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel quelconque et on pose $\alpha_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$. On considère la fonction b_n définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ b_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^n(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

3. Montrer que b_n est une densité.
   - **Positivité.**
     - ⋆ pour tout $x \in [0;1]$, $\alpha_n \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ et $1-x \geqslant 0$, donc $b_n(x) \geqslant 0$.
     - ⋆ pour tout $x \notin [0;1]$, $b_n(x) = 0 \geqslant 0$.

     Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ b_n(x) \geqslant 0$.
   - **Continuité.**
     - ⋆ b_n est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$ car constante sur ces intervalles ;
     - ⋆ b_n est continue sur $[0;1]$ car c'est une fonction polynomiale sur $[0;1]$ (produit de fonctions polynomiales).

     Conclusion : b_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)$?
     - ⋆ les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} b_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} b_n(x)dx$ sont convergentes et valent 0 ;
     - ⋆ puisque b_n est continue sur $[0;1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 b_n(x)dx$ n'est pas impropre et :
     $$\begin{aligned} \int_0^1 b_n(x)dx &= \int_0^1 \alpha_n x^n(1-x^n)dx \\ &= \alpha_n \int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx \\ &= \alpha_n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= 1 \end{aligned}$$
     question 2

     Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)dx$ est convergente et, par relation de Chasles, vaut 1.

Petite remarque
Pour $n > 0$, b_n est continue en 0 et en 1.

Conclusion : b_n est une densité de probabilité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

4. Reconnaître la loi de X_0.

On a $\alpha_0 = 1$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ b_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Conclusion : X_0 suit la loi uniforme sur $[0;1]$.

Petite remarque

Nul besoin de calculer la fonction de répartition... Reconnaître une densité, c'est reconnaître une loi.

5. 5.a. Utiliser la partie I pour montrer que X_n possède une espérance et que l'on a :

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}$$

➠Réflexe !

Toujours s'interroger sur l'ensemble image d'une VA au moment d'étudier son espérance éventuelle.

Puisque $X_n(\Omega) = [0;1]$, X_n admet une espérance (car $X_n(\Omega)$ est borné) et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \int_0^1 x b_n(x)dx \\
&= \alpha_n \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n dx \\
&= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\,\frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!} && \text{question 1.c avec } p = n+1 \text{ et } q = n, \text{ licite car } n, n+1 \in \mathbb{N} \\
&= \frac{n+1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : X_n admet une espérance et $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}$.

5.b. Toujours en utilisant la partie I, montrer que X_n possède une variance et exprimer $\mathbb{V}(X_n)$ en fonction de n.

Puisque $X_n(\Omega) = [0;1]$, X_n admet un moment à tout ordre (car $X_n(\Omega)$ est borné), et donc une variance, et :

- par théorème de transfert, licite car $x \longmapsto x^2$ est continue sur $X_n(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &= \int_0^1 x^2 b_n(x)dx \\
&= \alpha_n \int_0^1 x^{n+2}(1-x)^n dx \\
&= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\,\frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!} && \text{question 1.c avec } p = n+2 \text{ et } q = n, \text{ licite car } n, n+2 \in \mathbb{N} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+2)} \\
&= \frac{n+2}{2(2n+3)}
\end{aligned}$$

- puis, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \left(\mathbb{E}(X_n)\right)^2 \\
&= \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{2(n+2)-(2n+3)}{4(2n+3)} \\
&= \frac{1}{4(2n+3)}
\end{aligned}$$

Conclusion : X_n admet une variance et $\mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{4(2n+3)}$.

5.c. En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que X_n admet une variance donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (avec $\varepsilon > 0$) :

$$\mathbb{P}\left([|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2}$$

Autrement dit, d'après les deux questions précédentes :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)}$$

➠Réflexe !

Ce résultat ressemble à la conclusion de la LfGN ; mais il y a un problème : la LfGN porte sur la moyenne empirique de VA iid ce qui n'est pas le cas ici ! On revient donc à la démonstration de la LfGN, qui utilise l'inégalité de BT.

- On a ainsi établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)} = 0$.
Donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0.$

Partie III

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel et on se propose d'étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n dt,\ \text{où } \alpha_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}.$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé du plan.

6. Déterminer $f_0(x)$ pour tout réel x.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \alpha_0 \int_0^x 1 dt \\ &= x \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = x.$

7. 7.a. Donner la valeur de $f_n(1)$.
On a :

$$\begin{aligned} f_n(1) &= \alpha_n \int_0^1 t^n(1-t)^n dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

question 3

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(1) = 1.$

7.b. Montrer, grâce au changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale définissant $f_n(x)$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) + f_n(1-x) = 1$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) + f_n(1-x) = \alpha_a \left(\int_0^x t^n(1-t)^n dt + \int_0^{1-x} t^n(1-t)^n dt\right)$$

Effectuons le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^n(1-t)^n dt$:

$$\left|\begin{array}{lcl} u & = & 1-t \\ t & = & 1-u \end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{lcl} du & = & -dt \\ dt & = & -du \end{array}\right. \quad ;$$

$t =$	0	x
$u =$	1	$1-x$

Ce changement de variable est bien licite, car affine.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} f_n(x) + f_n(1-x) &= \alpha_n \left(\int_1^{1-x} (1-u)^n u^n(-du) + \int_0^{1-x} t^n(1-t)^n dt\right) \\ &= \alpha_n \left(\int_{1-x}^{(} 1-u)^n u^n du + \int_0^{1-x} t^n(1-t)^n dt\right) \\ &= \alpha_n \int_0^1 t^n(1-t)^n dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

relation de Chasles

question 3

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) + f_n(1-x) = 1.$

★Subtil...★
Parfois, on précise "car affine non constant" : c'est lorsque l'on effectue un changement de variable affine dans une intégrale impropre dont on cherche la nature...

7.c. En déduire la valeur de $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

En évaluant la relation précédente en $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right)+f_n\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Conclusion : $f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

8. 8.a. Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout réel x, l'expression de $f_n'(x)$ en fonction de x et n.

La fonction $h_n : t \longmapsto t^n(1-t)^n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives qui sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons H_n l'une d'elles.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x)=\alpha_n\big(H_n(x)-H_n(0)\big)$$

Puisque H_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n est également $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \alpha_n H_n'(x)\\ &= \alpha_n h_n(x)\\ &= \alpha_n x^n(1-x)^n \end{aligned}$$

★ Classique ! ★
Les fonctions définies par une intégrale (tout comme les suites d'intégrales) sont des cas d'études très classiques des écrits et des oraux. Il faut parfaitement savoir traiter cette question et celles qui lui ressemblent...

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x)=\alpha_n x^n(1-x)^n$.

On peut faire plus court, mais...

1# On peut aller plus vite sur cette question en procédant ainsi :
"Puisque h_n est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \longmapsto \int_0^x h_n(t)dt$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à h_n."

2# La méthode proposée ici a l'avantage de s'adapter dans d'autres cas, du type $\int_0^{v(x)} h_n$, ou $\int_{u(x)}^{v(x)} h_n$, avec u et v des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$...
En effet, dans ce dernier cas, on procèderait ainsi : "Puisque h_n est continue sur J, elle admet des primitives qui sont $\mathscr{C}^1$ sur J. Notons H_n l'une d'elles.
Par conséquent, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{u(x)}^{v(x)} h_n(t)dt\\ &= H_n\big(v(x)\big)-H_n\big(v(x)\big) \end{aligned}$$

Or :

- ✓ u est $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans J,
- ✓ H_n est$\mathscr{C}^1$ sur J.

Donc, par composition, $H_n \circ u$ est $\mathscr{C}^1$ sur I ; de même, $H_n \circ v$ est $\mathscr{C}^1$ sur I.
Ainsi, f_n est $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= v'(x)H_n'\big(v(x)\big)-u'(x)H_n'\big(u(x)\big)\\ &= v'(x)h_n\big(v(x)\big)-u'(x)h_n\big(u(x)\big) \end{aligned}$$

✘ Attention !
On rédige et on dérive ensuite parfaitement tout ce travail avec les composées !

8.b. Étudier, suivant la parité de n, le signe de $f_n'(x)$ pour tout réel x.
On sait déjà que $\alpha_n > 0$. Puis :

- si n est pair :
  Dans ce cas :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^n		$+$	0	$+$		$+$	
$(1-x)^n$		$+$		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	

- si n est impair :
  Dans ce cas :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^n		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)^n$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

➠Réflexe !
On fait des tableaux de signes plutôt que des phrases avec des disjonctions de cas illisibles...

9. 9.a. En utilisant la formule du binôme de Newton, exprimer $f_n(x)$ en fonction de x, pour tout réel x puis en déduire les valeurs de $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et de $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ selon que n est pair ou impair.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n\,dt && \text{formule du binôme de Newton}\\
&= \alpha_n \int_0^x \left(t^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t)^k \right) dt && \text{linéarité de l'intégrale}\\
&= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^x t^{n+k}\,dt && n+k+1 \neq 0\\
&= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} x^{n+k+1}
\end{aligned}$$

- Remarquons alors que f_n est une combinaison linéaire de fonctions polynomiales : f_n est donc une fonction polynomiale.
  Ainsi :

$$f_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \alpha_n \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

  Distinguons deux cas :
  - ⋆ Si n est pair :
    Dans ce cas :
    $$\alpha_n \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{\alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}$$
    Or :
    - ◇ $\dfrac{\alpha_n}{2n+1} > 0$
    - ◇ puisque $2n+1$ est impair, on a :
    $$\lim_{n\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} x^{2n+1} = +\infty$$

    Conclusion : si n est pair
    $$\lim_{n\to-\infty} f_n(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

  - ⋆ Si n est impair :
    Dans ce cas :
    $$\alpha_n \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{-\alpha_n}{2n+1} x^{2n+1}$$
    Or :
    - ◇ $-\dfrac{\alpha_n}{2n+1} < 0$
    - ◇ puisque $2n+1$ est impair, on a :
    $$\lim_{n\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} x^{2n+1} = +\infty$$

    Conclusion : si n est impair
    $$\lim_{n\to-\infty} f_n(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$$

9.b. Dresser le tableau de variations de f_n (toujours en distinguant les cas n pair et n impair).
On résume les informations obtenues dans les deux questions précédentes...

- si n est pair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

- si n est impair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

10. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

10.a. Pour tout réel x, déterminer $f_n''(x)$ en fonction de x et n.

La fonction f_n est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, on avait :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \alpha_n x^n 1(1-x)^n$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= \alpha_n \left(nx^{n-1}(1-x)^n - nx^n(1-x)^{n-1}\right) \\ &= \alpha_n n x^{n-1}(1-x)^{n-1}\left((1-x)-x\right) \\ &= \alpha_n n(1-2x)x^{n-1}(1-x)^{n-1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n''(x) = \alpha_n n(1-2x)x^{n-1}(1-x)^{n-1}$.

10.b. En déduire que (C_n) possède un point d'inflexion si n est impair et trois si n est pair.

Donnons les tableaux de signes de f_n''...

- Si n est pair :
  Dans ce cas, $n-1$ est impair et :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$1-2x$		+		+	0	−		−	
x^{n-1}		−	0	+		+		+	
$(1-x)^{n-1}$		+		+		+	0	−	
$f_n''(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

- Si n est impair :
  Dans ce cas, $n-1$ est pair et :

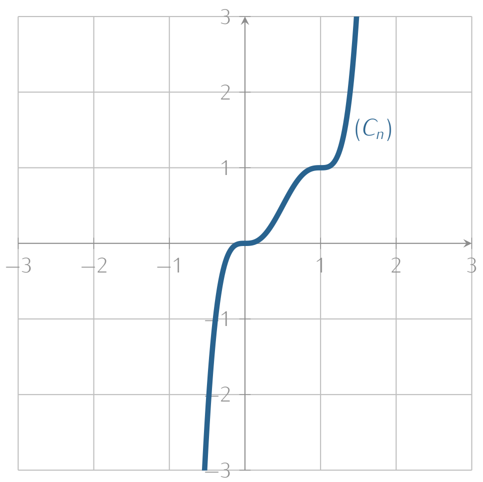
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$1-2x$		+		+	0	−		−	
x^{n-1}		+	0	+		+		+	
$(1-x)^{n-1}$		+		+		+	0	+	
$f_n''(x)$		+	0	+	0	−	0	−	

☞ **Rappel...**
Dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, f admet un point d'inflexion en a ssi f'' s'annule et change de signe en a.

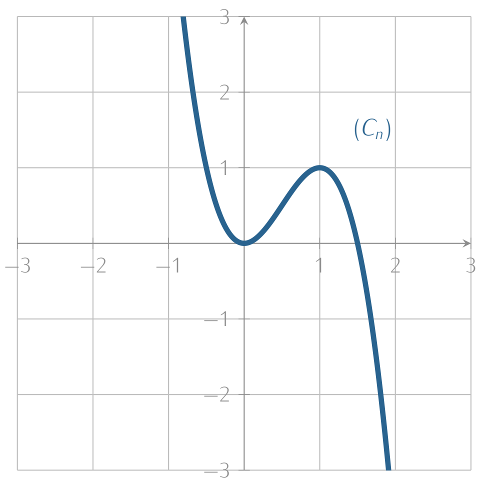
Conclusion :
Si n est pair, alors (C_n) possède trois points d'inflexion en $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (car $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$) et $(1,1)$ (car $f_n(1) = 1$) ;
si n est impair, alors (C_n) possède un unique point d'inflexion en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

10.c. Tracer, selon la parité de n, l'allure de (C_n).

n pair :



n impair :



Exercice 3 (EML 2017 E)

Question de cours. Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

- B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage",
- R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage".

Partie I. Rangs d'apparition de la première boule bleue et de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie une réalisation de Y.

```python
def simule_Y():
    b = ...
    r = ...
    Y=1
    while ...
        ...
        Y+=1
    return Y
```

Voici :

```python
def simule_Y():
    b=1
    r=2
    Y=1
    while rd.random()<r/(b+r):
        r+=1
        Y+=1
    return Y
```

✘ Attention !
La composition de l'urne change ! Si on note r et b les nombres de boules rouges et bleues respectivement, alors la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\dfrac{r}{b+r}$... et r est incrémenté de 1 à chaque tirage d'une boule rouge.

2. On suppose créée et complétée la fonction précédente et on exécute le script suivant :

```python
c=0
for k in range(10000):
    if simule_Y()==1:
        c+=1
print(c/10000)
```

On obtient : `0.3343`. Interpréter ce résultat.

- Le programme simule 10000 réalisations indépendantes de la variable aléatoire Y ;
- la variable c compte le nombre de fois où, sur ces 10000 réalisations, Y a pris la valeur 1 ;
- le programme affiche $\dfrac{c}{10000}$: la fréquence d'apparition de l'évènement $[Y = 1]$ sur ces 10000 réalisations.

Formellement, considérons $(W_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de succès $[Y = 1]$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{W_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} W_k$.

Ainsi, la suite $(W_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires :

✓ indépendantes,
✓ ayant la même espérance m et la même variance.

Par conséquent, d'après la loi faible des grands nombres : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|\overline{W_n} - m| \geqslant \varepsilon]\big) = 0$.

Mais $m = \mathbb{P}\big([Y = 1]\big)$ et $\overline{W_n}$ s'interprète comme la fréquence d'apparition de l'évènement $[Y = 1]$.
Ainsi, pour n suffisamment grand, toute réalisation de $\overline{W_n}$ fournit une valeur approchée de $\mathbb{P}\big([Y = 1]\big)$.

Important !
Une moyenne empirique de VA suivant la même loi de Bernoulli représente la fréquence d'apparition du succès associé à l'expérience de Bernoulli.

Conclusion : la valeur affichée par le programme est une valeur approchée de $\mathbb{P}\big([Y = 1]\big)$.
Autrement dit, $\mathbb{P}\big([Y = 1]\big) \simeq 0,3343$.

Petite remarque
Un tel niveau de détail n'est sans doute pas attendu. On peut probablement se contenter d'expliquer rapidement le programme puis de donner le résultat en mentionnant rapidement que c'est la conséquence de la LfGN.

3. 3.a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$. Justifier ensuite que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - Si $n = 1$:
    Immédiatement :
    $$[Y=1] = B_1$$
    Et donc :
    $$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}(B_1) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$
    équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne

    Petite remarque
    Il n'est pas nécessaire de distinguer le cas $n = 1$ si on écrit $[Y=n] = \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} R_k\right) \cap B_n$, car on a la convention $\bigcap\limits_{\varnothing} R_k = \Omega$.

  - Si $n \geqslant 2$:

    $[Y=n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient la première boule boule au tirage n
    si, et seulement si, on obtient des boules rouges aux tirages 1 à $n-1$ puis une bleue au tirage n

    D'où :
    $$[Y=n] = R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n$$
    Et donc :
    $$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=n]) &= \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) \\ &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-2}}(R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-1}}(B_n)\end{aligned}$$
    formule des probabilités composées, licite car $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}) \neq 0$

    Petite remarque
    On ne justifie pas vraiment que cette probabilité est non nulle… Mais c'est bien le cas, car elle est le produit de probabilités non nulles (voir calcul ci-dessous).

    Or :
    - Soit $k \in [\![2; n-1]\!]$. Calculons $\mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{k-1}}(R_k)$.
      Supposons l'évènement $R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1}$ réalisé. Autrement dit, les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule rouge. Par conséquent, $k-1$ boules rouges ont été ajoutées à l'urne.
      Dans ce cas, au moment du k-ième tirage, l'urne est composée d'une unique boule bleue et de $2+k-1 = k+1$ boules rouges. L'évènement R_k est ainsi réalisé si, et seulement si, on pioche l'une des $k+1$ boules rouges sur les $k+2$ boules au total. D'où, par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne :
      $$\mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{k+1}{k+2}$$

      Important !
      Il est important de savoir détailler ce calcul et de le faire.

    - De la même façon :
      $$\mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{n+2}$$

    On en déduit :
    $$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=n]) &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$
    télescopage

    ★Subtil…★
    Il n'est pas nécessaire de distinguer les deux cas si on écrit $[Y=n] = \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} R_k\right) \cap B_n$, avec la convention $\bigcap\limits_{\varnothing} R_k = \Omega$.

  Les deux cas se regroupent…

  Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

- Par double inclusion…

  $(\subset)$ Puisque Y prend comme valeur le rang de la première boule bleue, on a déjà :
  $$Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$$

  $(\supset)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $[Y=n] \neq \varnothing$.
  D'après ce qui précède :
  $$\mathbb{P}([Y=n]) \neq 0$$
  Donc
  $$[Y=n] \neq \varnothing$$
  Et ainsi $n \in Y(\Omega)$. Donc :
  $$\mathbb{N}^* \subset Y(\Omega)$$

  ☞ Rappel…
  $\mathbb{P}(A) \neq 0 \implies A \neq \varnothing$, mais la réciproque est fausse !

  Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

3.b. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

- Espérance.
  - On sait que :

Y admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \in Y(\Omega)} n\mathbb{P}([Y = n])$ est absolument convergente

si, et seulement si, la série $\sum_{n \geqslant 1} n\mathbb{P}([Y = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

si, et seulement si, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$ est convergente

- ⋆ Or :
  - ✓ $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$
  - ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0$, $\frac{2}{n} \geqslant 0$
  - ✓ la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente, donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{2}{n}$ également.

  Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$ est divergente.

> **Conclusion :** la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.

- **Variance.**

> **Conclusion :** la variable aléatoire Y n'admet donc pas de variance.

4. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? une variance ?

- **Loi de Z.**
  Comme pour Y, on a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - ⋆ Si $n = 1$:
    On a
    $$[Z = 1] = R_1$$
    D'où :
    $$\mathbb{P}([Z = 1]) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3}$$
    équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne
  - ⋆ Si $n \geqslant 2$:
    De même que précédemment :
    $$[Z = n] = B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n$$
    D'où :
    $$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z = n]) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \ldots \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{4}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$
    formule des probabilités composées
    raisonnement analogue à celui de la question 3.a
    télescopage (décalage de 2)

Petite remarque
Puisque le résultat n'est pas donné et que le raisonnement est analogue à celui mis en place en question 3.a, on peut se contenter de ce qui est écrit sans détailler davantage pour avoir l'ensemble des points.

Ls deux cas se regroupent...

> **Conclusion :** $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = n]) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$.

- **Espérance.**
  - ⋆ On sait que :

    Z admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \in Z(\Omega)} n\mathbb{P}([Z = n])$ est absolument convergente

    si, et seulement si, la série $\sum_{n \geqslant 1} n\mathbb{P}([Z = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

    si, et seulement si, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{4}{(n+1)(n+2)}$ est convergente

- Or :
  - ✓ $\dfrac{4}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^2}$
  - ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{4}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0,\ \dfrac{4}{n^2} \geqslant 0$
  - ✓ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car d'exposant 2 et $2>1$), donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{4}{n^2}$ est également convergente.

  Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{4}{(n+1)(n+2)}$ est convergente.

> **Conclusion :** la variable aléatoire Z admet une espérance.

- **Variance.**
  - Par théorème de transfert :

$$\begin{array}{lll} Z \text{ admet un moment d'ordre 2} & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{n\in Z(\Omega)} n^2\mathbb{P}\left([Z=n]\right) \text{ est absolument convergente} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} n^2\mathbb{P}\left([Z=n]\right) \text{ est convergente, car il s'agit d'une} \\ & & \text{série à terme général positif} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{4n}{(n+1)(n+2)} \text{ est convergente} \end{array}$$

  - Or, d'après la question 3.a, cette série est divergente.

> **Conclusion :** la variable aléatoire Z n'admet pas de moment d'ordre 2, et donc pas variance.

Partie II. Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire S_n compte le nombre de boules rouges obtenues sur les n premiers tirages ; et c'est également ce que fait la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$...

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k.$

Important !
Il faut impérativement fournir le bon résultat à cette question ; et éviter toutes les horreurs de confusions d'objets ! **Si on demande une relation entre des VA, il ne faut en aucun cas écrire d'évènements !**

✘ Attention !
S_n est une somme de VA suivant des lois de Bernoulli, mais qui ne sont pas indépendantes...

6. Écrire une fonction **Python** de sorte que l'exécution de **simule_S(n)** simule l'expérience étudiée et renvoie une réalisation de S_n.

```python
def simule_S(n):
    b=1
    r=2
    S=0
    for k in range(n):
        if rd.random()<r/(b+r):
            S+=1
            r+=1
        else:
            b+=1
    return S
```

7. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
   Par définition, X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(R_1)$.

> **Conclusion :** $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ et donc $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{2}{9}$.

8. 8.a. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

- $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0; 1\}$.
- Puis, remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[X_k = 0] = B_k$ et $[X_k = 1] = R_k$. Ainsi :
  - ⋆
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)\\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) && \mathbb{P}(B_1) \neq 0\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} && \text{raisonnement analogue à la question 3.a}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$
  - ⋆
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big) &= \mathbb{P}(R_1 \cap B_2)\\ &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2) && \mathbb{P}(R_1) \neq 0\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} && \text{raisonnement analogue à la question 3.a}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$
  - ⋆
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) &= \mathbb{P}(B_1 \cap R_2)\\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(R_2) && \mathbb{P}(B_1) \neq 0\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} && \text{raisonnement analogue à la question 3.a}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$
  - ⋆
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2)\\ &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) && \mathbb{P}(R_1) \neq 0\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} && \text{raisonnement analogue à la question 3.a}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion :

X_1 \ X_2	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Petite remarque
Détailler un calculer et donner les résultats des autres suffit très certainement pour obtenir l'intégralité des points.

8.b. En déduire la loi de X_2.

Par définition, X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big)$. Or, d'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_1 = 0], [X_1 = 1]\big)$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_2 = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)\\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} && \text{question précédente}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Conclusion : $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Petite remarque
X_1 et X_2 ont donc la même loi...

8.c. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Remarquons que :

$$\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) = \frac{1}{6} \quad ; \quad \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) \times \mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]\big) \neq \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) \times \mathbb{P}\big([X_2 = 0]\big)$$

Conclusion : les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

9.a. Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

Remarquons que :

$$R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n = [Y = k+1] \cap B_{k+2} \cap \ldots \cap B_n$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) &= \mathbb{P}\big([Y = k+1] \cap B_{k+2} \cap \ldots \cap B_n\big) \\ &= \frac{2}{(k+2)(k+3)} \times \frac{2}{k+4} \times \ldots \times \frac{n-k}{n+2} \\ &= 2\frac{(n-k)!(k+1)!}{(n+2)!}\end{aligned}$$

d'après la question 3.a et en procédant comme précédemment

En effet :

> en supposant l'évènement $[Y = k+1] \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{n-1}$ réalisé, l'urne est composée de $3 + n - 1$ balles dont $2 + k$ sont rouges et donc $n - k$ sont bleues ; d'où, par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne :
> $$\mathbb{P}_{[Y=k+1]\cap B_{k+2}\cap\ldots\cap B_{n-1}}(B_n) = \frac{n-k}{n+2}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) = 2\dfrac{(n-k)!(k+1)!}{(n+2)!}$.

Petite remarque
L'écriture est un peu problématique si $n = 1$ ou si $k = 0$ ou $k = n$, mais on comprend bien l'idée...

Petite remarque
On se permet d'aller plus vite puisque le résultat n'est pas donné et que le raisonnement est analogue à ceux des questions 3.a et 4.

9.b. Justifier : $\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \dbinom{n}{k}\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

En déduire : $\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

➠Réflexe !
L'enchaînement de la question précédente et de celle-ci nous pousse sur la méthode...

- L'évènement $[S_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient k boules rouges parmi les n boules tirées au total.
  Cet évènement est ainsi constitué d'issues :
  ✓ qui sont au nombre de $\dbinom{n}{k}$: le nombre de "placements" des k boules rouges tirées ;
  ✓ toutes de même probabilité ! En effet :
  > en reprenant la méthode du calcul de la question précédente, calculer la probabilité d'obtenir une issue constituée de k boules rouges et $n - k$ boules bleues reviendrait à :
  > ✓ multiplier les mêmes dénominateurs, dans le même ordre (puisqu'une boule est ajoutée après chaque tirage),
  > ✓ multiplier les mêmes numérateurs mais dans des ordres différents...

  Par conséquent, l'évènement $[S_n = k]$ est constitué de $\dbinom{n}{k}$ issues qui sont toutes de probabilité égale à $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

Petites remarques
• Question difficile, qu'on tente de justifier au mieux sans trop s'y attarder pour autant...
• Raisonnement similaire à ce qui est fait dans QCI18 (démonstration 2). L'énoncé aurait également pu faire le choix de guider sur une méthode proche de la démonstration 1 de cette même QCI18... A chercher !

Conclusion : $\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \dbinom{n}{k}\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) &= \binom{n}{k} 2\frac{(n-k)!(k+1)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} 2\frac{(n-k)!(k+1)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

10. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivent des lois de Bernoulli, on a $S_n(\Omega) \subset [\![0; n]\!]$ (donc $S_n(\Omega)$ est fini). Par conséquent, S_n admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k(k+1)}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Petites remarques
• On a même $S_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ puisque, d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) \neq 0$...
• On peut aussi dire que S_n est la somme de VA admettant une espérance, donc elle admet une espérance.

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} (k^2+k) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(2n+1)}{3(n+2)} + \frac{n}{n+2} \\
&= \frac{n(2n+1)+3n}{3(n+2)} \\
&= \frac{n(2n+4)}{3(n+2)} \\
&= \frac{2n}{3}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

★ Classique ! ★
La question 11.a et l'enchaînement avec 11.b sont très classiques : à traiter et à savoir traiter correctement.

♣ Méthode !
Dans ce type de questions, il n'est pas rare de procéder ainsi (sur des VA discrètes, avec une expérience en fond) : on pense à décrire ce que signifie l'hypothèse "$[S_n = k]$ réalisé" en précisant la composition de l'urne au moment de réaliser l'évènement $[X_{n+1} = 1]$...

11.a. Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([X_{n+1} = 1]\big) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

Soit $k \in [\![0; n]\!]$.Supposons l'évènement $[S_n = k]$ réalisé. Autrement dit, sur les n premiers tirages, on a obtenu k boules rouges. Par conséquent, k boules rouges ont été ajoutées et donc, au moment du $(n+1)$-ième tirage, l'urne est constituée de $n+3$ boules dont $k+2$ sont rouges.
Dans ce cas, l'évènement $[X_{n+1} = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient une des $k+2$ boules rouges parmi les $n+3$ boules présentes. Par équiprobabilité du choix des boules dans l'urne :

$$\mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([X_{n+1} = 1]\big) = \frac{k+2}{n+3}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([X_{n+1} = 1]\big) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

11.b. En déduire : $\mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1]\big) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)+2}{n+3}$.

D'après la formule des probabilités totales avec $\big([S_n = k]\big)_{k \in [\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1]\big) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([S_n = k] \cap [X_{n+1} = 1]\big) && \forall k \in [\![0; n]\!],\ \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) \neq 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) \mathbb{P}_{[S_n=k]}\big([X_{n+1} = 1]\big) && \text{question 11.a} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{n+3} \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) \\
&= \frac{1}{n+3} \left(\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) + 2 \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) \right) && S_n(\Omega) \subset [\![0; n]\!] \\
&= \frac{1}{n+3} \big(\mathbb{E}(S_n) + 2\big)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1]\big) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)+2}{n+3}$.

11.c. Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

- On sait déjà que X_{n+1} suit une loi de Bernoulli. Puis, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1]\big) &= \frac{\mathbb{E}(S_n)+2}{n+3} && \text{question 10} \\
&= \frac{\frac{2n}{3}+2}{n+3} \\
&= \frac{2n+6}{3(n+3)} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Conclusion : $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

- On a donc établi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

  Autrement dit : $\forall n \geqslant 2,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

  Mais on sait déjà que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Petite remarque
On retrouve alors immédiatement la valeur de $\mathbb{E}(S_n)$...
Attention : S_n ne suit pas une loi binomiale pour autant (les X_k ne sont pas indépendantes) !

Partie III. Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{S_n}{n}$.

12. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un entier naturel non nul n et renvoyant un histogramme de fréquences, en $n+1$ classes, sur 100000 réalisations de la variable aléatoire T_n.

```python
def histogramme_T(n):
    L=[simule_S(n)/n for k in range(100000)]
    plt.hist(L,n+1,density=True,edgecolor='k')
    plt.show()
```

13. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x < 0,\ \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 0$, et : $\forall x > 1,\ \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $S_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$, on a :

$$T_n(\Omega) = \left\{0; \frac{1}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}; 1\right\} \subset [0;1]$$

Par conséquent :

- pour tout $x < 0$, $[T_n \leqslant x] = \varnothing$ et donc :
$$\mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 0$$
- pour tout $x > 1$, $[T_n \leqslant x] = \Omega$ et donc :
$$\mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 1$$

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x < 0,\ \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 0$, et : $\forall x > 1,\ \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 1$.

14. Soit $x \in [0,1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n}{n} \leqslant x\right]\right) && n > 0 \\
&= \mathbb{P}\big([S_n \leqslant nx]\big) && S_n \text{ est à valeurs entières positives} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} [S_n = k]\right) && \text{incompatibilité des évènements de la famille } \big([S_n = k]\big)_{k \in [\![0;n]\!]} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) && \text{question 9.b, licite car } x \in [0;1], \text{ donc } nx \in [0;n], \text{ donc } \lfloor nx \rfloor \in [\![0;n]\!] \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} && i = k+1 \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=1}^{\lfloor nx \rfloor + 1} i \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$.

15. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

> **♣ Indication...**
> L'énoncé nous aide : il mentionne la convergence en loi vers une VA à densité ; et on sait que l'on doit prouver $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = F(x)$ pour tout x en lequel F (fonction de répartition de la loi limite) est continue. Ce qui est le cas partout puisqu'il s'agit de la fonction de répartition d'une VA à densité.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x < 0$:
    Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 0$, et donc :
    $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 0$$
  - ⋆ Si $x > 1$:
    Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 1$, et donc :
    $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = 1$$
  - ⋆ Si $x \in [0;1]$:
    Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$.
    Or :
    - ◇ par définition de la partie entière :
      $$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$
      D'où :
      $$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$
      Et ainsi :
      $$\frac{nx}{n+1} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n+1} \leqslant \frac{nx+1}{n+1}$$
    - ◇ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{n+1} = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx+1}{n+1} = x$.

    Donc, par théorème d'encadrement :
    $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n+1} = x$$
    De même, on obtient :
    $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor + 2}{n+2} = x$$
    Par conséquent :
    $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = x^2$$

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) = F(x)$, où $F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

- Montrons que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
  - ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
  - ✓ F est continue sur $\mathbb{R}$ (immédiat en 0 et en 1) ;
  - ✓ F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 ;
  - ✓ F est croissante sur $\mathbb{R}$ car croissante sur $]-\infty;0[$, sur $[0;1]$ et sur $[1;+\infty[$ et continue en 0 et en 1.

> **★Subtil...★**
> Si f est croissante sur $[a;b[$ et sur $[b;c]$, alors f n'est pas nécessairement croissante sur $[a;c]$... En revanche, si elle est continue en b, alors oui.

> **Conclusion :** F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont une densité est (après dérivation sur les intervalles ouverts et choix de valeurs en 0 et en 1)
> $$f : x \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

> **Conclusion :** la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité admettant comme fonction de répartition la fonction F et comme densité la fonction f.

★★★★★★★ FIN ★★★★★★★

Aide-mémoire Python

Listes

- `[]` : Créer une liste vide
- `L[i:j]` : Désigne la liste composée des éléments de `L` dont les indices vont de `i` à `j-1`
- `L[i:j:pas]` : Désigne la liste composée des éléments de `L` d'indices `i, i+pas, i+2*pas,...` compris entre `i` et `j-1`
- `[a]*n` ou `n*[a]` : Créer une liste avec `n` fois l'élément `a`
- `L.append(a)` : Ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `L`
- `L1 + L2` : Concatène les deux listes `L1` et `L2`
- `len(L)` : Renvoie le nombre d'éléments de la liste `L`
- `del(L[k])` : Supprime l'élément d'indice `k` de la liste `L`
- `L.count(a)` : Renvoie le nombre d'occurrences de `a` dans la liste `L`
- `L.remove(a)` : Enlève la première occurrence de la valeur `a` de la liste `L`
- `max(L)` : Renvoie le plus grand élément de la liste `L`
- `min(L)` : Renvoie le plus petit élément de la liste `L`
- `sum(L)` : Renvoie la somme de tous les éléments de la liste `L`
- `a in L` : Vaut `True` si `a` se trouve au moins une fois dans `L` et `False` sinon

Modules mathématiques

numpy

`import numpy as np`

- `np.array(L)` : Transforme la liste `L` en vecteur ou matrice numpy
- `np.linspace(a,b,n)` : Crée un vecteur de n valeurs uniformément réparties entre a et b (inclus)
- `np.zeros([n,m])` : Crée la matrice nulle de taille $n \times m$
- `np.zeros(n)` : Crée le vecteur nul de taille n
- `np.ones([n,m])` : Crée la matrice de taille $n \times m$ dont tous les coefficients valent 1
- `np.ones(n)` : Crée le vecteur de taille n dont tous les coefficients valent 1
- `np.eye(n)` : Crée la matrice identité de taille n
- `np.diag(L)` : Crée la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les éléments de la liste `L`
- `np.transpose(M)` : Renvoie la transposée de M
- `np.dot(M,P)` : Renvoie le produit matriciel MP
- `np.sum(M)` : Renvoie la somme de tous les éléments de M
- `np.prod(M)` : Renvoie le produit de tous les éléments de M
- `np.max(M)` : Renvoie le plus grand élément de M
- `np.min(M)` : Renvoie le plus petit élément de M
- `np.shape(M)` : Renvoie dans un couple le format de la matrice M
- `np.mean(M)` : Renvoie la moyenne des éléments de M
- `np.var(M)` : Renvoie la variance des éléments de M
- `np.std(M)` : Renvoie l'écart-type des éléments de M
- `np.median(M)` : Renvoie la médiane des éléments de M
- `np.cumsum(M)` : Renvoie la matrice des sommes cumulées (gauche à droite, haut à bas) des éléments de M
- `np.arange(a,b,eps)` : Renvoie la liste des flottants de a à b de pas constant eps
- `np.abs(x)` : Renvoie $|x|$
- `np.floor(x)` : Renvoie $\lfloor x \rfloor$
- `np.sqrt(x)` : Renvoie $\sqrt{x}$ si $x \geqslant 0$
- `np.log(x)` : Renvoie $\ln(x)$ si $x > 0$
- `np.exp(x)` : Renvoie e^x
- `np.e` : Renvoie e
- `np.pi` : Renvoie π

Sous module d'algèbre linéaire `linalg` de numpy

`import numpy.linalg as al`

- `al.inv(M)` : Renvoie l'inverse de la matrice carrée M si elle est inversible
- `al.eig(M)` : Si la matrice M est diagonalisable, renvoie un couple (D, P) où D est le vecteur des coefficients diagonaux d'une matrice diagonale semblable à M et P une matrice de passage associée
- `al.matrix_power(M,n)` : Renvoie la puissance `n`-ième de la matrice carrée M
- `al.matrix_rank(M)` : Renvoie le rang de la matrice M
- `al.solve(M,Y)` : Renvoie une solution de l'équation matricielle $MX = Y$ lorsque M est inversible

Sous module **random** de numpy pour la simulation probabiliste

import numpy.random as rd

- **rd.random([r,s])** : Simule une réalisation d'une matrice (**r**, **s**) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme $\mathscr{U}\left([0;1]\right)$.
- **rd.randint(a,b,[r,s])** : Simule une réalisation d'une matrice (**r**, **s**) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme discrète $\mathscr{U}\left(\llbracket a; b-1 \rrbracket\right)$.
- **rd.binomial(n,p,[r,s])** : Simule une réalisation d'une matrice (**r**, **s**) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$
- **rd.geometric(p,[r,s])** : Simule une réalisation d'une matrice (**r**, **s**) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$
- **rd.poisson(a,[r,s])** : Simule une réalisation d'une matrice (**r**, **s**) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson $\mathscr{P}(a)$
- **rd.exponential(a,[r,s])** : Simule une réalisation d'une matrice (**r**, **s**) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle $\mathscr{E}\left(\frac{1}{a}\right)$
- **rd.normal(m,d,[r,s])** : Simule une réalisation d'une matrice (**r**, **s**) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale $\mathscr{N}(m, d^2)$.

Si le paramètre `[r,s]` est remplacé par `r`, ces fonctions renvoient la réalisation d'un vecteur de longueur `r` correspondant à la loi en question, et si ce paramètre est omis, elles renvoient un seul coefficient suivant les mêmes contraintes.

Sous module graphique **pyplot** de **matplotlib**

import matplotlib.pyplot as plt

- **plt.plot(X,Y,options)** : Crée la courbe des points définis par les listes `X`, abscisses, et `Y`, ordonnées suivant les options graphiques définies par la chaîne de caractères **options**
- **plt.bar(X,Y)** : Crée le diagramme en bâtons défini par les listes ou vecteurs `X`, abscisses et `Y`, ordonnées
- **plt.hist(X,Y,density=True)** : Crée l'histogramme de fréquences des valeurs définies par la liste `X`, `Y` étant soit le nombre de classes, soit les bornes des classes
- **plt.boxplot(X)** : Génère le diagramme en boîte basé sur le vecteur de données `X`
- **plt.axis('equal')** : Rend le repère orthonormé
- **plt.xlim(xmin,xmax)** : Fixe les bornes de l'axe des abscisses
- **plt.ylim(ymin,ymax)** : Fixe les bornes de l'axe des ordonnées
- **plt.show()** : Affiche le graphique