EXERCICE 1

♡ L'avis du chef ! ♡
Très bon exercice d'étude d'une suite d'intégrales, complet. Classique dans les méthodes mises en place.

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx$ et on a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx$.

1. 1.a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0;1],\ \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

♣ L'idée !
Décomposer le numérateur pour l'écrire comme combinaison linéaire de $2-x$ et $2+x$...

On a, pour tout $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-x^2} &= \frac{1}{(2-x)(2+x)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(2-x+2+x)}{(2-x)(2+x)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{2+x} + \frac{\frac{1}{4}}{2-x} \end{aligned}$$

✍ Rédaction
On peut se contenter de donner le résultat en remarquant qu'il convient.

Conclusion : on a $a = b = \dfrac{1}{4}$ et : $\forall x \in [0;1],\ \dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{\frac{1}{4}}{2-x} + \dfrac{\frac{1}{4}}{2+x}$.

1.b. En déduire que $u_0 = \dfrac{1}{4}\ln(3)$.

On a :

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx && \text{question précédente, licite car on intègre sur } [0;1] \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{4}}{2-x} + \frac{\frac{1}{4}}{2+x}\right)dx && \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2-x}dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2+x}dx \\ &= \frac{1}{4}\Big[-\ln(|2-x|)\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\Big[\ln(|2+x|)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\Big(-\ln(1)+\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\ln(3) \end{aligned}$$

Conclusion : $u_0 = \dfrac{1}{4}\ln(3)$.

2. Calculer u_1.

On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx \\ &= \frac{1}{-2}\int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2} \\ &= \frac{-1}{2}\Big[\ln(|4-x^2|)\Big]_0^1 \\ &= \frac{-1}{2}\Big(\ln(3)-\ln(4)\Big) \end{aligned}$$

Vérification
La réponse est donnée un peu plus bas dans l'énoncé, en question 3.b. En effet, la ligne 7 du programme nous informe que $u_1 = \ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, qui est bien égal au résultat obtenu...

Conclusion : $u_1 = \dfrac{\ln(4)-\ln(3)}{2}$.

3. 3.a. Pour tout entier naturel n, exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
4u_n - u_{n+2} &= 4\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2}dx \\
&= \int_0^1 x^n dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

3.b. Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin quelle renvoie la valeur de u_n à l'appel de **suite(n)**.

```
def suite(n):
    if (-1)**n==1:
        u=np.log(3)/4
        for k in range(2,n+1,2):
            u=4*u - ...
    else:
        u=np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range(3,n+1,2):
            u=4*u - ...
    return u
```

```
def suite(n):
    if (-1)**n==1: #si n est pair
        u=np.log(3)/4 #u0
        for k in range(2,n+1,2): #k va de 2 à n avec un pas de 2
            u=4*u-1/(k-1)
    else: # si n est impair
        u=np.log(2/np.sqrt(3)) #u1
        for k in range(3,n+1,2): #k va de 3 à n avec un pas de 2
            u=4*u-1/(k-1)
    return u
```

➠Réflexe !

On a une relation liant u_{n+2} à u_n... Dans le programme, la lettre **k** désigne le **rang du terme calculé**, autrement dit, **k** joue le rôle de u_{n+2}.
On pense donc à réécrire la relation de la question précédente :

$$\forall k \geqslant 2,\ u_k = 4u_{k-2} - \frac{1}{k-1}$$

AUTRE MÉTHODE...

On peut également proposer un programme qui ne distingue pas les cas pair/impair... Voici un programme que l'on peut adapter pour qu'ils convienne à toutes les suites récurrentes d'ordre 2 :

```
def suitebis(n):
    u=np.log(3)/4
    v=np.log(2/np.sqrt(3))
    if n==0:
        return u
    else:
        for k in range(2,n+1):
            u,v=v,4*u-1/(k-1)
        return v
```

4. 4.a. Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}$$

♣ Méthode !

Pour encadrer une intégrale, on cherche à encadrer l'intégrande.

- Soit $x \in [0;1]$. On a ainsi :

$$0 \leqslant x^2 \leqslant 1$$

D'où :

$$4 \geqslant 4 - x^2 \geqslant 3$$

Puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4-x^2} \leqslant \frac{1}{3}$$

Et comme $x^n \geqslant 0$ (car $x \geqslant 0$) :

$$\frac{1}{4}x^n \leqslant \frac{x^n}{4-x^2} \leqslant \frac{1}{3}x^n$$

Petite remarque
La décroissance de la fonction inverse sur $[3;4]$ suffit ici...

- On a ainsi établi :

$$\forall x \in [0;1], \ \frac{1}{4}x^n \leqslant \frac{x^n}{4-x^2} \leqslant \frac{1}{3}x^n$$

D'où, par croissance de l'intégrale, licite car les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0;1]$ et que $0 \leqslant 1$ (bornes dans l'ordre croissant) :

$$\frac{1}{4}\int_0^1 x^n dx \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 x^n dx$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{3(n+1)}$

4.b. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On sait que :

✓ d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{3(n+1)}$

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3(n+1)} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4.c. La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

On sait que :

✓ $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant \dfrac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n,$

✓ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ est, à décalage d'indice près, une série de Riemann divergente (série harmonique) ;

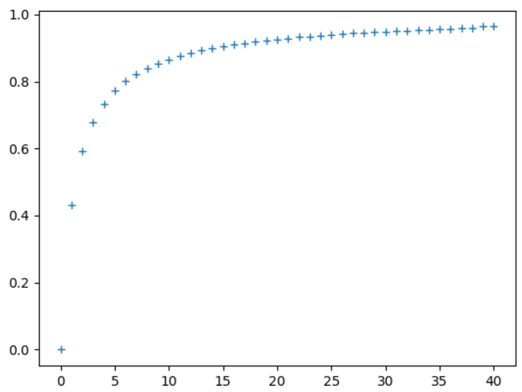
donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{4(n+1)}$ est également divergente.

Conclusion : par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

5. 5.a. On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```python
x=np.arange(0,41)
u=[] #liste vide
for n in range(41):
    u.append(3*n*suite(n))
plt.plot(x,u,'+')
plt.show()
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

$$❶\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n \quad ; \quad ❷\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \ ; \ ❸\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n} \ ; \ ❹\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

On sait que la commande `suite(n)` renvoie la valeur de u_n. Par conséquent, la liste `u` du programme précédent contient les termes de $3nu_n$ pour n allant de 0 à 40. Le graphique permet donc la conjecture suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} 3nu_n = 1$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{3n}} = 1$$

Conclusion : on émet la conjecture ❸ : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$.

Petite remarque
Le concepteur aurait pu choisir une autre lettre que **u** pour cette liste... Cela porte à confusion.
J'en profite pour rappeler que le choix des variables dans un code doit être le plus explicite possible !

5.b. Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_n = \int_0^1 x^n \times \frac{1}{4-x^2}\,dx$$

Posons : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} \\ v : x \longmapsto \frac{1}{4-x^2} \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left|\begin{array}{l} u'(x) = x^n \\ v'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \end{array}\right.$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\frac{1}{4-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1}x^{n+1} \times \frac{2x}{(4-x^2)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx$

☞ Rappel...
Si w est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{w}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{w}\right)' = \frac{-w'}{w^2}$.

5.c. Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx = 0$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - ⋆ Soit $x \in [0;1]$. On a, pour commencer :

$$4 \geqslant 4 - x^2 \geqslant 3$$

D'où, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$$16 \geqslant (4-x^2)^2 \geqslant 9$$

Puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^+_*$:

$$\frac{1}{16} \leqslant \frac{1}{(4-x^2)^2} \leqslant \frac{1}{9}$$

Et comme $x^{n+2} \geqslant 0$ (car $x \geqslant 0$) :

$$\frac{1}{16}x^{n+2} \leqslant \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \leqslant \frac{1}{9}x^{n+2}$$

  - ⋆ On a donc établi :

$$\forall x \in [0;1],\ \frac{1}{16}x^{n+2} \leqslant \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \leqslant \frac{1}{9}x^{n+2}$$

Par croissance de l'intégrale puis en calculant, on obtient finalement :

$$\frac{1}{16(n+3)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leqslant \frac{1}{9(n+3)}$$

♣ Méthode !
On veut obtenir une limite sur n par encadrement.
On va donc encadrer l'intégrande par **des expressions dépendants de n** dont il sera aisé de calculer l'intégrale...
Si besoin, on peut s'aider de ce qui a été fait en question 4.a !

Petite remarque
• La croissance de $.^2$ sur $[3;4]$ suffit ici...
• La décroissance de la fonction $\frac{1}{\cdot}$ sur $[9;16]$ suffit ici...

- On a ainsi :
  ✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{16(n+3)} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leqslant \dfrac{1}{9(n+3)}$
  ✓ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{16(n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{9(n+3)} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx = 0.$

5.d. Vérifier la conjecture établie à la question 5.a.

✓ **Rigueur !**
n doit être différent de 0 pour ce qui suit...

Soit $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{\frac{1}{3n}} &= 3n u_n \\ &= \frac{n}{n+1} - \frac{6n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \end{aligned}$$

question 5.b

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{6n}{n+1} = 6 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx = 0$$

D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} - \frac{6n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx = 1$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{3n}} = 1$$

Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$.

Exercice 2

> **♡ L'avis du chef ! ♡**
> On adore cet exercice, très proche de **EDHEC2011E**. A faire sans modération !

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.a. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

- De façon immédiate : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.
- ⋆ Sur $]-\infty; 0[$: f est continue car constante.
  ⋆ Sur $[0; +\infty[$: f est continue comme produit de deux fonctions continues sur $[0; +\infty[$.
  f est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

> **Petite remarque**
> En fait, f est continue en 0.

- ⋆ $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ est convergente et vaut 0.
  ⋆ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
  Soit $B \in [0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^B f(x)dx &= \int_0^B x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^B \\ &= 1 - e^{-\frac{B^2}{2}} \end{aligned}$$

  Or :

$$\lim_{B \to +\infty} e^{-\frac{B^2}{2}} = 0$$

  Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et vaut 1.

> **Conclusion :** f peut être considérée comme une densité.

1.b. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Notons Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On sait que Z possède une espérance et une variance et que : $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $\mathbb{V}(Z) = 1$.
Or, d'après la formule du Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) + \mathbb{E}(Z)^2$$

> **Conclusion :** si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$, alors $\mathbb{E}(Z^2) = 1$.

1.c. En déduire, par des considérations de parité, que X a une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

- On sait que :

  X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ est absolument convergente
  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)dx$ est convergente, car l'intégrande est nulle sur $]-\infty; 0[$ et positive sur $[0; +\infty[$
  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ est convergente

- Or, on sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ est convergente, puisqu'il s'agit du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite (par théorème de transfert, licite car la fonction carrée est continue sur $\mathbb{R}$).
  En particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ est convergente.

> **✓ Rigueur !**
> La mention du théorème de transfert n'est clairement pas un attendu dans cette question.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx && \text{par parité de } x \longmapsto x^2e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx && \text{avec } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathbb{E}(Z^2) && \text{question précédente} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. On note F_X la fonction de répartition de X. Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < 0$ ou $x \geqslant 0$.

On peut considérer que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

- Si $x < 0$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\
&= \mathbb{P}(\varnothing) && X(\Omega) = \mathbb{R}^+ \text{ et } x < 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt && X \text{ est à densité, de densité } f \\
&= \int_0^{x} f(t)dt && f \text{ est nulle sur }]-\infty;0[\\
&= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} && \text{calcul fait en question 1.a}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

3. Simulation.

3.a. On pose $Z = X^2$ et on note F_Z sa fonction de répartition. Déterminer $F_Z(x)$ dans chacun des cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$ et montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

★ Classique ! ★

On soigne bien la rédaction et on mentionne bien tous les arguments nécessaires dans cette question très classique...

- On a immédiatement $Z(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x < 0$:
    De la même façon qu'en question précédente, on a $F_Z(x) = 0$.
  - ⋆ Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbb{P}\big([Z \leqslant x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X^2 \leqslant x]\big) && x \geqslant 0 \\
&= \mathbb{P}\big([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]\big) && X \text{ est à densité} \\
&= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) && \text{question précédente, sachant que } \sqrt{x} \geqslant 0 \text{ et } -\sqrt{x} \leqslant 0 \\
&= 1 - e^{-\frac{\sqrt{x}^2}{2}} - 0 \\
&= 1 - e^{-\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : Z suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

3.b. Utiliser la question 3.a pour écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX()` qui renvoie une simulation de X.

On a $Z = X^2$, donc, puisque $|X| = \sqrt{Z}$. Mais X est à valeurs positives, donc :

$$X = \sqrt{Z}$$

On propose donc :

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def simulX():
    Z=rd.exponential(2) #on saisit l'espérance, par le paramètre
    X=np.sqrt(Z)
    return X
```

✘ Attention !
Si $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, en **Python**, le paramètre à saisir dans **rd.exponential(...)** est $\frac{1}{\lambda}$ (l'espérance).

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \dfrac{X}{\sqrt{n}}$ et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

4.a. Montrer que l'on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- On a immédiatement : $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x < 0$:
    De la même façon qu'en question 3.a, on a $G_n(x) = 0$.
  - ⋆ Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbb{P}\big([Y_n \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X}{\sqrt{n}} \leqslant x\right]\right) && \sqrt{n} > 0 \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant \sqrt{n}x]\big) \\ &= F_X(\sqrt{n}x) && \text{question 2, sachant que } \sqrt{n}x \geqslant 0 \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{n}x)^2}{2}} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Petite remarque
Un peu répétitif, et pas très intéressant...

4.b. Etudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

- Si $x < 0$:
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = 0$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$$

- Si $x > 0$:
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}}$.
  Or $x > 0$, donc $x^2 > 0$ et ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{nx^2}{2} = -\infty$.
  Par composition, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}} = 1$$

  Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 1$$

✘ Attention !
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-nx^2}{2} \neq -\infty$ si $x = 0$...
D'où cette disjonction de cas.

On a donc établi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$$

où $G : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Conclusion : la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi certaine égale à 0.

✘ Attention !
G désigne la fonction de répartition de la loi limite, elle doit donc être :
- définie sur $\mathbb{R}$,
- continue à droite en tout réel !

Il est donc nécessaire de définir $G(0)$; et il est nécessaire que $G(0) = 1$ pour assurer la continuité par la droite en 0 de G...

Rappel sur la convergence en loi

On rappelle la définition de convergence en loi :

Soient X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_X la fonction de répartition de X et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n.
On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en loi vers X** lorsque, **pour tout x où F_X est continue**, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

C'est cette définition qui rend les choses parfois un peu pénibles...

- Si l'on connaît la loi limite, alors la disjonction de cas se fait en fonction de la continuité de la fonction de répartition associée.
- En revanche, lorsque l'on ne connaît pas cette loi limite, c'est un peu plus compliqué, puisqu'il faut anticiper la disjonction de cas. Et, dans ce cas, il faut définir de façon complète la fonction de répartition de la loi limite, même si la disjonction de cas exclut quelques cas, comme c'est le cas ici.

4.c. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|Y_n| > \varepsilon]\big) = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([|Y_n| > \varepsilon]\big) &= 1 - \mathbb{P}\big([|Y_n| \leqslant \varepsilon]\big) && \varepsilon > 0 \\
&= 1 - \mathbb{P}\big([-\varepsilon < Y_n < \varepsilon]\big) && Y_n \text{ est à densité (car } G_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0) \\
&= 1 - \big(G_n(\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)\big) && \text{question 4.a, sachant que } \varepsilon > 0 \text{ et } -\varepsilon < 0 \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}
\end{aligned}$$

Petite remarque

On peut également utiliser l'inégalité de Markov pour démontrer le résultat demandé. Mais le programme officiel stipule que l'inégalité de Markov n'est pas exigible. Faisons donc sans !

Or $\varepsilon > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{n\varepsilon^2}{2} = -\infty$. Par composition, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}} = 0$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|Y_n| > \varepsilon]\big) = 0$$

Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|Y_n| > \varepsilon]\big) = 0$.

☞ Pour info...

La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en probabilités** (vocabulaire HP en appli) vers une variable aléatoire suivant la loi certaine égale à 0.

5. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

5.a. Exprimer, pour tout réel x, $\mathbb{P}\big([M_n > x]\big)$ à l'aide de la fonction F_X, puis en déduire que M_n suit la même loi que la variable aléatoire Y_n présentée à la question 4.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([M_n > x]\big) &= \mathbb{P}\big([\min(X_1, \dots, X_n) > x]\big) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]\right) && \text{indépendance mutuelle de } X_1, \dots, X_n \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_i > x]\big) && X_1, \dots, X_n \text{ ont toutes la même loi que } X \\
&= \prod_{i=1}^{n} \big(1 - F_X(x)\big) \\
&= \big(1 - F_X(x)\big)^n
\end{aligned}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([M_n \leqslant x]\big) &= 1 - \mathbb{P}\big([M_n > x]\big) && \text{point précédent} \\
&= \big(1 - F_X(x)\big)^n && \text{question 2} \\
&= \begin{cases} 1 - \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - (1 - 0) & \text{si } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \\
&= G_n(x)
\end{aligned}$$

♡ Astuce du chef ! ♡

On continue de travailler sans disjonction de cas, et il suffira simplement de remplacer toute l'expression de $F_X(x)$ en fonction des cas. C'est moins lourd, et cela se prête très bien pour les calculs.

Puisque la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que M_n et Y_n suivent la même loi.

Conclusion : M_n et Y_n suivent la même loi.

5.b. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie une simulation de M_n à l'appel de **simulM(n)**.

```
def simulM(n):
    X=np.array([...... for k in range(n)])
    M=......
    return M
```

```
def simulM(n):
    X=np.array([simulX() for k in range(n)])
    M=min(X)
    return M
```

Petite remarque

Là encore, on déplore le choix de la lettre **X** pour désigner un tableau de n réalisations de X... Et on peut se demander pourquoi l'énoncé propose de convertir une liste en tableau **numpy** : rien de mieux pour embrouiller les candidats.
On aurait d'ailleurs pu demander aux candidats d'écrire un programme en entier et non d'en compléter un.

Exercice 3

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt \tag{1}$$

1. Montrer que l'égalité (1) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du \tag{2}$$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons le changement de variable $u = x - t$ dans l'intégrale $\int_0^x tf(x-t)dt$:

$$\left| \begin{array}{ll} u & = x - t \\ t & = x - u \end{array} \right. \quad ; \quad \left| \begin{array}{ll} du & = -dt \\ dt & = -du \end{array} \right. \quad ; \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t = & 0 & x \\ \hline u = & x & 0 \\ \hline \end{array}$$

Ce changement de variable est bien licite, puisque la fonction $u \longmapsto x - u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0; x]$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^x tf(x-t)dt &= \int_x^0 (x-u)f(u)(-du) \\ &= \int_0^x (x-u)f(u)du \end{aligned}$$

- On a donc établi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x (x-u)f(u)du$$

Ainsi :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt\right) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du\right)$$

Conclusion : (1) $\iff$ (2).

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

2.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^x f(u)du$$

D'après la question précédente, on a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du \\ &= 1 + x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du \end{aligned}$$

linéarité de l'intégrale

Ensuite :

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \longmapsto \int_0^x f(u)du$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à f ;
- la fonction $\mathrm{id} \times f$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \longmapsto \int_0^x uf(u)du$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à $\mathrm{id} \times f$.

La fonction f est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme produit et somme de telles fonctions, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) \\ &= \int_0^x f(u)du \end{aligned}$$

Conclusion : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^x f(u)du$.

♡ L'avis du chef ! ♡
Très bon exercice, pas si simple, mêlant intégrales et équations différentielles.

Petite remarque
On pourrait se contenter de dire que le changement de variable est licite car affine.

★Subtil...★
Si on pose $u = g(t)$, g doit être bijective et c'est la fonction g^{-1} qui doit être $\mathscr{C}^1$...
Pour ne pas se tromper, on devrait toujours poser $t = \ldots$ même si c'est parfois moins naturel !

✘ Attention !
On ne peut pas procéder directement comme on le fait habituellement pour des fonctions définies par une intégrale puisque la variable x se situe également dans l'intégrande... on commence donc par découper !

2.b. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$$

D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^x f(u)du$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(u)du$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à f.
Par conséquent : f' est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, autrement dit f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = f(x)$$

Conclusion : f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(x)$.

Et ça continue...
Puisque $f'' = f$ et que f est $\mathscr{C}^2$, on en déduit que f'' est $\mathscr{C}^2$, donc f est $\mathscr{C}^4$... En réitérant, on obtient que f est $\mathscr{C}^6$, $\mathscr{C}^8$.... donc f est en fait $\mathscr{C}^\infty$.

2.c. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.
L'équation $f'' - f = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène, d'équation caractéristique $r^2 - r = 0$ dont les solutions sont 1 et -1.
Il existe donc des réels a et b, que nous considérons ensuite, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{x}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de $f'' = f$ est $\left\{x \longmapsto a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{x},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Petite remarque
C'est une question d'application directe du cours : il faut la traiter, et la traiter correctement !

2.d. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

- En évaluant la relation (1) avec $x = 0$, on obtient :

$$f(0) = 1$$

- En évaluant la relation obtenue en question 2.a avec $x = 0$, on obtient :

$$f'(0) = 0$$

Par conséquent, si f est solution de (1), on a, d'après les questions précédentes :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{x} \quad ; \quad f(0) = 1 \quad ; \quad f'(0) = 0$$

On obtient ainsi les conditions suivantes sur a et b :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$a = b = \frac{1}{2}$$

Et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Conclusion : si f est solution de (1), alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2}$.
Le problème initial a donc au plus une solution, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2}$.

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2.d est la seule solution du problème posé en début d'exercice.
On sait que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2}$ est la seule solution possible du problème initial. Pour montrer que c'est la seule solution, il suffit donc de vérifier qu'elle est bien solution du problème initial.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

☞ Pour info...
L'énoncé a détaillé un raisonnement par analyse-synthèse. L'analyse fait l'objet de toute la question 2 et la synthèse est à faire dans cette question pour conclure.

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x (x-u)\frac{\mathrm{e}^{-u} + \mathrm{e}^{u}}{2} du &= 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-u)\left(\mathrm{e}^{-u} + \mathrm{e}^{u}\right) du \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(\left[(x-u)\left(-\mathrm{e}^{-u} + \mathrm{e}^{u}\right)\right]_0^x - \int_0^x -\left(-\mathrm{e}^{-u} + \mathrm{e}^{u}\right) du\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(0 + \int_0^x \left(-\mathrm{e}^{-u} + \mathrm{e}^{u}\right) du\right) \end{aligned}$$

intégration par parties, licite car les fonctions en jeu sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;x]$ (ou $[x;0]$)

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-u} + \mathrm{e}^{u}\right]_0^x \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} - 2\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2}
\end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2}$ vérifie ainsi la relation (2), et d'après la question 1, vérifie donc la relation (1).

Conclusion : la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2}$ est la seule solution du problème initial.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x t f(x-t)\,dt$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

- En procédant comme en question 1, cette nouvelle équation est équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x (x-u) f(u)\,du$$

- **Analyse :**
  - ⋆ Les questions 2.a, 2.b et donc 2.c sont encore valables (les équations ne diffèrent entre elles que par une constante...).
  - ⋆ On a maintenant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
  - ⋆ Et on trouve ainsi, avec les notations précédemment utilisées : $a = b = 0$.

  Par conséquent, la seule fonction possible est la fonction constante nulle.
- **Synthèse :** la fonction constante nulle convient...

Conclusion : ce nouveau problème possède une unique solution : la fonction constante nulle.

Exercice 4

♡ **L'avis du chef !** ♡
Très classique, plutôt bien pour s'entraîner sur les chaînes de Markov, même s'il est parfois trop détaillé et/ou un peu lourd...

Dans ce problème on identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.
On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)$-ième épreuve.
On pose : $a_n = \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$, $b_n = \mathbb{P}\big([X_n = 1]\big)$, $c_n = \mathbb{P}\big([X_n = 2]\big)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

1. 1.a. Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

> **Conclusion :** $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.

Petite remarque
Aucune justification n'est attendue lorsque l'énoncé mentionner "donner".

1.b. Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1.

- Puisqu'il y a, au total, 2 boules blanches, on a : $X_1(\Omega) \subset [\![0;2]\!]$.
- Ensuite :
  - ⋆ On a :
    $[X_1 = 0]$ est réalisé si, et seulement si, l'urne A ne contient aucune boule blanche à l'issue de la première épreuve
    si, et seulement si, on a tiré la boule blanche dans l'urne A et la boule noire dans l'urne B

    Par indépendance des tirages dans les deux urnes et équiprobabilité du choix de la boule dans chaque urne, on obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Rédaction
Je fais le choix de ne pas introduire d'évènements pour décrire l'évènement $[X_1 = 0]$. Si on souhaite le faire, on peut par exemple noter $N_{A,k}$ l'évènement "tirer la boule noire dans l'urne A lors de la k-ième épreuve" et de même $N_{B,k}$.
Dès lors : $[X_1 = 0] = \overline{N_{A,1}} \cap N_{B,1}$...

  - ⋆ On a :
    $[X_1 = 1]$ est réalisé si, et seulement si, l'urne A contient une seule boule blanche à l'issue de la première épreuve
    si, et seulement si, on a tiré la boule blanche dans l'urne A et la boule blanche dans l'urne B ou on a tiré la boule noire dans l'urne A et la boule noire dans l'urne B

    Par incompatibilité de ces deux évènements, puis indépendance des tirages dans les deux urnes et équiprobabilité du choix de la boule dans chaque urne, on obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 = 1]\big) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
  - ⋆ De la même façon, on trouve :
$$\mathbb{P}\big([X_1 = 2]\big) = \frac{1}{4}$$

> **Conclusion :** finalement $X_1(\Omega) = [\![0;2]\!]$ et la loi de X_1 est donnée par :

valeurs prises par X_1	0	1	2
probabilités	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1.c. Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\big([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\big)$ est un système complet d'évènements.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisqu'il n'y a que deux boules blanches dans l'ensemble des deux urnes, on a :
$$X_n(\Omega) \subset [\![0;2]\!]$$

Petite remarque
Il n'est même pas nécessaire d'avoir l'égalité pour conclure : au pire, certains évènements sont vides, ce qui n'est pas exclu pour un SCE.

> **Conclusion :** pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\big([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\big)$ est un système complet d'évènements.

1.d. En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$:
  On sait déjà que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$...

- Si $n \geqslant 1$:
  D'après la question précédente, $\big([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\big)$ est un système complet d'évènements. Ainsi :
  $$\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) = 1$$
  Autrement dit :
  $$a_n + b_n + c_n = 1$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$.

♡ L'avis du chef ! ♡

Les questions 1.c et 1.d ont bien peu d'intérêt ; et c'est toujours un peu déroutant lorsque l'énoncé demande d'établir des résultats qui sont relativement immédiats...

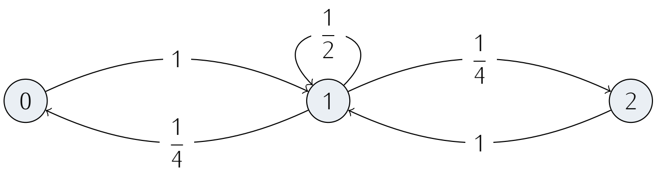
On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

Important !

On apprécie cette remarque de l'énoncé, afin de justifier l'existence des probabilités conditionnelles demandées en question suivante, ce qui évite au candidat de devoir le faire.

2. Soit n un entier naturel non nul.

   2.a. Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{[X_n=i]}\big([X_{n+1} = j]\big)$, pour tout $(i, j) \in [\![0; 2]\!]^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



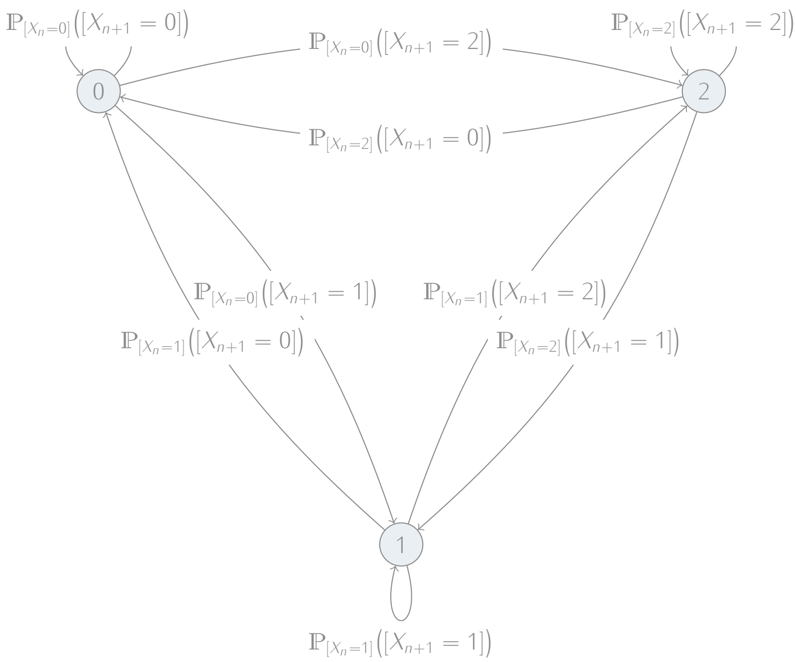
- Supposons l'évènement $[X_n = 0]$ réalisé. Autrement dit, l'urne A contient 2 boules noires avant la $(n+1)$-ième épreuve, et l'urne B deux boules blanches.
  Dans ce cas : lors du $(n+1)$-ième tirage, la seule possibilité est de tirer une boule noire dans l'urne A et une boule blanche dans l'urne B. Et donc, avant le $(n+2)$-ième tirage, l'urne A sera nécessairement composée d'une boule noire et une boule blanche, tout comme l'urne B. D'où :
  $$\mathbb{P}_{[X_n=0]}\big([X_{n+1} = 0]\big) = 0 \quad ; \quad \mathbb{P}_{[X_n=0]}\big([X_{n+1} = 1]\big) = 1 \quad ; \quad \mathbb{P}_{[X_n=0]}\big([X_{n+1} = 2]\big) = 0$$
- Supposons l'évènement $[X_n = 1]$ réalisé. Autrement dit, l'urne A contient une boule blanche et une boule noire avant la $(n+1)$-ième épreuve, tout comme l'urne B.
  Dans ce cas, en raisonnant comme en question 1.b, on trouve :
  $$\mathbb{P}_{[X_n=1]}\big([X_{n+1} = 0]\big) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}_{[X_n=1]}\big([X_{n+1} = 1]\big) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}_{[X_n=1]}\big([X_{n+1} = 2]\big) = \frac{1}{4}$$

Petite remarque

Tout l'intérêt d'avoir suffisamment détaillé le raisonnement en question 1.b...

- Supposons l'évènement $[X_n = 2]$ réalisé. Autrement dit, l'urne A contient 2 boules blanches avant la $(n+1)$-ième épreuve, et l'urne B deux boules noires.
  Dans ce cas : lors du $(n+1)$-ième tirage, la seule possibilité est de tirer une boule blanche dans l'urne A et une boule noire dans l'urne B. Et donc, avant le $(n+2)$-ième tirage, l'urne A sera nécessairement composée d'une boule noire et une boule blanche, tout comme l'urne B. D'où :
  $$\mathbb{P}_{[X_n=2]}\big([X_{n+1} = 0]\big) = 0 \quad ; \quad \mathbb{P}_{[X_n=2]}\big([X_{n+1} = 1]\big) = 1 \quad ; \quad \mathbb{P}_{[X_n=2]}\big([X_{n+1} = 2]\big) = 0$$

De façon générale, pour une chaîne de Markov homogène à 3 états, on a :



D'où le graphe donné avec les probabilités trouvées...

2.b. Écrire la matrice de transition $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![0;2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=i]}\big([X_{n+1}=j]\big)$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifier avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.

> **Conclusion :** $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.c. Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

- D'après la formule des probabilités totales avec $\big([X_n=0],[X_n=1],[X_n=2]\big)$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_{n+1}=0]\big) &= \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}\big([X_n=i]\cap[X_{n+1}=0]\big) \\
&\qquad \text{$\mathbb{P}([X_n=0])$, $\mathbb{P}([X_n=1])$ et $\mathbb{P}([X_n=2])$ sont non nulles d'après l'énoncé} \\
&= \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}\big([X_n=i]\big)\mathbb{P}_{[X_n=i]}\big([X_{n+1}=0]\big) \\
&\qquad \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{4} b_n
\end{aligned}$$

- On procède de la même façon pour b_{n+1} et c_{n+1}...

> **Conclusion :** $a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$, $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$.

3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2.c restent valables pour $n = 0$.

- On sait que $a_0 = 0$, $n_0 = 1$ et $c_0 = 0$.
- On sait également que $a_1 = \frac{1}{4}$, $b_1 = \frac{1}{2}$ et $c_1 = \frac{1}{4}$.

Ainsi, on a :

$$a_1 = \frac{1}{4}b_0 \quad ; \quad b_1 = a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 \quad ; \quad c_1 = \frac{1}{4}b_0$$

> **Conclusion :** les relations trouvées à la question 2.c restent valables pour $n = 0$.

4. 4.a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $X_{n+1}(\Omega)$ est fini, X_{n+1} possède une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{k\in X_{n+1}(\Omega)} k\mathbb{P}\big([X_{n+1}=k]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{2} k\mathbb{P}\big([X_{n+1}=k]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X_{n+1}=1]\big) + 2\mathbb{P}\big([X_{n+1}=2]\big) \\
&= b_{n+1} + 2c_{n+1}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}$.

4.b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En débutant par la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= b_{n+1} + 2c_{n+1} \\
&\qquad \text{question 2.c, valable quand $n=0$ d'après la question 3} \\
&= a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n + 2 \times \frac{1}{4}b_n \\
&= a_n + b_n + c_n \\
&\qquad \text{question 1.d} \\
&= 1
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1$.

4.c. Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n + 2c_n = 1$$

D'après les deux questions précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} + 2c_{n+1} = 1$$

Autrement dit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k + 2c_k = 1$$

Et on a aussi $b_0 + 2c_0 = 1 + 2 \times 0 = 1$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n + 2c_n = 1$.

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5.a. Montrer que la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1}V &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} && \text{en identifiant réel et matrice de } \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \\ &= 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} && \text{question 2.c, valable quand } n = 0 \text{ d'après la question 3} \\ &= \frac{1}{2}b_n - a_n - \frac{1}{2}b_n - c_n + \frac{1}{2}b_n \\ &= -a_n + \frac{1}{2}b_n - c_n \\ &= \frac{-1}{2}(2a_n - b_n + 2c_n) \\ &= \frac{-1}{2}U_n V \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$ et de premier terme $U_0 V = -1$.

Petite remarque
Il ne faut pas avoir peur des formulations un peu inhabituelles. En calculant $U_n V$, on remarque qu'il suffit de montrer que la suite $(2a_n - b_n + 2c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique...

Réflexe !
On précise le premier terme, comme ça, c'est fait !

Autre méthode, moins dans l'esprit de l'exercice...

Même si la méthode qui suit n'est pas dans l'esprit de l'exercice, rien ne nous empêche de l'utiliser...
Soit $n \in \mathbb{N}$. on sait que :

$$U_{n+1} = U_n M$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} U_{n+1}V &= U_n M V && \text{après calcul, on trouve } MV = \frac{-1}{2}V \\ &= \frac{-1}{2}U_n V \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$ et de premier terme $U_0 V = -1$.

Pourquoi ?
Il s'agit d'une propriété du cours sur les chaînes de Markov (que l'on demande de redémontrer en question 8.e...).

5.b. Pour tout entier naturel n, en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n.

Conclusion : d'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Vérification
On vérifie le résultat pour $n = 0$ et $n = 1$...

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions 1.d, 4.c et 5.b, on a :

Réflexe !
3 inconnues... il nous faut 3 équations linéaires !

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1 \\ & & b_n & + & 2c_n & = & 1 \\ 2a_n & - & b_n & + & 2c_n & = & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2 \end{array}\right.$$

Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1 \\ & & b_n & + & 2c_n & = & 1 \\ 2a_n & - & b_n & + & 2c_n & = & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1 \\ & & b_n & + & 2c_n & = & 1 \\ & - & 3b_n & & & = & -\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 + L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} 3a_n & & & + 3c_n & = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ & & & 6c_n & = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ & - & 3b_n & & = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} 6a_n & = & 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ 6c_n & = & 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ 3b_n & = & -\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - 2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & \dfrac{1}{6}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) \\ b_n & = & \dfrac{1}{3}\left(2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) \\ c_n & = & \dfrac{1}{6}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) \end{array} \right.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & \dfrac{1}{6}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) \\ b_n & = & \dfrac{1}{3}\left(2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) \\ c_n & = & \dfrac{1}{6}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) \end{array} \right.$.

7. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

Puisque $\dfrac{-1}{2} \in]-1;1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{6} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{6}$$

Conclusion : la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant :

valeurs prises par X	0	1	2
probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

✔ Pour s'entraîner...

On peut déterminer les états stables de la chaîne de Markov ; on en trouve un seul : $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

8.a. Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.

On trouve :

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad ; \quad M^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & & & \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Conclusion : $2M^3 = M^2 + M$.

8.b. En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

- De la question précédente, on déduit que le polynôme $2X^3 - X^2 - X$ est annulateur de M.
  Or $2X^3 - X^2 - X = X(2X^2 - X - 1)$ et on trouve ainsi que les racines de $2X^3 - X^2 - X$ sont 0, 1 et $\dfrac{-1}{2}$. Par conséquent :

  $$\mathrm{Sp}(M) \subset \left\{\frac{-1}{2}; 0; 1\right\}$$

  Dans la suite, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, on notera $E_\lambda(M)$ l'espace propre de M associé à la valeur propre λ.

- Pour 0 :
  - ⋆ On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(M) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) && C_1 = C_3 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) && \text{la famille } \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On en déduit que 0 est valeur propre de M et par théorème du rang :

$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \dim\left(\ker(M)\right) + \mathrm{rg}(M)$$

♣ Méthode !

On peut également, pour tout $\lambda \in \left\{\frac{-1}{2}; 0; 1\right\}$, résoudre $MX = \lambda X$ pour montrer que λ est valeur propre de M et déterminer une famille génératrice de $E_\lambda(M)$...

Ainsi :

$$\dim\left(\ker(M)\right) = 1$$

⋆ Ensuite, on remarque que $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(M)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille de $E_0(M)$ qui est :

✓ libre car constituée d'une unique vecteur non nul,

✓ de cardinal 1, égal à $\dim\left(E_0(M)\right)$.

À retenir...

On avait remarqué que $C_1 = C_3$ dans la recherche du rang de M. Autrement dit : $-1 \times C_1 + 0 \times 1 \times C_2 = 0$. Cette relation sur les colonnes de M nous fournit une vecteur dans $\ker(M)$: pour cela, il suffit de remarquer que $-C_1 + C_3 = M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$...

> **Conclusion :** 0 est valeur propre de M et la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(M)$.

- Pour $-\dfrac{1}{2}$:
  On procède de la même façon...

> **Conclusion :** $\dfrac{-1}{2}$ est valeur propre de M et la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1/2}(M)$.

- Pour 1 :
  On procède de la même façon...

♡ Astuce du chef ! ♡

On peut aller plus vite pour les deux autres valeurs propres, après avoir parfaitement détaillé la première. On remercie au passage l'énoncé de nous fournir les résultats en donnant la matrice P à la question suivante...

> **Conclusion :** 1 est valeur propre de M et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(M)$.

8.c. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.

On sait qu'une concaténation de familles libres de vecteurs propres de M associées à des valeurs propres différentes est encore une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, d'après la question précédente, la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre (car concaténation de bases de vecteurs propres associées à des valeurs propres différentes), donc de rang 3.

> **Conclusion :** $\text{rg}(P) = 3$, donc P est inversible.

8.d. On pose $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD, puis conclure que M est diagonalisable.

On trouve :

$$MP = PD$$

D'où, puisque P est inversible :

$$M = PDP^{-1}$$

Petite remarque

S'il faut calculer MP et PD pour justifier que M est diagonalisable, à quoi bon avoir un cours sur la réduction de matrices ?!

> **Conclusion :** M est donc semblable à D, qui est diagonale, donc M est diagonalisable.

8.e. Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n M$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2.c :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}b_n & a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n & \frac{1}{4}b_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $U_{n+1} = U_n M$.

8.f. En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 M^n$$

Procédons par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $M^0 = I_3$, d'où le résultat. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = U_0 M^n$ et montrons que $U_{n+1} = U_0 M^{n+1}$.
  On a, en débutant avec la question précédente :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n M \\ &= U_0 M^n \times M && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= U_0 M^{n+1} \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 M^n$.

♡ L'avis du chef ! ♡
On pourrait s'attendre, à ce niveau de l'exercice, à ce que ce résultat ne soit pas donné et que l'énoncé demande directement la question suivante afin de mieux discriminer les candidats...

8.g. Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).

- Par récurrence immédiate, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P D^n P^{-1}$$
- Puisque D est diagonale, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- On obtient alors, en utilisant la question précédente l'expression de U_n en fonction de n en effectuant le calcul explicite de $P D^n P^{-1}$ (après avoir calculé P^{-1}).
- On obtient ainsi la loi de X_n...

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★