

## EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, la lettre  $n$  désigne un entier naturel.

On pose  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$  et on a en particulier  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$ .

1. 1.a. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall x \in [0; 1], \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

- 1.b. En déduire que  $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$ .

2. Calculer  $u_1$ .

3. 3.a. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $4u_n - u_{n+2}$  explicitement en fonction de  $n$ .

- 3.b. Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin quelle renvoie la valeur de  $u_n$  à l'appel de **suite(n)**.

```

1 def suite(n):
2     if (-1)**n==1:
3         u=np.log(3)/4
4         for k in range(2,n+1,2):
5             u=4*u-...
6     else:
7         u=np.log(2/np.sqrt(3))
8         for k in range(3,n+1,2):
9             u=4*u-...
10    return u
    
```

4. 4.a. Utiliser la définition de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

- 4.b. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi que la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

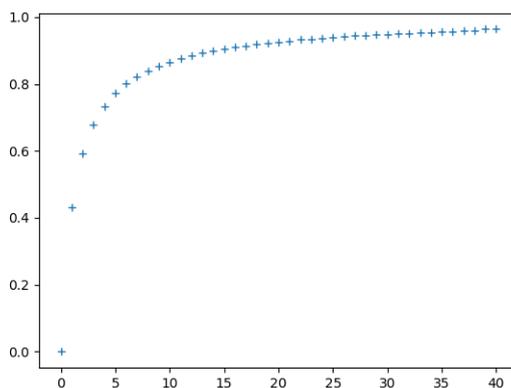
- 4.c. La série de terme général  $u_n$  est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5. 5.a. On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```

1 x=np.arange(0,41)
2 u=[] #liste vide
3 for n in range(41):
4     u.append(3*n*suite(n))
5 plt.plot(x,u,'+')
6 plt.show()
    
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au voisinage de  $+\infty$  ?

$$\textcircled{1} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3n \quad ; \quad \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad ; \quad \textcircled{3} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n} \quad ; \quad \textcircled{4} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

5.b. Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

5.c. Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$$

5.d. Vérifier la conjecture établie à la question 5.a.

## EXERCICE 2

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit  $f$  la fonction qui à tout réel  $x$  associe

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.a. Montrer que  $f$  peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire  $X$ .

1.b. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1.c. En déduire, par des considérations de parité, que  $X$  a une espérance et que  $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

2. On note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ . Déterminer  $F_X(x)$  selon que  $x < 0$  ou  $x \geq 0$ .

3. Simulation.

3.a. On pose  $Z = X^2$  et on note  $F_Z$  sa fonction de répartition. Déterminer  $F_Z(x)$  dans chacun des cas  $x < 0$  et  $x \geq 0$  et montrer que  $Z$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

3.b. Utiliser la question 3.a pour écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX()` qui renvoie une simulation de  $X$ .

4. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $Y_n = \frac{X}{\sqrt{n}}$  et on note  $G_n$  la fonction de répartition de  $Y_n$ .

4.a. Montrer que l'on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4.b. Étudier la convergence en loi de la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

4.c. Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

5. On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que  $X$ . Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

5.a. Exprimer, pour tout réel  $x$ ,  $\mathbb{P}([M_n > x])$  à l'aide de la fonction  $F_X$ , puis en déduire que  $M_n$  suit la même loi que la variable aléatoire  $Y_n$  présentée à la question 4.

5.b. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie une simulation de  $M_n$  à l'appel de `simulM(n)`.

```

1 def simulM(n):
2     X=np.array([..... for k in range(n)])
3     M=.....
4     return M

```

## EXERCICE 3

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt \tag{1}$$

1. Montrer que l'égalité (1) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du \tag{2}$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction  $f$ , continue sur  $\mathbb{R}$ , est solution de ce problème.

2.a. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u) du$$

2.b. En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x)$$

2.c. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

2.d. Déterminer  $f(0)$  et  $f'(0)$  puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2.d est la seule solution du problème posé en début d'exercice.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

## EXERCICE 4

Dans ce problème on identifie une matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  à un réel.

On considère deux urnes  $A$  et  $B$  contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de  $A$  étant remise dans  $B$  et la boule tirée de  $B$  étant remise dans  $A$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans  $A$  avant la  $(n+1)$ -ième épreuve.

On pose :  $a_n = \mathbb{P}([X_n = 0])$ ,  $b_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$ ,  $c_n = \mathbb{P}([X_n = 2])$  et  $U_n = (a_n \ b_n \ c_n)$ .

1. 1.a. Donner les valeurs de  $a_0$ ,  $b_0$  et  $c_0$ .

1.b. Déterminer la loi de  $X_1$  et en déduire les valeurs de  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ .

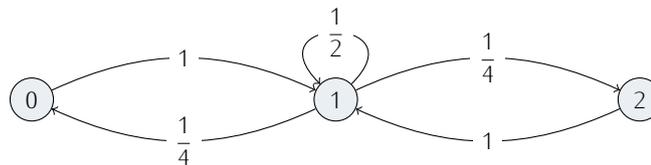
1.c. Justifier rapidement que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$  est un système complet d'évènements.

1.d. En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , la valeur de la somme  $a_n + b_n + c_n$ .

On admet dans la suite que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , les probabilités  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  sont non nulles.

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

2.a. Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles  $\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$ , pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket^2$ , puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



2.b. Écrire la matrice de transition  $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket^2}$ , où  $m_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$ , associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de  $M$  est égale à 1.

2.c. Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2.c restent valables pour  $n = 0$ .

4. 4.a. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $\mathbb{E}(X_{n+1})$  en fonction de  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$ .

4.b. En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1$ .

4.c. Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n + 2c_n = 1$$

5. On pose  $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

5.a. Montrer que la suite  $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique et donner sa raison.

5.b. Pour tout entier naturel  $n$ , en déduire explicitement  $2a_n - b_n + 2c_n$  en fonction de  $n$ .

6. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  puis donner la loi de  $X_n$ .

7. Montrer que la suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$  dont on déterminera la loi.

8. On se propose de retrouver la loi de  $X_n$  par une autre méthode.

8.a. Calculer  $M^2$  et  $M^3$ , puis vérifier que  $2M^3 = M^2 + M$ .

8.b. En déduire les valeurs propres de  $M$  et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

8.c. On pose  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Justifier sans calcul que  $P$  est inversible.

8.d. On pose  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $MP$  et  $PD$ , puis conclure que  $M$  est diagonalisable.

8.e. Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$$

8.f. En déduire la relation, valable pour tout entier naturel  $n$  :

$$U_n = U_0 M^n$$

8.g. Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de  $X_n$  à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).

---

★★★★★★ FIN ★★★★★★