

CONSIGNES À LIRE !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,
- la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.
- un aide-mémoire **Python** est donné en fin de sujet.
Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Tous les enfants ont du génie, le tout c'est de le faire apparaître."
Charlie Chaplin

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...

Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✗ Attention !

Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de b-a-rème ! Ils sont simplement ceux qui ont trop souvent été oubliés...

EXERCICE 1 (INSPIRÉ DE HEC 2011 E)

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(1) $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0;$

(2) $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$

Vocabulaire

Une telle matrice est dite **stochastique**.

1. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Remarquons que la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'appartient pas à $\mathcal{S}_n$, car la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice nulle ne vaut pas 1.

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{S}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n$. Justifier que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on a $a_{i,j} \in [0; 1]$.

• On sait déjà, puisque A vérifie (1), que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0$.

• Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Puisque $A \in \mathcal{S}_n$, la somme $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$ est une somme de termes positifs dont le résultat est 1.

Par conséquent, chaque terme de cette somme est inférieur ou égal à 1.

D'où :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,j} \leq 1$$

Et ceci pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$...

Conclusion : pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on a $a_{i,j} \in [0; 1]$.

Petite remarque

On pourrait raisonner par l'absurde sinon, en supposant l'existence d'un couple (i_0, j_0) tel que $a_{i_0, j_0} > 1$. Dans ce cas, puisque les coefficients de A sont positifs, on aurait $\sum_{j=1}^n a_{i_0, j} \geq a_{i_0, j_0} > 1$: absurde !

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que A vérifie la propriété (2) si, et seulement si, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Notons $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Puisque $V \neq 0_{n,1}$, on a :

$$(V \text{ est vecteur propre de } A \text{ pour la valeur propre } 1) \iff AV = V$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

$$\iff (A \text{ vérifie la propriété (2)})$$

Conclusion : A vérifie la propriété (2) si, et seulement si, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Petite remarque

Il est bien entendu possible de raisonner par double implication, mais ce n'est pas nécessaire ici...

4. Démontrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n$ est une matrice de $\mathcal{S}_n$.

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n$. Notons $C = AB$.

• Avec les notations usuelles, on a par définition du produit matriciel, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \geq 0$$

↪ tous les coefficients de A et B sont positifs

La matrice C vérifie donc la propriété (1).

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
 CV &= ABV \\
 &= A(BV) \\
 &= AV \\
 &= V
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} B \in \mathcal{S}_n, \text{ donc } BV = V \text{ d'après la question précédente} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} A \in \mathcal{S}_n, \text{ donc } AV = V \text{ d'après la question précédente}
 \end{array}$$

Ainsi, d'après la question précédente, la matrice C vérifie la propriété (2).

Par conséquent : $C \in \mathcal{S}_n$.

Conclusion : le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n$ est une matrice de $\mathcal{S}_n$.

♣ **Méthode !**

Bien évidemment, pour démontrer que C vérifie la propriété (2), on peut procéder comme dans QCI14.

5. Soit $A \in \mathcal{S}_n$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

On note k l'entier de $\llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $|x_k| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

5.a. Justifier que $|x_k| > 0$.

- On a déjà $|x_k| \geq 0$.
- Raisonnons par l'absurde et supposons que $|x_k| = 0$.
Puisque $|x_k| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$, on aurait alors :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |x_i| = 0$$

Ce qui donnerait $X = 0_{n,1}$: absurde car X est un vecteur propre de A .

Conclusion : $|x_k| > 0$.

5.b. Établir :

$$|\lambda x_k| \leq \sum_{j=1}^n a_{k,j} |x_j|$$

En déduire :

$$|\lambda| \leq 1$$

- On a déjà :

$$AX = \lambda X$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

D'où, en ne gardant que la k -ième ligne de cette égalité :

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = \lambda x_k$$

Par conséquent :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \right| = |\lambda x_k|$$

Mais, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{k,j}| \times |x_j|$$

Or, tous les coefficients de A sont positifs... D'où :

$$\sum_{j=1}^n |a_{k,j}| \times |x_j| = \sum_{j=1}^n a_{k,j} \times |x_j|$$

Conclusion : $|\lambda x_k| \leq \sum_{j=1}^n a_{k,j} |x_j|$.

- Ensuite, puisque $|x_k| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, |x_j| \leq |x_k|$$

D'où, puisque les coefficients de A sont positifs :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{k,j}|x_j| \leq a_{k,j}|x_k|$$

Ainsi, en sommant pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}|x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{k,j}|x_k|$$

Puis, avec le point précédent, par transitivité :

$$|\lambda x_k| \leq \sum_{j=1}^n a_{k,j}|x_k|$$

Mais :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{k,j}|x_k| &= |x_k| \sum_{j=1}^n a_{k,j} \\ &= |x_k| \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{A vérifie la propriété (2)}$$

On a ainsi établi :

$$|\lambda| \times |x_k| \leq |x_k|$$

Et comme, d'après 4.a, $|x_k| > 0$, on obtient :

$$|\lambda| \leq 1$$

Conclusion : $|\lambda| \leq 1$.

5.c. Démontrer :

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$$

En déduire que si les éléments diagonaux de A sont tous strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$, alors la matrice A est inversible.

- On avait déjà :

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j = \lambda x_k$$

Ainsi :

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j - a_{k,k}x_k = (\lambda - a_{k,k})x_k$$

Autrement dit :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{k,j}x_j = (\lambda - a_{k,k})x_k$$

En procédant comme en question précédente :

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{k,j}x_j \right| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{k,j}$$

Mais :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{k,j} &= \sum_{j=1}^n a_{k,j} - a_{k,k} \\ &= 1 - a_{k,k} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{A vérifie la propriété (2)}$$

On a finalement établi :

$$|\lambda - a_{k,k}| \times |x_k| \leq (1 - a_{k,k}) \times |x_k|$$

D'où le résultat, puisque $|x_k| > 0$.

Conclusion : $|\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$.

- Supposons que tous les éléments diagonaux de A sont strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$. D'après le point précédent, que :

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$$

D'où :

$$-(1 - a_{k,k}) \leq \lambda - a_{k,k} \leq 1 - a_{k,k}$$

Et ainsi :

$$2a_{k,k} - 1 \leq \lambda \leq 1$$

Puisque les coefficients diagonaux de A sont tous strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$, on a en particulier $a_{k,k} > \frac{1}{2}$. Ce qui donne $2a_{k,k} - 1 > 0$ puis :

$$\lambda > 0$$

Conclusion : si les éléments diagonaux de A sont tous strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$, alors 0 n'est pas valeur propre de A et donc A est inversible.

→ **Réflexe !**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+, \\ |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

EXERCICE 2 (ADAPTÉ DE HEC 2015 E)

Toutes les variables aléatoires du problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Un estimateur T_n d'un réel a est dit :

- **sans biais** lorsque : $\mathbb{E}(T_n) = a$,
- **convergent** lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|T_n - a| \geq \varepsilon) = 0$.

PARTIE I. COMPARAISON DE DEUX ESTIMATEURS DE $\frac{1}{\lambda}$

L'objectif de cette partie est de comparer deux estimateurs sans biais et convergents du paramètre inconnu $\frac{1}{\lambda}$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n -échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X .

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i ; \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} Y_n ; \quad M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

1. Rappeler sans démonstration les valeurs de l'espérance $\mathbb{E}(X)$, de la variance $\mathbb{V}(X)$ ainsi que l'expression de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .

$$\text{Conclusion : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

2. Démontrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $\frac{1}{\lambda}$.

- La variable aléatoire $\bar{X}_n$ est un estimateur de $\frac{1}{\lambda}$ car $\bar{X}_n$ est fonction d'un n -échantillon de X dont l'expression ne fait pas apparaître $\frac{1}{\lambda}$.
- La variable aléatoire $\bar{X}_n$ est une combinaison de variables aléatoires admettant toutes une espérance; donc $\bar{X}_n$ admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{X}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) && \swarrow \text{linéarité de l'espérance, toutes existent} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) && \swarrow \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Conclusion : l'estimateur $\bar{X}_n$ est sans biais.

- La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires :
 - ✓ indépendantes,
 - ✓ de même espérance $\frac{1}{\lambda}$ et de même variance (car les variables aléatoires suivent la même loi).

Par conséquent, d'après la loi faible des grands nombres :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Conclusion : l'estimateur $\bar{X}_n$ est convergent.

$$\text{Conclusion : } \bar{X}_n \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } \frac{1}{\lambda}.$$

3. 3.a. Montrer qu'une densité f_{M_n} de M_n est donnée par :

$$f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_{M_n} la fonction de répartition de M_n .
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}(M_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \end{aligned}$$

Petite remarque
Il s'agit d'une question de cours !
Il n'est pas rare, dans des sujets TOP3, de démontrer des résultats de cours classiques.

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x] \right) \\
&= F_X(x)^n
\end{aligned}
\quad \leftarrow X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes et de même loi que } X$$

• Puis :

- ✓ F_X est continue sur $\mathbb{R}$, car fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ; donc F_{M_n} est également continue sur $\mathbb{R}$.
- ✓ F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, donc F_{M_n} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Conclusion : la variable aléatoire M_n est à densité et admet pour densité la fonction f_{M_n} définie sur $\mathbb{R}$ par :

- * $\forall x < 0, f_{M_n}(x) = 0$
- * pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f_{M_n}(x) &= F'_{M_n}(x) \\
&= nF'_X(x)F_X(x)^{n-1} \\
&= n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}
\end{aligned}
\quad \leftarrow x > 0$$

- * $f_{M_n}(0) = 0$

Attention !
Il s'agit de la dérivée d'une composée de la forme u^n , avec $u = F_X \dots$

Conclusion : la variable aléatoire M_n est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

OU ALORS...

Dans la première partie, on peut distinguer des cas et expliciter $F_{M_n}(x)$...

Remarquons déjà que, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+$, on a :

$$M_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leq 0$:

$$\begin{aligned}
F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}([M_n \leq x]) \\
&= \mathbb{P}(\emptyset) \\
&= 0
\end{aligned}
\quad \leftarrow x \leq 0 \text{ et } M_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+, \text{ donc } [M_n \leq x] = \emptyset$$

- Si $x > 0$:

$$\begin{aligned}
F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}([M_n \leq x]) \\
&= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x] \right) \\
&= F_X(x)^n \\
&= (1 - e^{-\lambda x})^n
\end{aligned}
\quad \begin{aligned} &\leftarrow X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes et de même loi que } X \\ &\leftarrow x > 0 \end{aligned}$$

La suite de la question est très proche, mais utilise l'expression obtenue.

3.b. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(M_n)$ de la variable aléatoire M_n .

- On sait que :

M_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x) dx$ est absolument convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f_{M_n}(x) dx$ est convergente, car l'intégrande est nulle sur $] -\infty; 0]$ et positive sur $\mathbb{R}_*^+$

si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx$ est convergente, car $n \neq 0$

- Or :

- ✓ $\lambda > 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} = 1$. D'où :

$$x \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda x e^{-\lambda x}$$

- ✓ $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, x \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \geq 0$; $\lambda x e^{-\lambda x} \geq 0$

✓ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}$ est convergente puisqu'il s'agit de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales à intégrande positive, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda x \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx$ est convergente.

Conclusion : la variable aléatoire M_n admet une espérance.

3.c. Soit $a > 0$. En posant $t = 1 - e^{-\lambda x}$, justifier l'égalité :

$$\int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx = -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} t^{n-1} \ln(1-t) dt$$

Effectuons le changement de variable $t = 1 - e^{-\lambda x}$ dans l'intégrale $\int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx$:

$$\begin{cases} t = 1 - e^{-\lambda x} \\ x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-t) \end{cases} ; \quad \begin{cases} dt = \lambda e^{-\lambda x} dx \\ dx = \frac{1}{\lambda(1-t)} dt \end{cases} ; \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline x = & 0 & a \\ \hline t = & 0 & 1 - e^{-\lambda a} \\ \hline \end{array}$$

Ce changement de variable est bien licite, puisque la fonction $t \mapsto -\frac{1}{\lambda} \ln(1-t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; 1 - e^{-\lambda a}]$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx &= \int_0^{1-e^{-\lambda a}} \frac{-1}{\lambda} \ln(1-t) t^{n-1} \frac{1}{\lambda} dt \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} \ln(1-t) t^{n-1} dt \end{aligned}$$

★Subtil...★

Si x est la variable initiale et que l'on pose $t = h(x)$, alors h doit être bijective et c'est la fonction h^{-1} qui doit être $\mathcal{C}^1$ (regarder le théorème de changement de variable).

Pour ne pas se tromper, si x est la variable initiale, on devrait toujours poser $x = \dots$ même si c'est parfois moins naturel !

Conclusion : $\int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx = -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} t^{n-1} \ln(1-t) dt.$

3.d. En déduire que l'on a : $\mathbb{E}(M_n) = -\frac{n}{\lambda} \int_0^1 t^{n-1} \ln(1-t) dt.$

On sait que M_n admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda n \lambda x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(n \lambda \int_0^a x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{n}{\lambda} \int_0^{1-e^{-\lambda a}} t^{n-1} \ln(1-t) dt \right) \\ &= -\frac{n}{\lambda} \int_0^1 t^{n-1} \ln(1-t) dt \end{aligned} \quad \leftarrow \lim_{a \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda a}) = 1$$

Petite remarque

Il n'est pas nécessaire de justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^{n-1} \ln(1-t) dt$: c'est implicite par le passage à la limite et le fait que $\mathbb{E}(M_n)$ existe.

Conclusion : $\mathbb{E}(M_n) = -\frac{n}{\lambda} \int_0^1 t^{n-1} \ln(1-t) dt.$

3.e. Dériver la fonction $t \mapsto (1-t)(1 - \ln(1-t))$ définie sur l'intervalle $[0, 1[$.

À l'aide d'une intégration par parties, en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre $\mathbb{E}(M_{n+1})$ et $\mathbb{E}(M_n)$.

- La fonction $g : t \mapsto (1-t)(1 - \ln(1-t))$ est dérivable sur $[0; 1[$ et, pour tout $t \in [0; 1[$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= -(1 - \ln(1-t)) + (1-t) \frac{1}{1-t} \\ &= \ln(1-t) \end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(M_{n+1}) = \frac{-(n+1)}{\lambda} \int_0^1 t^n \ln(1-t) dt$$

✖ Attention !

L'intégrale $\int_0^1 t^n \ln(1-t) dt$ est impropre en 1...

Soit $B \in [0; 1[$.

Posons : $\begin{cases} u : t \mapsto t^n \\ v : t \mapsto (1-t)(1-\ln(1-t)) \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; B]$ et pour

tout $t \in [0; B]$: $\begin{cases} u'(t) = nt^{n-1} \\ v'(t) = \ln(1-t) \end{cases}$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^B t^n \ln(1-t) dt &= [t^n(1-t)(1-\ln(1-t))]_0^B - \int_0^B nt^{n-1}(1-t)(1-\ln(1-t)) dt \\ &= B^n(1-B)(1-\ln(1-B)) - n \int_0^B (t^{n-1} - t^n)(1-\ln(1-t)) dt \\ &= B^n(1-B)(1-\ln(1-B)) - n \int_0^B (t^{n-1} - t^n) dt + n \int_0^B (t^{n-1} - t^n) \ln(1-t) dt \\ &= B^n(1-B)(1-\ln(1-B)) - n \left[\frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^B + n \int_0^B t^{n-1} \ln(1-t) dt - n \int_0^B t^n \ln(1-t) dt \\ &= B^n(1-B) - B^n(1-B) \ln(1-B) - B^n + \frac{n}{n+1} B^{n+1} + n \int_0^B t^{n-1} \ln(1-t) dt - n \int_0^B t^n \ln(1-t) dt \end{aligned}$$

$\leftarrow n \in \mathbb{N}^*$, donc $0^n = 0$

Or :

★ $\lim_{B \rightarrow 1} (1-B) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées; donc :

$$\lim_{B \rightarrow 1} (1-B) \ln(1-B) = 0$$

★ d'après la question précédente :

$$\lim_{B \rightarrow 1} \int_0^B t^{n-1} \ln(1-t) dt = \frac{-\lambda}{n} \mathbb{E}(M_n) ; \quad \lim_{B \rightarrow 1} \int_0^B t^n \ln(1-t) dt = \frac{-\lambda}{n+1} \mathbb{E}(M_{n+1})$$

D'où, en passant à la limite quand $B \rightarrow 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{n+1} \mathbb{E}(M_{n+1}) &= -1 + \frac{n}{n+1} + n \frac{-\lambda}{n} \mathbb{E}(M_n) - n \frac{-\lambda}{n+1} \mathbb{E}(M_{n+1}) \\ &= \frac{-1}{n+1} - \lambda \mathbb{E}(M_n) + \frac{\lambda n}{n+1} \mathbb{E}(M_{n+1}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E}(M_{n+1}) = \frac{1}{\lambda} + (n+1) \mathbb{E}(M_n) - n \mathbb{E}(M_{n+1})$$

Et ainsi :

$$(n+1) \mathbb{E}(M_{n+1}) = \frac{1}{\lambda} + (n+1) \mathbb{E}(M_n)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(M_{n+1}) = \frac{1}{\lambda(n+1)} + \mathbb{E}(M_n)$.

Petite remarque

Question assez calculatoire mais qui reste classique. Il faut prendre le temps de la traiter pour ne pas faire d'erreur de calcul...

3.f. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$. Déduire de la question précédente : $\mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{\lambda} u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \geq 2$:

D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(M_{k+1}) - \mathbb{E}(M_k) = \frac{1}{\lambda(k+1)}$$

D'où, en sommant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{E}(M_{k+1}) - \mathbb{E}(M_k)) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

Par télescopage à gauche et changement d'indice $j = k+1$ à droite, on obtient :

$$\mathbb{E}(M_n) - \mathbb{E}(M_1) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$$

Or $M_1 = X_1$, donc $\mathbb{E}(M_1) = \frac{1}{\lambda}$.

D'où :

$$\mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{\lambda} u_n$$

- Si $n = 1$:

Immédiat car $u_1 = 1$ et $\mathbb{E}(M_1) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\lambda}$.

♣ Méthode !

Bien évidemment, on peut procéder par récurrence, ce qui se fait sans mal d'ailleurs.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{\lambda} u_n.$

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^* : M'_n = \frac{M_n}{u_n}$ et $v_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$. On admet : $\mathbb{V}(M_n) = \frac{1}{\lambda^2} v_n$.

4.a. Calculer $\mathbb{E}(M'_n)$ et $\mathbb{V}(M'_n)$.

- Puisque M_n admet une espérance, la variable aléatoire $\frac{M_n}{u_n}$ également et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M'_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{M_n}{u_n}\right) \\ &= \frac{\mathbb{E}(M_n)}{u_n} && \swarrow \text{linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

- De même, M'_n admet une variance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(M'_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{M_n}{u_n}\right) \\ &= \frac{\mathbb{V}(M_n)}{u_n^2} \\ &= \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(M'_n) = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(M'_n) = \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2}$.

4.b. Justifier la convergence de la suite de terme général v_n . Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- La série $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2}$ est une série de Riemann convergente (car d'exposant 2, avec $2 > 1$).

Conclusion : la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

- La série $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j}$ est une série de Riemann divergente. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également divergente.

Mais, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ($\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$), on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4.c. Dédire des questions 4.a et 4.b que M'_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $\frac{1}{\lambda}$.

- La variable aléatoire M'_n est un estimateur de $\frac{1}{\lambda}$ car fonction d'un n -échantillon de X dont l'expression ne fait pas apparaître $\frac{1}{\lambda}$.
- Puisque $\mathbb{E}(M'_n) = \frac{1}{\lambda}$, l'estimateur M'_n est sans biais.
- Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, licite car M'_n admet une variance :

$$\mathbb{P}(|M'_n - \mathbb{E}(M'_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(M'_n)}{\varepsilon^2}$$

On a donc établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \mathbb{P}\left(\left|M'_n - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{v_n}{\lambda^2 \varepsilon^2 u_n^2}$$

Or $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\lambda^2 \varepsilon^2 u_n^2} = 0$.

Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|M'_n - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Conclusion : l'estimateur M'_n est convergent.

Conclusion : M'_n est un estimateur sans biais et convergent de $\frac{1}{\lambda}$.

- 4.d. 4.d.i. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** ci-dessous de sorte que son exécution affiche sur le même graphique un nuage de points de 30 réalisations de chacun des estimateurs $\bar{X}_n$ et M'_n dans le cas où $n = 1000$ et $\lambda = 2$.

```

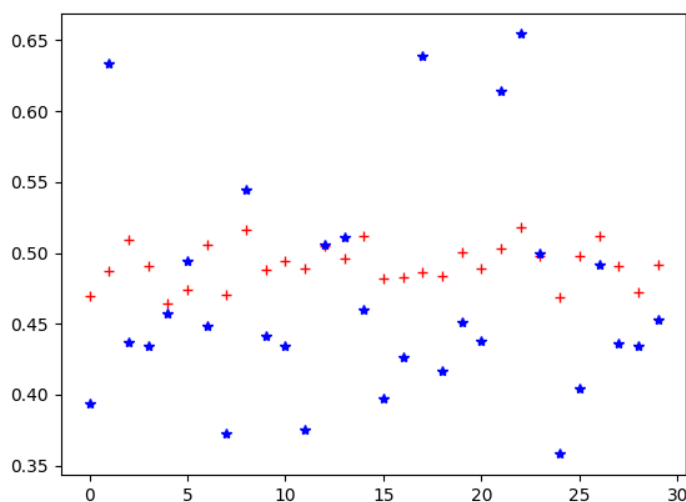
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 n=1000
6 u=...
7 lam=2
8 for k in range(30):
9     L=...
10    X=...
11    M=...
12    plt.plot(k,X, 'r+')
13    plt.plot(k,M, 'b*')
14 plt.show()
```

Voici :

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 n=1000
6 u=sum([1/j for j in range(1,n+1)])
7 lam=2
8 for k in range(30):
9     L=rd.exponential(1/lam,n)
10    X=np.mean(L)
11    M=max(L)/u
12    plt.plot(k,X, 'r+')
13    plt.plot(k,M, 'b*')
14 plt.legend()
15 plt.show()
```

- 4.d.ii. L'exécution du programme ci-dessus, une fois complété, affiche le graphique suivant. Lequel des deux estimateurs $\bar{X}_n$ et M'_n semble à privilégier ?



D'après le programme **Python**, les réalisations de $\bar{X}_n$ sont représentées par des + et celles de M'_n par des *.

On observe que les réalisations de M'_n sont plus dispersées que celles de $\bar{X}_n$. On privilégie donc l'estimateur $\bar{X}_n$ puisque ses réalisations sont souvent plus proches de la valeur exacte de $\frac{1}{\lambda}$ (qui vaut ici $\frac{1}{2}$).

Petite remarque

En pratique, on étudie un seul n -échantillon, on obtient donc une seule réalisation de $\bar{X}_n$ et de M'_n . Puisque les réalisations de $\bar{X}_n$ sont moins dispersées, il y a plus de chances d'obtenir une bonne approximation de $\frac{1}{\lambda}$ en prenant la réalisation de $\bar{X}_n$ plutôt que celle de M'_n .

4.e. 4.e.i. Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \sum_{j=1}^n \left(x - \frac{1}{j}\right)^2$.

À l'aide de l'étude de Q , établir l'inégalité : $u_n^2 \leq nv_n$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{j=1}^n \left(x - \frac{1}{j}\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \left(x^2 - 2x\frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}\right) \\ &= nx^2 - 2xu_n + v_n \end{aligned}$$

- Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$$

Par conséquent, la fonction Q est une fonction polynomiale de degré 2 (car $n \neq 0$) qui est de signe constant. Ainsi, son discriminant est négatif ou nul.

D'où :

$$4u_n^2 - 4nv_n \leq 0$$

Conclusion : $u_n^2 \leq nv_n$.

4.e.ii. Comparer alors $\mathbb{V}(M'_n)$ et $\mathbb{V}(\bar{X}_n)$. Retrouver le résultat proposé en question 4.d.ii.

La variable aléatoire $\bar{X}_n$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une variance, elle admet donc une variance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\bar{X}_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) && \swarrow X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) && \swarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{n\lambda^2} \end{aligned}$$

Et on rappelle que, d'après la question 4.a, $\mathbb{V}(M'_n) = \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\bar{X}_n) - \mathbb{V}(M'_n) &= \frac{1}{n\lambda^2} - \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2} \\ &= \frac{u_n^2 - nv_n}{\lambda^2 u_n^2} && \swarrow \text{question précédente} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{V}(\bar{X}_n) \leq \mathbb{V}(M'_n)$, ce qui confirme le choix fait en question 4.d.ii de privilégier l'estimateur $\bar{X}_n$.

PARTIE II. UN EXEMPLE.

Les notations et le contexte sont ceux de la partie I.

Dans cette partie, on suppose que la durée de vie (en heures) d'un composant électronique est une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

On suppose qu'en cas de panne, le composant électronique est immédiatement remplacé par un composant neuf dont la durée de vie est indépendante et de même loi que celle des composants précédents.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note X_j la variable aléatoire égale à la durée de vie du j -ième composant. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on constitue ainsi un n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X .

On note $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la réalisation du n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et on pose : $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

5. Donner une interprétation de $\frac{1}{\lambda}$. Dans quelle unité s'exprime $\frac{1}{\lambda}$?

La variable aléatoire X modélise la durée de vie d'un composant électronique et $\frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(X)$.

Conclusion : $\frac{1}{\lambda}$ s'interprète comme la durée de vie moyenne du composant électronique, et elle est donc exprimée en heures.

6. On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T ou f_Z soit bornée sur $\mathbb{R}$, alors la variable aléatoire $T + Z$ est à densité et admet pour densité la fonction f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)f_Z(x-t)dt$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_n est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Procédons par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:

On a $Y_1 = X_1$ et la variable aléatoire X_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ et suit la loi exponentielle de paramètre λ ;

par conséquent, Y_1 est à densité et admet pour densité la fonction $f_{Y_1} : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Or, pour tout $x > 0$:

$$\lambda e^{-\lambda x} = \frac{\lambda^1 x^{1-1}}{(1-1)!} e^{-\lambda x}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la variable aléatoire Y_n est à densité et admet pour densité la

fonction $f_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Montrons que la variable aléatoire Y_{n+1} est à densité

et admet pour densité la fonction $f_{Y_{n+1}} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

On a :

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} X_k \\ &= Y_n + X_{n+1} \end{aligned}$$

Puis :

- ✓ Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, les variables aléatoires $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} le sont également. Les variables aléatoires Y_n et X_{n+1} sont donc indépendantes.
- ✓ Les variables aléatoires X_{n+1} et Y_n sont à densité (par hypothèse de récurrence), et X_{n+1} suit la loi exponentielle de paramètre λ , dont la fonction $x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est une densité bornée sur $\mathbb{R}$.

D'après le résultat admis, on en déduit que la variable aléatoire Y_{n+1} est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_{Y_{n+1}} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_n}(t)f_{X_{n+1}}(x-t)dt$$

D'où, puisque, par hypothèse de récurrence, f_{Y_n} est nulle sur $] -\infty; 0]$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{Y_{n+1}}(x) = \int_0^{+\infty} f_{Y_n}(t)f_{X_{n+1}}(x-t)dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- * Si $x \leq 0$:

Dans ce cas, pour tout $t \geq 0$ on a $x - t \leq 0$ et donc $f_{X_{n+1}}(x - t) = 0$.

D'où :

$$f_{Y_{n+1}}(x) = 0$$

- * Si $x > 0$:

On a :

$$\begin{aligned} f_{Y_{n+1}}(x) &= \int_0^{+\infty} f_{Y_n}(t)f_{X_{n+1}}(x-t)dt \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} f_{X_{n+1}}(x-t)dt \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} e^{-\lambda t} \lambda e^{-(x-t)} dt \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ par hypothèse de récurrence, $\forall t > 0$, $f_{Y_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$
 $\hookrightarrow \forall t > x$, $x - t < 0$, donc $\forall t > x$, $f_{X_{n+1}}(x - t) = 0$
 $\hookrightarrow \forall t \leq x$, $x - t \geq 0$ et donc $\forall t \leq x$, $f_{X_{n+1}}(x - t) = \lambda e^{-(x-t)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x t^{n-1} dt \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^x \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

On a donc établi que Y_{n+1} est à densité, de densité la fonction $f_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_n est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

★ Classique ! ★

Question relativement classique sur des sujets TOP3 : l'obtention d'une densité de la somme de VA à densité. Relativement classique, mais qui peut effrayer si l'on ne l'a jamais rencontrée au préalable...

7. 7.a. Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Considérons la fonction $g_n : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Démontrer que la fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'_n(x)$.

- Sur $] -\infty; 0[$:

La fonction g_n est dérivable sur $] -\infty; 0[$, car constante et :

$$\forall x < 0, g'_n(x) = 0$$

- Sur $]0; +\infty[$:

La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned}
g'_n(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} - e^{-\lambda x} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda (\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \quad \leftarrow j = k-1 \text{ dans la seconde somme} \\
&= \lambda e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \right) \\
&= \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

- En 0 :

$$\star \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{g_n(0+h) - g_n(0)}{h} = 0, \text{ donc } g_n \text{ est dérivable à gauche en 0 et } g'_{n,g}(0) = 0.$$

- Pour tout $h > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{g_n(0+h) - g_n(0)}{h} &= \frac{1 - e^{-\lambda h} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda h)^k}{k!}}{h} \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda h} \left(1 + \lambda h + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(\lambda h)^k}{k!} \right)}{h} \quad \leftarrow \text{car } n \geq 2 \text{ dnc } n-1 \geq 1 \text{ (somme nulle si } n=2) \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} - \lambda e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\lambda^k h^{k-1}}{k!}
\end{aligned}$$

Mais :

◇ Puisque $e^{-\lambda h} - 1 \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\lambda h$, on obtient :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} = -\lambda$$

$$\diamond \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \lambda e^{-\lambda h} = \lambda$$

Important !

L'hypothèse $n \geq 2$ est nécessaire pour avoir le terme λh dans la décomposition de la somme. C'est ce terme qui va faire en sorte que g_n soit dérivable en 0 (nombre dérivé à droite nul). Si $n = 1$, on retrouve la fonction de répartition de X_1 , qui n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$!

◇ Pour tout $k \geq 2$, $k-1 \geq 1$ et donc $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} h^{k-1} = 0$. D'où, par somme et produit :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} e^{-\lambda h} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\lambda^k h^{k-1}}{k!} = 0$$

Par somme :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{g_n(0+h) - g_n(0)}{h} = 0$$

Donc g_n est dérivable à droite en 0 et $g'_{n,d}(0) = 0$.

Des deux points, on déduit que g_n est dérivable en 0 et $g'_n(0) = 0$.

Conclusion : la fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on remarque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'_n(x) = f_{Y_n}(x)$$

7.b. Démontrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable aléatoire Y_n est donnée par :

$$F_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n = 1$:

Le résultat est immédiat puisqu'on retrouve la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, loi suivie par Y_1 .

- Si $n \geq 2$:

Dans ce cas, d'après l'expression obtenue en question 6, la fonction f_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$ (la continuité en 0 est assurée par le fait que $n \geq 2$...). Elle admet donc des primitives qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que F_{Y_n} est l'unique primitive de f_{Y_n} sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 (car f_{Y_n} est nulle sur $]-\infty; 0]$).

Mais, d'après la question précédente, g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'_n(x) = f_{Y_n}(x)$.

Donc g_n est une primitive de f_{Y_n} sur $\mathbb{R}$ et $g_n(0) = 0$.

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = F_{Y_n}(x)$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable aléatoire Y_n est donnée par :

$$F_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

8. Soit $t > 0$ un réel fixé et N_t la variable aléatoire égale au nombre de pannes dans l'intervalle $[0, t]$.

8.a. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}([N_t \geq n])$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$:

Puisque N_t est un nombre de pannes, on a déjà $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et donc $\mathbb{P}([N_t \geq 0]) = 1$.

- Si $n \geq 1$:

$[N_t \geq n]$ est réalisé si, et seulement si, il y a eu au moins n pannes dans l'intervalle $[0, t]$
 si, et seulement si, la somme des durées de vie des n premiers composants est inférieure ou égale à t
 si, et seulement si, $[Y_n \leq t]$ est réalisé

D'où :

$$[N_t \geq n] = [Y_n \leq t]$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([N_t \geq n]) &= \mathbb{P}([Y_n \leq t]) \\ &= F_{Y_n}(t) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{aligned} \quad \leftarrow \text{question 7.b et } t > 0$$

Petite remarque

On retrouve la même question dans EML2001E_ex3 par exemple...

Conclusion : les deux cas se regroupent, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([N_t \geq n]) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

8.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_t .

On a déjà $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} [N_t \geq n] &= [N_t = n] \cup [N_t > n] \\ &= [N_t = n] \cup [N_t \geq n+1] \end{aligned} \quad \leftarrow N_t \text{ est à valeurs entières et } n \in \mathbb{N}$$

D'où, par incompatibilité de $[N_t = n]$ et $[N_t \geq n+1]$:

$$\mathbb{P}([N_t \geq n]) = \mathbb{P}([N_t = n]) + \mathbb{P}([N_t \geq n+1])$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([N_t = n]) &= \mathbb{P}([N_t \geq n]) - \mathbb{P}([N_t \geq n+1]) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) \quad \leftarrow \text{question précédente, licite car } n, n+1 \in \mathbb{N} \\ &= e^{-\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \end{aligned}$$

Conclusion : la variable aléatoire N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

8.c. Donner une estimation "naturelle" du nombre moyen de pannes dans l'intervalle $[0, t]$.

On cherche donc à avoir une estimation "naturelle" de l'espérance de la variable aléatoire N_t ... La moyenne empirique, sur un grand nombre de réalisations indépendantes de N_t convient, d'après la loi faible des grands nombres.

9. L'objectif de cette question est de déterminer un intervalle de confiance asymptotique du paramètre inconnu $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ (où $0 < \alpha < 1$).

9.a. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Démontrer l'existence d'un unique réel t_α tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Établir : $t_\alpha > 0$.

- Notons φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ associée à la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Puisque φ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(x) = \varphi(x) > 0$$

Par conséquent :

- ✓ Φ est continue sur $\mathbb{R}$,
- ✓ Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc par théorème de bijection, Φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\Phi(\mathbb{R})$.

Or $\Phi(\mathbb{R}) =]0; 1[$.

Ensuite, puisque $\alpha \in]0; 1[$, on a $1 - \frac{\alpha}{2} \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

Conclusion : il existe un unique réel t_α tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

- On a vu que $1 - \frac{\alpha}{2} \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

D'où :

$$\Phi(t_\alpha) > \Phi(0)$$

Et par stricte croissance de Φ sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$t_\alpha > 0$$

Conclusion : $t_\alpha > 0$.

Pourquoi ?

Car Φ est continue, strictement croissante, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

♣ Méthode !

Dans ce cas de figure, pour comparer les antécédents, on compare les images...

9.b. On pose : $R_n = \sqrt{n} (\lambda \bar{X}_n - 1)$. Justifier que la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{X}_n^* = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sigma(\bar{X}_n)}$, licite car $\sigma(\bar{X}_n) = \frac{1}{\lambda \sqrt{n}} \neq 0$ (question 4.e.ii).

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\bar{X}_n^* &= \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sigma(\bar{X}_n)} \\ &= \frac{\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda \sqrt{n}}} \\ &= \sqrt{n} (\lambda \bar{X}_n - 1) \\ &= R_n\end{aligned}$$

Or, la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires :

- ✓ indépendantes,
- ✓ de même loi,
- ✓ admettant une variance non nulle.

Conclusion : d'après le théorème central limite, $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.

9.c. Déterminer alors un intervalle de confiance asymptotique de $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

- D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([-x \leq R_n \leq x]) = \mathbb{P}([-x \leq Z \leq x])$$

D'où, avec $x = t_\alpha$, licite car $t_\alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([-t_\alpha \leq R_n \leq t_\alpha]) &= \mathbb{P}([-t_\alpha \leq Z \leq t_\alpha]) \\ &= \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) \\ &= 2\Phi(t_\alpha) - 1 \\ &= 1 - \alpha\end{aligned}$$

$\swarrow$
 $\swarrow$
 $\swarrow$

Z est à densité
 $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
définition de t_α

- Ensuite, pour n suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([-t_\alpha \leq R_n \leq t_\alpha]) &= \mathbb{P}([-t_\alpha \leq \sqrt{n}(\lambda \bar{X}_n - 1) \leq t_\alpha]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \leq \lambda \bar{X}_n \leq 1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}}{\bar{X}_n} \leq \lambda \leq \frac{1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}}{\bar{X}_n}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{\bar{X}_n}{1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}}\right]\right)\end{aligned}$$

$\swarrow$
 $\swarrow$
 $\swarrow$

$\sqrt{n} > 0$
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, X_k(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $\bar{X}_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$
pour n suffisamment proche de $+\infty$, $1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} > 0$, et décroissance de $\frac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Posons alors $U_n = \frac{\bar{X}_n}{1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}}$ et $V_n = \frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}}$. On a ainsi :

- ✓ U_n et V_n sont des estimateurs de $\frac{1}{\lambda}$ car fonctions d'un n -échantillon ne faisant pas apparaître $\frac{1}{\lambda}$ et, puisque $t_\alpha > 0$ et $\bar{X}_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$, on obtient $\mathbb{P}([U_n \leq V_n]) = 1$...
- ✓ d'après ce qui précède :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left[U_n \leq \frac{1}{\lambda} \leq V_n\right]\right) = 1 - \alpha$$

Conclusion : l'intervalle $\left[\frac{\bar{X}_n}{1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}}; \frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

9.d. Que se passe-t-il lorsque α est proche de 1 ?

Lorsque α est proche de 1, $1 - \frac{\alpha}{2}$ est proche de $\frac{1}{2}$; autrement dit, $\Phi(t_\alpha)$ est proche de $\frac{1}{2}$ et donc t_α est proche de 0. Dans ce cas, l'intervalle $\left[\frac{\bar{X}_n}{1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}}; \frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}}\right]$ est très réduit autour de $\bar{X}_n$...

Conclusion : si α est proche de 1, alors l'intervalle de confiance est très précis, centré autour de $\bar{X}_n$, mais le niveau de confiance est trop faible pour que ce soit intéressant.

PARTIE III. UN RÉSULTAT ASYMPTOTIQUE

Les notations et le contexte sont ceux des parties précédentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = M_n - \frac{1}{\lambda} \ln(n)$ et on note F_{T_n} la fonction de répartition de T_n .

10. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \exp(-e^{-\lambda x})$$

10.a. Démontrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité T dont on donnera une densité. On dira que T suit la loi de Gumbel de paramètre λ .

- ✓ La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions continues sur les intervalles adéquats (sur $\mathbb{R}$ ici).
- ✓ De même, la fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ✓ * puisque $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\lambda x} = +\infty$ et donc, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-e^{-\lambda x}} = 0$$

* puisque $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ et donc, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-e^{-\lambda x}} = 1$$

- ✓ La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} e^{-e^{-\lambda x}} > 0$$

La fonction F est donc (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité T dont une densité est la fonction $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} e^{-e^{-\lambda x}}$.

10.b. Démontrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T .

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_{T_n} la fonction de répartition de T_n . On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x) &= \mathbb{P} \left(\left[M_n - \frac{1}{\lambda} \ln(n) \leq x \right] \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\left[M_n \leq x + \frac{1}{\lambda} \ln(n) \right] \right) \\ &= F_{M_n} \left(x + \frac{\ln(n)}{\lambda} \right) \\ &= F_X \left(x + \frac{\ln(n)}{\lambda} \right)^n \quad \leftarrow \text{question 3.a} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x + \frac{\ln(n)}{\lambda} \leq 0 \\ \left(1 - \exp \left(-\lambda \left(x + \frac{\ln(n)}{\lambda} \right) \right) \right)^n & \text{si } x + \frac{\ln(n)}{\lambda} > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{\ln(n)}{\lambda} \\ \left(1 - \exp(-\lambda x - \ln(n)) \right)^n & \text{si } x > -\frac{\ln(n)}{\lambda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{\ln(n)}{\lambda} \\ \left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n} \right)^n & \text{si } x > -\frac{\ln(n)}{\lambda} \end{cases} \end{aligned}$$

- Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$.

Puisque $\lambda > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(n)}{\lambda} = -\infty$ et donc, pour n suffisamment proche de $+\infty$, on a $x > \frac{-\ln(n)}{\lambda}$ et donc

$$F_{T_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n} \right)^n \quad \leftarrow \text{pour } n \text{ suffisamment proche de } +\infty, \text{ on a } 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n} > 0$$

♥ Astuce du chef ! ♥

Pour savoir comment quantifier x ici, on peut s'aider en

$$= \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n} \right) \right)$$

Or :

$$\checkmark \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-\lambda x}}{n} = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \frac{-e^{-\lambda x}}{n} \neq 0;$$

$$\checkmark \ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u.$$

D'où :

$$\ln \left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-e^{-\lambda x}}{n}$$

Puis :

$$n \ln \left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-\lambda x}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n} \right) = -e^{-\lambda x}$$

Enfin, par composition de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n} \right) \right) = e^{-e^{-\lambda x}}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{T_n}(x) = F(x).$

Conclusion : la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T .

11. 11.a. On pose : $Z = -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda X)$. Montrer que les variables aléatoires Z et T suivent la même loi.

Notons F_Z la fonction de répartition de Z . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leq x]) \\ &= \mathbb{P} \left(\left[-\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda X) \leq x \right] \right) && \swarrow -\lambda < 0 \\ &= \mathbb{P}([\ln(\lambda X) \geq -\lambda x]) \\ &= \mathbb{P}([\lambda X \geq e^{-\lambda x}]) && \swarrow \text{stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= \mathbb{P} \left(\left[X \geq \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right] \right) && \swarrow \lambda > 0 \\ &= 1 - F_X \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) && \swarrow X \text{ est à densité} \\ &= 1 - \left(1 - \exp \left(-\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \right) && \swarrow \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} > 0 \\ &= e^{-e^{-\lambda x}} \\ &= F_T(x) \end{aligned}$$

Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : les variables aléatoires Z et T suivent la même loi.

11.b. Justifier que Z admet une espérance et que $\mathbb{E}(Z) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

- Par théorème de transfert, licite car la fonction $x \mapsto -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda x)$ est continue sur $X(\Omega)$ ($X(\Omega) = \mathbb{R}_*^+$) :

Z admet une espérance	si, et seulement si,	l'intégrale $\int_0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda t) f_X(t) dt$ est absolument convergente
	si, et seulement si,	l'intégrale $\int_0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda t) \lambda e^{-\lambda t} dt$ est absolument convergente
	si, et seulement si,	l'intégrale $\int_0^{+\infty} -\ln(\lambda t) e^{-\lambda t} dt$ est absolument convergente
	si, et seulement si,	l'intégrale $\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} -\ln(x) e^{-x} dx$ est absolument convergente,
		par changement de variable $x = \lambda t$ qui conserve la nature des intégrales impropres, car affine non constant
	si, et seulement si,	les intégrales $\int_0^1 -\ln(x) e^{-x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \ln(x) e^{-x} dx$ sont convergentes, car leurs intégrandes sont positives sur l'intervalle d'intégration

- Or :

★ l'intégrale $\int_0^1 -\ln(x)e^{-x}dt$ n'est impropre qu'en 0 ; puis :

✓ $-\ln(x)e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$

✓ pour tout $x \in]0; 1]$, $-\ln(x) \geq 0$; $-\ln(x)e^{-x} \geq 0$

✓ l'intégrale $\int_0^1 -\ln(x)dx$ est une intégrale convergente.

Par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale

$\int_0^1 -\ln(x)e^{-x}dx$ est convergente.

★ l'intégrale $\int_1^{+\infty} -\ln(x)e^{-x}dt$ n'est impropre qu'en $+\infty$; puis :

✓ pour tous x suffisamment proche de $+\infty$:

$$x^2 \ln(x)e^{-x} = \frac{x^2}{\sqrt{e^x}} \times \frac{\ln(x)}{\sqrt{e^x}}$$

D'où, par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x)e^{-x} = 0$$

Et ainsi :

$$\ln(x)e^{-x} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

✓ pour tout $x \in [1; +\infty[$, $\frac{1}{x^2} \geq 0$; $\ln(x)e^{-x} \geq 0$

✓ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente (car impropre en $+\infty$ seulement et d'exposant 2, avec $2 > 1$).

Par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale

$\int_1^{+\infty} -\ln(x)e^{-x}dt$ est convergente.

• On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \int_0^{+\infty} -\ln(\lambda t)e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} -\ln(x)e^{-x} dx \end{aligned} \quad \leftarrow \text{changement de variable } x = \lambda t, \text{ licite car affine}$$

Conclusion : Z admet une espérance et $\mathbb{E}(Z) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

11.c. À l'aide de la concavité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_*^+$, établir l'inégalité : $\mathbb{E}(T) \geq 0$.

• D'après la question 11.a, les variables aléatoires Z et T ont la même loi, donc la même espérance. Ainsi, d'après la question précédente, T admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(T) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$$

• Ensuite, puisque la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_*^+$, sa courbe représentative se situe partout au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier celle au point d'abscisse 1, d'équation réduite $y = x - 1$. D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \ln(t) \leq t - 1$$

Et ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, -e^{-t} \ln(t) \geq (1 - t)e^{-t} = e^{-t} - te^t$$

Mais :

★ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et vaut 1, car il s'agit de l'intégrale d'une densité de la loi $\mathcal{E}(1)$;

★ l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ est convergente et vaut 1, car il s'agit de l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.

Par conséquent, par croissance de l'intégrale, licite car $0 < +\infty$ et que les trois intégrales en jeu sont convergentes, on a :

$$\int_0^{+\infty} -e^{-t} \ln(t) dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} te^t dt$$

Autrement dit :

$$\int_0^{+\infty} -e^{-t} \ln(t) dt \geq 0$$

Petite remarque

A ce stade de l'exercice, il n'est pas nécessaire de détailler la limite avec les CC. Mais je le fais pour bien montrer qu'il y a 2 CC en jeu.

Conclusion : $\mathbb{E}(T) \geq 0$.

12. 12.a. Démontrer que F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$ et expliciter sa bijection réciproque notée G .

Soit $y \in]0; 1[$. Résolvons l'équation $y = F(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) = y &\iff e^{-e^{-\lambda x}} = y \\ &\iff -e^{-\lambda x} = \ln(y) && \swarrow y > 0 \\ &\iff e^{-\lambda x} = -\ln(y) \\ &\iff -\lambda x = \ln(-\ln(y)) && \swarrow y \in]0; 1[, \text{ donc } \ln(y) < 0, \text{ donc } -\ln(y) > 0 \\ &\iff x = \frac{-1}{\lambda} \ln(-\ln(y)) \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$ et sa bijection réciproque est la fonction $G : y \mapsto \frac{-1}{\lambda} \ln(-\ln(y))$.

12.b. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel a et permettant d'afficher les courbes de F et G sur le même graphique dans le cas où $\lambda = a$.

Voici :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def graphique(a):
5     x=np.linspace(-2,2,1000)
6     y=np.exp(-np.exp(-a*x))
7     plt.plot(x,y, 'r')
8     plt.plot(y,x, 'b')
9     plt.show()
```

♥ Astuce du chef ! ♥

Puisque la courbe de G s'obtient à partir de celle de F par symétrie axiale selon l'axe d'équation $y = x$, il suffit d'échanger les données de x et y pour représenter l'allure de la courbe de G ...

12.c. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

Notons $F_{G(U)}$ la fonction de répartition de $G(U)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_{G(U)}(x) &= \mathbb{P}([G(U) \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([U \leq G^{-1}(x)]) && \swarrow G \text{ est bijective et strictement croissante sur }]0; 1[, \text{ car } F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{ (question 10.a)} \\ &= G^{-1}(x) && \swarrow U \mapsto \mathcal{U}([0; 1]) \text{ et } G^{-1}(x) \in]0; 1[\\ &= F(x) && \swarrow G^{-1} = F \end{aligned}$$

Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : $G(U)$ a même loi que T , la loi de Gumbel de paramètre λ .

★ Classique ! ★

Question très classique, dont la démonstration met en évidence le fait qu'il n'est pas utile de connaître l'expression de G pour conclure ! C'est cette question qui est à la base de la méthode d'inversion permettant de simuler des VA à partir d'une VA suivant la loi $\mathcal{U}([0; 1])$.

12.d. En déduire l'inégalité : $\mathbb{E}(T) \leq \frac{1}{\lambda}$.

On sait que T admet une espérance et, d'après la question précédente, $G(U)$ a même loi que T . Donc $G(U)$ admet également une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(G(U)) \\ &= \int_0^1 G(x) dx && \swarrow \text{théorème de transfert, licite car } G \text{ est continue sur } U(\Omega) \text{ (} U \mapsto \mathcal{U}([0; 1]) \text{)} \\ &= \frac{-1}{\lambda} \int_0^1 \ln(-\ln(x)) dx \end{aligned}$$

Or :

$$\forall x \in]0; 1[, \ln(x) \leq x - 1 < 0$$

D'où :

$$\forall x \in]0; 1[, 0 < 1 - x < -\ln(x)$$

Et donc par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^+$:

$$\forall x \in]0; 1[, \ln(1 - x) \leq \ln(-\ln(x))$$

Mais, grâce au changement de variable $t = 1 - x$, on sait que l'intégrale $\int_0^1 \ln(1 - x) dx$ est convergente et égale à $\int_0^1 \ln(t) dt$, elle-même égale à -1 .

D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $0 < 1$ et que les intégrales en jeu sont convergentes :

$$\int_0^1 \ln(1-x)dx \leq \int_0^1 \ln(-\ln(x))dx$$

Autrement dit :

$$\int_0^1 \ln(-\ln(x))dx \geq -1$$

Conclusion : $\mathbb{E}(T) \leq \frac{1}{\lambda}$.

12.e. Écrire en **Python** une fonction telle que l'exécution de **simule_T(a)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire T dans le cas où $\lambda = a$.

Voici :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def simule_T(a):
5     U=rd.random()
6     T=-1/a*np.log(-np.log(u))
7     return T
```

Petite remarque

Il est également possible d'utiliser le résultat de la question 11.a...

12.f. Écrire une fonction **Python** qui permet de renvoyer une valeur numérique approchée de $\mathbb{E}(T)$.

D'après la loi faible des grands nombres (en admettant que T possède une variance...), la moyenne empirique sur un grand nombre de réalisations indépendantes de T fournit une valeur approchée de $\mathbb{E}(T)$. D'où le programme suivant :

```
1 def esperance_T(a):
2     L=[simule_T(a) for k in range(10000)]
3     return np.mean(T)
```

Petite remarque

Il est également possible de sommer les valeurs de T au fur et à mesure, puis de diviser par 10000.

★★★★★★ FIN ★★★★★★

AIDE-MÉMOIRE Python

LISTES

- `[]` : Créer une liste vide
- `L[i:j]` : Désigne la liste composée des éléments de `L` dont les indices vont de `i` à `j-1`
- `L[i:j:pas]` : Désigne la liste composée des éléments de `L` d'indices `i`, `i+pas`, `i+2*pas`,... compris entre `i` et `j-1`
- `[a]*n` ou `n*[a]` : Créer une liste avec `n` fois l'élément `a`
- `L.append(a)` : Ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `L`
- `L1 + L2` : Concatène les deux listes `L1` et `L2`
- `len(L)` : Renvoie le nombre d'éléments de la liste `L`
- `del L[k]` : Supprime l'élément d'indice `k` de la liste `L`
- `L.count(a)` : Renvoie le nombre d'occurrences de `a` dans la liste `L`
- `L.remove(a)` : Enlève la première occurrence de la valeur `a` de la liste `L`
- `max(L)` : Renvoie le plus grand élément de la liste `L`
- `min(L)` : Renvoie le plus petit élément de la liste `L`
- `sum(L)` : Renvoie la somme de tous les éléments de la liste `L`
- `a in L` : Vaut `True` si `a` se trouve au moins une fois dans `L` et `False` sinon

MODULES MATHÉMATIQUES

NUMPY

`import numpy as np`

- `np.array(L)` : Transforme la liste `L` en vecteur ou matrice numpy
- `np.linspace(a,b,n)` : Crée un vecteur de `n` valeurs uniformément réparties entre `a` et `b` (inclus)
- `np.zeros([n,m])` : Crée la matrice nulle de taille `n × m`
- `np.zeros(n)` : Crée le vecteur nul de taille `n`

- `np.ones([n,m])` : Crée la matrice de taille $n \times m$ dont tous les coefficients valent 1
- `np.ones(n)` : Crée le vecteur de taille n dont tous les coefficients valent 1
- `np.eye(n)` : Crée la matrice identité de taille n
- `np.diag(L)` : Crée la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les éléments de la liste L
- `np.transpose(M)` : Renvoie la transposée de M
- `np.dot(M,P)` : Renvoie le produit matriciel MP
- `np.sum(M)` : Renvoie la somme de tous les éléments de M
- `np.prod(M)` : Renvoie le produit de tous les éléments de M
- `np.max(M)` : Renvoie le plus grand élément de M
- `np.min(M)` : Renvoie le plus petit élément de M
- `np.shape(M)` : Renvoie dans un couple le format de la matrice M
- `np.mean(M)` : Renvoie la moyenne des éléments de M
- `np.var(M)` : Renvoie la variance des éléments de M
- `np.std(M)` : Renvoie l'écart-type des éléments de M
- `np.median(M)` : Renvoie la médiane des éléments de M
- `np.cumsum(M)` : Renvoie la matrice des sommes cumulées (gauche à droite, haut à bas) des éléments de M
- `np.arange(a,b,eps)` : Renvoie la liste des flottants de a à b de pas constant eps
- `np.abs(x)` : Renvoie $|x|$
- `np.floor(x)` : Renvoie $\lfloor x \rfloor$
- `np.sqrt(x)` : Renvoie $\sqrt{x}$ si $x \geq 0$
- `np.log(x)` : Renvoie $\ln(x)$ si $x > 0$
- `np.exp(x)` : Renvoie e^x
- `np.e` : Renvoie e
- `np.pi` : Renvoie π

SOUS MODULE D'ALGÈBRE LINÉAIRE `LINALG` DE NUMPY

```
import numpy.linalg as al
```

- `al.inv(M)` : Renvoie l'inverse de la matrice carrée M si elle est inversible
- `al.eig(M)` : Si la matrice M est diagonalisable, renvoie un couple (D, P) où D est le vecteur des coefficients diagonaux d'une matrice diagonale semblable à M et P une matrice de passage associée
- `al.matrix_power(M,n)` : Renvoie la puissance n -ième de la matrice carrée M
- `al.matrix_rank(M)` : Renvoie le rang de la matrice M
- `al.solve(M,Y)` : Renvoie une solution de l'équation matricielle $MX = Y$ lorsque M est inversible

SOUS MODULE `RANDOM` DE NUMPY POUR LA SIMULATION PROBABILISTE

```
import numpy.random as rd
```

- `rd.random([r,s])` : Simule une réalisation d'une matrice $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme $\mathcal{U}([0; 1])$.
- `rd.randint(a,b,[r,s])` : Simule une réalisation d'une matrice $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\llbracket a; b-1 \rrbracket)$.
- `rd.binomial(n,p,[r,s])` : Simule une réalisation d'une matrice $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$
- `rd.geometric(p,[r,s])` : Simule une réalisation d'une matrice $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$
- `rd.poisson(a,[r,s])` : Simule une réalisation d'une matrice $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$
- `rd.exponential(a,[r,s])` : Simule une réalisation d'une matrice $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\frac{1}{a}\right)$
- `rd.normal(m,d,[r,s])` : Simule une réalisation d'une matrice $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale $\mathcal{N}(m, d^2)$.

Si le paramètre $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ est remplacé par $\mathbf{r}$, ces fonctions renvoient la réalisation d'un vecteur de longueur $\mathbf{r}$ correspondant à la loi en question, et si ce paramètre est omis, elles renvoient un seul coefficient suivant les mêmes contraintes.

SOUS MODULE GRAPHIQUE **PYLOT** DE **MATPLOTLIB**

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

- **plt.plot(X,Y,options)** : Crée la courbe des points définis par les listes **X**, abscisses, et **Y**, ordonnées suivant les options graphiques définies par la chaîne de caractères **options**
- **plt.bar(X,Y)** : Crée le diagramme en bâtons défini par les listes ou vecteurs **X**, abscisses et **Y**, ordonnées
- **plt.hist(X,Y,density=True)** : Crée l'histogramme de fréquences des valeurs définies par la liste **X**, **Y** étant soit le nombre de classes, soit les bornes des classes
- **plt.boxplot(X)** : Génère le diagramme en boîte basé sur le vecteur de données **X**
- **plt.axis('equal')** : Rend le repère orthonormé
- **plt.xlim(xmin,xmax)** : Fixe les bornes de l'axe des abscisses
- **plt.ylim(ymin,ymax)** : Fixe les bornes de l'axe des ordonnées
- **plt.show()** : Affiche le graphique