

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$ et on a en particulier $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$.

1. 1.a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0; 1], \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

- 1.b. En déduire que $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$.

2. Calculer u_1 .

3. 3.a. Pour tout entier naturel n , exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n .

- 3.b. Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin quelle renvoie la valeur de u_n à l'appel de **suite(n)**.

```

1 def suite(n):
2     if (-1)**n==1:
3         u=np.log(3)/4
4         for k in range(2,n+1,2):
5             u=4*u-...
6     else:
7         u=np.log(2/np.sqrt(3))
8         for k in range(3,n+1,2):
9             u=4*u-...
10    return u
    
```

4. 4.a. Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

- 4.b. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

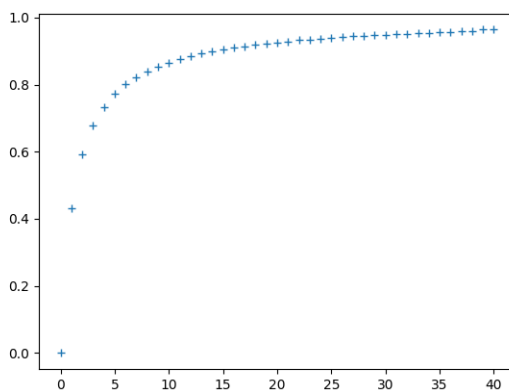
- 4.c. La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5. 5.a. On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```

1 x=np.arange(0,41)
2 u=[] #liste vide
3 for n in range(41):
4     u.append(3*n*suite(n))
5 plt.plot(x,u,'+')
6 plt.show()
    
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

$$\textcircled{1} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3n \quad ; \quad \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad ; \quad \textcircled{3} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n} \quad ; \quad \textcircled{4} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

5.b. Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

5.c. Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$$

5.d. Vérifier la conjecture établie à la question 5.a.

EXERCICE 2

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.a. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X .

1.b. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1.c. En déduire, par des considérations de parité, que X a une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. On note F_X la fonction de répartition de X . Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < 0$ ou $x \geq 0$.

3. Simulation.

3.a. On pose $Z = X^2$ et on note F_Z sa fonction de répartition. Déterminer $F_Z(x)$ dans chacun des cas $x < 0$ et $x \geq 0$ et montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

3.b. Utiliser la question 3.a pour écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX()` qui renvoie une simulation de X .

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \frac{X}{\sqrt{n}}$ et on note G_n la fonction de répartition de Y_n .

4.a. Montrer que l'on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{nx^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4.b. Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4.c. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

5. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X . Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

5.a. Exprimer, pour tout réel x , $\mathbb{P}([M_n > x])$ à l'aide de la fonction F_X , puis en déduire que M_n suit la même loi que la variable aléatoire Y_n présentée à la question 4.

5.b. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie une simulation de M_n à l'appel de `simulM(n)`.

```

1 def simulM(n):
2     X=np.array([..... for k in range(n)])
3     M=.....
4     return M

```

EXERCICE 3

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur \mathbb{R} et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt \tag{1}$$

1. Montrer que l'égalité (1) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du \tag{2}$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f , continue sur \mathbb{R} , est solution de ce problème.

2.a. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u) du$$

2.b. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x)$$

2.c. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

2.d. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2.d est la seule solution du problème posé en début d'exercice.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur \mathbb{R} et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

EXERCICE 4

Dans ce problème on identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.

On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A . Pour tout entier naturel n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)$ -ième épreuve.

On pose : $a_n = \mathbb{P}([X_n = 0])$, $b_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$, $c_n = \mathbb{P}([X_n = 2])$ et $U_n = (a_n \ b_n \ c_n)$.

1. 1.a. Donner les valeurs de a_0 , b_0 et c_0 .

1.b. Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1 , b_1 et c_1 .

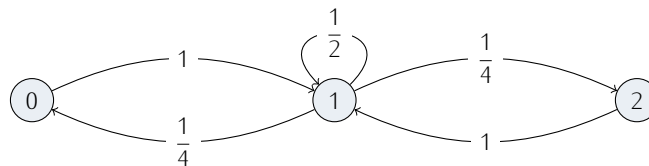
1.c. Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ est un système complet d'évènements.

1.d. En déduire, pour tout entier naturel n , la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.

On admet dans la suite que, pour tout n de \mathbb{N}^* , les probabilités a_n , b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.

2.a. Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



2.b. Écrire la matrice de transition $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket^2}$, où $m_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.

2.c. Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2.c restent valables pour $n = 0$.

4. 4.a. Pour tout n de \mathbb{N} , exprimer $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1} .

4.b. En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} , on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1$.

4.c. Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n + 2c_n = 1$$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5.a. Montrer que la suite $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.

5.b. Pour tout entier naturel n , en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n .

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , a_n , b_n et c_n puis donner la loi de X_n .

7. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

8.a. Calculer M^2 et M^3 , puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.

8.b. En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

8.c. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.

8.d. On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD , puis conclure que M est diagonalisable.

8.e. Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$$

8.f. En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 M^n$$

8.g. Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).

★★★★★★ FIN ★★★★★★