Exercice 1

> ♡ L'avis du chef ! ♡
> Un très bon exercice, très classique, sur les suites implicites. Parfait pour s'entraîner, dès la 1A, même s'il est parfois un peu trop guidé...

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$$

1. 1.a. Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est polynomiale, elle est donc dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} k^2 x^{k-1} \\ &\geqslant 1 \end{aligned}$$

$x \geqslant 0$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0;1],\ f_n'(x) > 0$$

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;1]$.

1.b. En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x, possède une seule solution, notée u_n, élément de $[0,1]$.

> ✍ Rédaction
> On rédige en deux temps :
> • le théorème de bijection appliqué à f_n
> • l'existence d'un unique antécédent de 1 par f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On sait que la fonction f_n est :
  - ✓ continue sur $[0;1]$ (car polynomiale),
  - ✓ strictement croissante sur $[0;1]$ (question précédente).

  Ainsi, par théorème de bijection, la fonction f_n est bijective de $[0;1]$ dans $f\left([0;1]\right)$.
  Or f est croissante sur $[0;1]$, donc
  $$f\left([0;1]\right) = [f(0); f(1)]$$
  Mais :
  $$f(0) = 0$$
  et
  $$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$
  Par conséquent, la fonction f_n est bijective de $[0;1]$ dans $\left[0; \dfrac{n(n+1)}{2}\right]$.

> **Important !**
> On veut une expression claire de l'intervalle image pour justifier que $1 \in f\left([0;1]\right)$. C'est indispensable pour conclure !

- Enfin, $n \geqslant 1$, donc $n(n+1) \geqslant 2$ et ainsi $1 \in \left[0; \dfrac{n(n+1)}{2}\right]$.
  Par conséquent, 1 possède un et un seul antécédent dans $[0;1]$ par f_n.

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution sur $[0;1]$, notée u_n.

1.c. Donner la valeur de u_1.

Par définition, u_1 est l'unique solution sur $[0;1]$ de l'équation $f_1(x) = 1$. Or, pour tout $x \in [0;1]$, $f_1(x) = x$...

> **Conclusion :** $u_1 = 1$.

2. 2.a. Pour tout réel x de $[0,1]$, exprimer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} kx^k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1} \\
&= f_n(x) + (n+1)x^{n+1}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0;1],\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + (n+1)x^{n+1}$.

2.b. En déduire que $f_{n+1}(u_n) \geqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, licite car $u_n \in [0;1]$:

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(u_n) &= f_n(u_n) + (n+1)u_n^{n+1} \\
&= 1 + (n+1)u_n^{n+1} && \text{par définition de } u_n,\ f_n(u_n) = 1 \\
&\geqslant 1 && u_n \geqslant 0 \text{ et } n+1 \geqslant 0, \text{ donc } (n+1)u_n^{n+1} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_n) \geqslant 1$.

2.c. Utiliser les variations de f_{n+1} pour conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$f_{n+1}(u_n) \geqslant 1$$

Mais, par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$... D'où :

$$f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$$

Or f_{n+1} est strictement croissante sur $[0;1]$ (et $u_n, u_{n+1} \in [0;1]$) :

$$u_n \geqslant u_{n+1}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Important !
La **stricte** monotonie est nécessaire pour "désappliquer" une fonction sur une inégalité, qu'elle soit large ou stricte.

♡ L'avis du chef ! ♡
C'est un peu dommage que l'énoncé soit à ce point détaillé...

2.d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- ✓ décroissante (question précédente),
- ✓ minorée (par 0 par définition).

Conclusion : par théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
Et, comme pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]$, on a $\ell \in [0;1]$.

➠Réflexe !
Quand on a une minoration/majoration sur une suite convergente, on en obtient également une sur sa limite : cela ne coûte pas grand chose et peut ensuite servir. Autant le préciser...

Sur les suites implicites...

On peut résumer les suites implicites en deux cas :

(1) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions d'une équation $f(x) = v_n$, où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite connue et f une fonction **ne dépendant pas de n**.
Dans ce cas, après avoir démontré le caractère bijectif de f (sur un bon intervalle, permettant de définir u_n), on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f^{-1}(v_n)$$

Cette expression permet alors bien souvent d'obtenir variation et limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dans les annales :

- `Ecricome 2023 Appli - Exercice 2`
- `EDHEC 2021 E - Exercice 1`
- `EML 2020 E - Exercice 1` (on part d'une suite implicite définie comme dans second cas, mais on se ramène ensuite à ce cas-ci)

(2) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions d'une équation $f_n(x) = a$, où a est un réel **ne dépendant pas de n** et f_n une fonction dépendant de n.
Dans ce cas, l'étude du sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit très souvent le schéma suivant :

(a) comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ dans le but de comparer $f_n(u_n)$ et $f_{n+1}(u_n)$;
(b) puisque $f_n(u_n) = a = f_{n+1}(u_{n+1})$, on en déduit une comparaison de $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$;
(c) on en déduit une comparaison entre u_n et u_{n+1} à l'aide des variations de f_{n+1}.

Dans les annales :

- `Ecricome 2019 E - Exercice 2`
- `Ecricome 2008 E - Exercice 2`
- `EDHEC 2000 E - Exercice 3`

Dans les deux cas, il faut se laisser guider par l'énoncé qui donne souvent des pistes, et **revenir à l'égalité définissant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$** en cas de difficulté/doute !

3. 3.a. Pour tout réel $x \neq 1$, rappeler la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ en fonction de x et n.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \neq 1,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

3.b. En déduire que, pour tout réel x différent de 1, on a l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

Petite remarque

On peut également poser g : $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, dont la dérivée est encore la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$... Au choix !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $g : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

- La fonction g est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

- On sait également que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k - 1 \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

En dérivant sous cette forme, on a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

♡ Astuce du chef ! ♡

Pour simplifier les calculs, on n'utilise volontairement pas l'autre formule de somme géométrique donnant directement $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x^k$... On ne met pas non plus sur même dénominateur !

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \neq 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

3.c. Donner alors une expression sans symbole $\sum$ de $f_n(x)$ pour $x \in [0,1[$.

Ca fait plaisir !

On aime commencer en reconnaissant une des questions classiques !

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0;1[,\ f_n(x) = \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.

4. 4.a. Déterminer u_2 puis en déduire que, si n est supérieur ou égal à 2 , on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

- Par définition, u_2 est l'unique solution sur $[0;1]$ de l'équation $f_2(x) = 1$. Or, pour tout $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} f_2(x) = 1 &\iff 2x^2+x-1=0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \qquad x \in [0;1] \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $u_2 = \dfrac{1}{2}$.

- Par définition, on a déjà pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Et d'après la question 2.c, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ u_n \leqslant u_2$$

Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

4.b. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n^n$ et $\lim_{n\to+\infty} nu_n^n$.

- D'après la question précédente et par croissance, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la fonction $.^n$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 0 \leqslant u_n^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

> **Conclusion :** par théorème d'encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.

- En reprenant l'encadrement précédent, on obtient :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 0 \leqslant nu_n^n \leqslant n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc par croissances comparées, on a $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

> **Conclusion :** par théorème d'encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} nu_n^n = 0$.

4.c. En revenant à la définition de u_n, montrer, pour $n \geqslant 2$, l'égalité :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}$$

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Par définition de u_n, on a :

$$f_n(u_n) = 1$$

Autrement dit, d'après la question 3.c, licite car $n \geqslant 2$, donc $u_n \in [0;1[$:

$$\frac{nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1} + u_n}{(1-u_n)^2} = 1$$

D'où :

$$nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1} + u_n = (1-u_n)^2$$

Et donc :

$$nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1} = 1 - 2u_n + u_n^2 - u_n$$

> **Conclusion :** $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ u_n^2 - 3u_n + 1 = nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}$.

✓ Rigueur !

Quand on utilise un théorème ou une propriété, on en rappelle les hypothèses pour vérifier que l'on peut le faire. Quand on utilise un résultat précédent, on fait de même !

4.d. Donner finalement la valeur de ℓ.

D'après la question précédente, on a pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$:

$$\begin{aligned} u_n^2 - 3u_n + 1 &= nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1} \\ &= u_n^2 \times nu_n^n - u_n \times nu_n^n - u_n \times u_n^n \end{aligned}$$

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc en utilisant la question 4.b on obtient, par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^2 \times nu_n^n = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n \times nu_n^n = 0\ ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n \times u_n^n = 0$$

D'où, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\ell^2 - 3\ell + 1 = 0$$

L'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ possède deux solutions sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Or on sait que $\ell \in [0;1]$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2}$, donc $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin [0;1]$.

> **Conclusion :** $\ell = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2

♡ L'avis du chef ! ♡
Exercice très classique d'algèbre linéaire. A savoir traiter en entier… et même avec un peu moins d'aide de la part de l'énoncé !

On note E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels.

1. 1.a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a :

$$\begin{aligned} E &= \{M(a,b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{Vect}\big(M(1,0), M(0,1)\big) \end{aligned}$$

Et $M(1,0), M(0,1) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

> **Conclusion :** E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.b. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

La famille $\big(M(1,0), M(0,1)\big)$ est :
- ✓ génératrice de E d'après la question précédente,
- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

> **Conclusion :** la famille $\big(M(1,0), M(0,1)\big)$ est une base de E et donc $\dim(E) = \mathrm{Card}\big(M(1,0), M(0,1)\big) = 2$.

2. Justifier sans calcul que les matrices de E sont diagonalisables mais pas inversibles.

- Remarquons que les matrices de E sont symétriques (à coefficients réels), donc sont diagonalisables.
- Remarquons également que les colonnes 1 et 3 des matrices $M(a,b)$ sont identiques ; donc les matrices $M(a,b)$ ne sont pas inversibles.

> **Conclusion :** les matrices de E sont diagonalisables mais pas inversibles.

Dans toute la suite, sauf la dernière question, on étudie un exemple.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que A appartient à E.

On remarque que $A = M(1,3)$.

> **Conclusion :** $A \in E$.

4. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `matA()` retournant la matrice A.

```python
import numpy as np

def matA():
    return np.array([[1,3,1],[3,-1,3],[1,3,1]])
```

5. 5.a. Quelle valeur propre de A la question 2 permet-elle d'obtenir ?

D'après la question 2, la matrice A n'est pas inversible.

> **Conclusion :** 0 est valeur propre de A.

5.b. Montrer que les matrices $A - 5I$ et $A + 4I$ ne sont pas inversibles. En déduire deux autres valeurs propres de A.

- On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A-5I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-4 & 3 & 1\\ 3 & -6 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}\right) & \quad C_1+C_2+C_3 = 0_{3,1},\text{ donc } C_3 = -C_1-C_2\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}\right) & \quad \begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}\text{ ne sont pas colinéaires}\\ &= 2\\ &< 3\end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice $A-5I$ n'est pas inversible.

- On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A+4I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\right) & \quad C_1-2C_2+C_3 = 0_{3,1},\text{ donc } C_3 = -C_1+2C_2\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right) & \quad \begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\text{ ne sont pas colinéaires}\\ &= 2\\ &< 3\end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice $A+4I$ n'est pas inversible.

Conclusion : 5 et -4 sont également des valeurs propres de A.

♣ Méthode !
Il est également possible de déterminer $\ker(A-5I)$, qui permet à la fois de répondre à cette question et d'anticiper la suivante.

♡ Astuce du chef ! ♡
Remarquer l'égalité $C_1+C_2+C_3 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice $A-5I$ (utile en question suivante)...
En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B, on a :

$$B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = xC_1+yC_2+zC_3,$$

donc : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1+yC_2+zC_3 = 0$...

5.c. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A puis construire une base (U, V, W) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (on prendra pour chacun d'entre eux la première composante égale à 1).

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ.

☞ Rappel...
$E_\lambda(A) = \ker(A-\lambda I)$.

- ⋆ **Pour 5 :**
  D'après la question précédente, $\mathrm{rg}(A-5I) = 2$. Or, par théorème du rang :

  $$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \mathrm{rg}(A-5I) + \dim\left(\ker(A-5I)\right)$$

  D'où, d'après la question précédente :

  $$\dim\left(E_5(A)\right) = 1$$

  Remarquons aussi que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in E_5(A)$. Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_5(A)$ qui est :

  ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nulle,
  ✓ de cardinal 1, égal à $\dim\left(E_5(A)\right)$.

  Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_5(A)$.

  ⋆ **Pour -4 :**
  On procède de la même façon...

  Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-4}(A)$.

  ⋆ **Pour 0 :**
  On sait déjà que 0 est valeur propre, donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$. Mais la matrice A contient deux colonnes non colinéaires (les deux premières), donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
  On en déduit :

  $$\mathrm{rg}(A) = 2$$

  Puis on termine comme ci-dessus.

  Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A)$.

- Notons ainsi $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille (U, V, W) est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :
  - ✓ libre car constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes ;
  - ✓ de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

> **Conclusion :** la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A qui convient.

♣ Méthode !

Si en question précédente on résout les systèmes $AX = 5X$ et $AX = -4X$, on obtient des vecteurs générateurs des espaces propres $E_5(A)$ et $E_{-4}(A)$ respectivement. On mentionne ensuite le fait qu'ils soient non nuls pour conclure sur des bases.
Bref, comme d'habitude, plusieurs méthodes sont possibles !

6. On considère les instructions Python suivantes :

```
r1=al.matrix_rank(matA()-5*np.eye(3,3))
r2=al.matrix_rank(matA()+4*np.eye(3,3))
print('r1=',r1)
print('r2=',r2)
```

Utiliser la question précédente pour donner les valeurs de r_1 et r_2 renvoyées par ce script.
Ce programme affiche les rangs des matrices $A - 5I$ et $A + 4I$...

> **Conclusion :** d'après les questions précédentes, $r_1 = r_2 = 2$.

7. **7.a.** Vérifier que les vecteurs U, V et W sont vecteurs propres de toutes les matrices de E.
Notons déjà que ces vecteurs sont bien non nuls (ce sont des vecteurs propres associés à A). Soit ensuite $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a ensuite :

- Pour U :

$$\begin{aligned} M(a,b) \times U &= \begin{pmatrix} 2a - 2b \\ -4a + 4b \\ 2a - 2a \end{pmatrix} \\ &= (2a - 2b) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (2a - 2b)U \end{aligned}$$

Conclusion : $2a - 2b$ est valeur propre de $M(a, b)$ et U en est un vecteur propre associé.

- Pour V :

$$\begin{aligned} M(a,b) \times V &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0U \end{aligned}$$

Conclusion : 0 est valeur propre de $M(a, b)$ et V en est un vecteur propre associé.

- Pour W :

$$\begin{aligned} M(a,b) \times W &= \begin{pmatrix} 2a + b \\ 2a + b \\ 2a + b \end{pmatrix} \\ &= (2a + b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (2a + b)U \end{aligned}$$

Conclusion : $2a + b$ est valeur propre de $M(a, b)$ et W en est un vecteur propre associé.

> **Conclusion :** les vecteurs U, V, W sont des vecteurs propres de toutes les matrices de E.

Petite remarque

L'énoncé pourrait guider autrement et procéder comme dans le sujet `EML 2025 Appli - Exercice 2`.

7.b. Soit n un entier naturel non nul. En utilisant la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs U, V et W, indiquer comment obtenir la puissance n-ième de n'importe quelle matrice de E (seule la démarche est exigée, les calculs et leurs résultats numériques ne sont pas demandés).
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Par définition, la matrice P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans la base (U, V, W) ; elle est donc inversible et, par formule de changement de base :

$$M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$$

où $D(a, b) = \begin{pmatrix} 2a - 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a + b \end{pmatrix}$.
On démontre ensuite par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; M(a, b)^n = PD(a, b)^n P^{-1}$$

Puisque $D(a,b)$ est diagonale, $D(a,b)^n = \begin{pmatrix} (2a-2b)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2a+b)^n \end{pmatrix}$ et il resterait à calculer P^{-1} puis $PD(a,b)^nP^{-1}$...

7.c. En déduire, sans la commande **al.matrix_power**, et toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction **Python** d'en-tête **puissanceM(a, b, n)** renvoyant $M(a,b)^n$.

Voici :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def puissanceM(a,b,n):
    Dn=np.diag([(2*a-2*b)**n,0,(2*a+b)**n])
    P=np.array([[1,1,1],[-2,0,1],[1,-1,1]])
    return np.dot(P,np.dot(Dn,al.inv(P)))
```

Exercice 3

On suppose que les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Vérifier que f_n est une densité.

   - **Continuité.**
     - Sur $]-\infty; 0[$: la fonction f_n est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.
     - Sur $[0; n]$: la fonction f_n est continue sur $[0; n]$ comme fonction polynomiale sur cet intervalle.
     - Sur $]n; +\infty[$: la fonction f_n est continue sur $]n; +\infty[$ car constante sur cet intervalle.

     Conclusion : la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en n.

   - **Positivité.**
     - Sur $]-\infty; 0[$: $\forall x \in]-\infty; 0[,\ f_n(x) = 0 \geqslant 0$.
     - Sur $[0; n]$: pour tout $x \in [0; n]$:
     $$\frac{x}{n} \leqslant 1$$
     donc :
     $$1 - \frac{x}{n} \geqslant 0$$
     et ainsi :
     $$f_n(x) \geqslant 0$$
     - Sur $]n; +\infty[$: $\forall x \in]n; +\infty[,\ f_n(x) = 0 \geqslant 0$.

     Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geqslant 0$.

   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$?
     - L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_n(x)dx$ est convergente et vaut 0.
     - L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{n} f_n(x)dx$ n'est pas impropre et :
     $$\begin{aligned}\int_0^n f_n(x)dx &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \\ &= \frac{-1}{n^{n-1}} \int_0^n -(n-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{-1}{n^{n-1}} \left[\frac{1}{n}(n-x)^n\right]_0^n \\ &= \frac{1}{n^{n-1}} \times \frac{n^n}{n} \\ &= 1\end{aligned}$$
     $n - 1 \neq -1$
     - L'intégrale $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente et vaut 0.

     Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente et, par relation de Chasles, vaut 1.

   Conclusion : f_n est une densité.

Petite remarque
f_n est continue en n, mais pas en 0.

Petite remarque
C'est une question de goût de factoriser par $\dfrac{1}{n^{n-1}}$: pour éviter la fraction dans la puissance...

☞ Rappel...
Si $m \neq -1$, une primitive de $u'u^m$ est $\dfrac{1}{m+1}u^{m+1}$. Je conseille donc de bien faire apparaître $u'u^m$: **NE PAS OUBLIER u' !**

Dans la suite, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout entier naturel n non nul, X_n admet f_n comme densité.

2. 2.a. Justifier que $\mathbb{E}\left(1 - \dfrac{X_n}{n}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\left(1 - \dfrac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existent et donner leur expression en fonction de n.

   Notons $Y_n = 1 - \dfrac{X_n}{n}$.
   - On considère que $X_n(\Omega) = [0; n]$ et ainsi on obtient :
   $$Y_n(\Omega) = [0; 1]$$
   La variable aléatoire Y_n est ainsi bornée : elle admet donc un moment à tout ordre.
   Conclusion : $\mathbb{E}\left(1 - \dfrac{X_n}{n}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\left(1 - \dfrac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existent.

♡ Astuce du chef ! ♡
On va l'utiliser à plusieurs reprises, alors autant lui donner un nom !

- Puis, par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto 1-\dfrac{x}{n}$ est continue sur $X_n(\Omega)$ ($X_n(\Omega) = [0; n]$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(1 - \frac{X_n}{n}\right) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right) f_n(x)dx \\
&= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \\
&= \frac{-1}{n^n} \int_0^n -(n-x)^n dx \\
&= \frac{-1}{n^n} \left[\frac{1}{n+1}(n-x)^{n+1}\right]_0^n && n \neq -1 \\
&= \frac{1}{n^n} \frac{n^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

- Également par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^2$ est continue sur $X_n(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{X_n}{n}\right)^2\right) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^2 f_n(x)dx \\
&= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} dx \\
&= \frac{-1}{n^{n+1}} \int_0^n -(n-x)^{n+1} dx \\
&= \frac{-1}{n^{n+1}} \left[\frac{1}{n+2}(n-x)^{n+2}\right]_0^n && n+1 \neq -1 \\
&= \frac{1}{n^{n+1}} \frac{n^{n+2}}{n+2} \\
&= \frac{n}{n+2}
\end{aligned}$$

2.b. En déduire que X_n possède une espérance et une variance et donner leur expression en fonction de n.

- **Espérance.**
  Avec les notations de la question précédente :

$$X_n = n(1 - Y_n)$$

  Or Y_n possède une espérance (question précédente), donc X_n également car c'est une fonction affine de Y_n et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}\big(n(1 - Y_n)\big) \\
&= n\big(1 - \mathbb{E}(Y_n)\big) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) && \text{question précédente} \\
&= \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

- **Variance.**
  La variable aléatoire Y_n admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y_n) &= \mathbb{E}(Y_n^2) - \big(\mathbb{E}(Y_n)\big)^2 \\
&= \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} && \text{question précédente} \\
&= \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\
&= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

  Ainsi, X_n admet également une variance (fonction affine de Y_n) et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{V}\big(n(1 - Y_n)\big) \\
&= n^2 \mathbb{V}(1 - Y_n) \\
&= n^2 \mathbb{V}(Y_n) \\
&= \frac{n^3}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

Vérification
Les seules vérifications que l'on peut faire sont dans le cas $n = 1$! En effet, X_1 suit la loi uniforme sur $[0; 1]$... et donc $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{1}{12}$: et c'est cohérent avec ce que nous venons de trouver : OUF !

Conclusion : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n}{n+1}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n^3}{(n+1)^2(n+2)}$.

3. Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}\left([X_n \leqslant x]\right) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x < 0$ et $X_n(\Omega) = [0; n]$, donc $[X_n \leqslant x] = \varnothing$

- Si $x > n$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}\left([X_n \leqslant x]\right) \\ &= \mathbb{P}(\Omega) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$x > n$ et $X_n(\Omega) = [0; n]$, donc $[X_n \leqslant x] = \Omega$

- Si $x \in [0; n]$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}\left([X_n \leqslant x]\right) \\ &= \frac{-1}{n^{n-1}} \int_0^x -(n-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{-1}{n^{n-1}} \left[\frac{1}{n}(n-t)^n\right]_0^x \\ &= \frac{n^n - (n-x)^n}{n^n} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

X_n est à densité, de densité f_n

$n - 1 \neq -1$

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$.

Vérification

On vérifie :
- $\lim\limits_{-\infty} F_n = 0$
- $\lim\limits_{+\infty} F_n = 1$
- F_n est continue sur $\mathbb{R}$ (car X_n est à densité)

4. 4.a. Donner, pour tout réel x strictement négatif, la limite de $F_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $x < 0$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 0$. D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$$

> **Conclusion :** $\forall x < 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

Une deuxième...

Et encore une question classique éparpillée sur les questions 4 à 5.b... !

4.b. Soit x un réel positif. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$, on a :

$$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Soit $n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$. On sait que :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Ainsi, par transitivité :

$$n \geqslant x$$

Et donc, d'après la question 3 :

$$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

> **Conclusion :** pour tout entier $n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$, $F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

4.c. Pour tout réel x positif, calculer $\lim\limits_{n \to \infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

- Si $x = 0$:

  Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ln\left(1 - \frac{0}{n}\right) = 0$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{0}{n}\right) = 0$$

- Si $x > 0$:
  - $\star$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{-x}{n} \neq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-x}{n} = 0$;
  - $\star$ $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$.

D'où :
$$\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-x}{n}$$
et donc :
$$n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x$$
Par conséquent :
$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x$$
Les deux cas se regroupent...

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x.$

4.d. Déduire des questions précédentes que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X dont on donnera la loi. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$:
  D'après la question **4.a** :
  $$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$
- Si $x \geqslant 0$:
  Pour n suffisamment proche de $+\infty$, on a $n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$ et donc :
  $$\begin{aligned} F_n(x) &= 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1-\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \end{aligned}$$
  n suffisamment proche de $+\infty$, donc $1-\frac{x}{n} > 0$

  Ainsi, d'après la question précédente et par composition de limites :
  $$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) = \exp(-x)$$
  Par conséquent :
  $$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1-\mathrm{e}^{-x}$$

Petite remarque

Ou continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ donc en $-x$.

On a ainsi établi :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$
où $F : x \longmapsto \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Conclusion : la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

5. Soient $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On considère la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \min(U_1, \dots, U_n)$, ce qui signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$, $M_n(\omega)$ est le plus petit des réels $U_1(\omega), \dots, U_n(\omega)$.
Enfin, on pose $Z_n = nM_n$.

5.a. En notant G la fonction de répartition commune à $U_1, \dots, U_n$, rappeler l'expression de $G(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

5.b. Déterminer, pour tout réel x, la probabilité $\mathbb{P}([Z_n > x])$ à l'aide de la fonction G et en déduire explicitement la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Pour commencer :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_n > x]) &= \mathbb{P}([n\min(U_1,\dots,U_n) > x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\min(U_1,\dots,U_n) > \frac{x}{n}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left[U_i > \frac{x}{n}\right]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\left[U_i > \frac{x}{n}\right]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(1-\mathbb{P}\left(\left[U_i \leqslant \frac{x}{n}\right]\right)\right) \\ &= \left(1-G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$
  $n > 0$

  indépendance de $U_1, \dots, U_n$

- Puis :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([Z_n > x]) \\ &= 1 - \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n && \text{point précédent} \\ &= \begin{cases} 1-(1-0)^n & \text{si } \frac{x}{n} < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } \frac{x}{n} \in [0;1] \\ 1-(1-1)^n & \text{si } \frac{x}{n} > 1 \end{cases} && \text{question précédente} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0;n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases} && n > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0;n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$.

5.c. Conclure que Z_n suit la même loi que X_n.

D'après la question précédente et la question 3, les variables aléatoires Z_n et X_n ont la même fonction de répartition. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Important !
Il faut savoir traiter la question 5.c directement : sans le détail des questions 5.a et 5.b.

Conclusion : les variables aléatoires Z_n et X_n suivent la même loi.

5.d. Utiliser la question 5.c pour écrire une fonction **Python** renvoyant une réalisation de X_n.

Voici :

```python
import numpy.random as rd

def simulX(n):
    L=[rd.random() for k in range(n)]
    M=min(L)
    return n*M
```

Exercice 4

♡ **L'avis du chef !** ♡
Très bon exercice, permettant de bien mettre en place les méthodes habituelles sur les variables aléatoires discrètes et les couples. Quelques calculs plus techniques pour se distinguer... A travailler sans modération !

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.
On dispose de $n+1$ urnes, numérotées de 1 à $n+1$, et contenant chacune n boules.
Pour tout k de $[\![1;n+1]\!]$, l'urne numéro k contient $k-1$ boules noires, les autres boules étant blanches (ainsi, l'urne numérotée 1 ne contient que des boules blanches et l'urne numérotée $n+1$ ne contient que des boules noires). L'épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à y effectuer indéfiniment des tirages au hasard d'une boule, avec remise de la boule tirée dans l'urne dont elle provient après chaque tirage.
Pour tout k de $[\![1;n+1]\!]$, on note U_k l'événement : "On a choisi l'urne numérotée k".
On appelle X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si l'on n'obtient aucune boule blanche au cours de l'épreuve et qui prend la valeur j ($j \in \mathbb{N}^*$) si la première boule blanche apparaît au j-ième tirage.

Pour finir, on rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler certaines variables discrètes usuelles :
rd.randint(a,b+1) simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.
rd.binomial(n,p) simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
rd.geometric(p) simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Simulation de X_n : pour tout j de $[\![2;n+1]\!]$, on code les $j-1$ boules noires de l'urne numérotée j par les entiers de $[\![1,j-1]\!]$. Compléter alors la fonction **Python** suivante pour qu'elle renvoie la valeur prise par X_n lors de l'épreuve aléatoire décrite ci-dessus :

```python
import numpy.random as rd

def varX(n):
    k=... #choix de l'urne
    if k==n+1:
        X=...
    elif k==1:
        X=...
    else:
        X=1
        while rd.randint(1,n+1)<=...:
            X=...
    return (X)
```

Voici :

```python
import numpy.random as rd

def varX(n):
    k=rd.randint(1,n+2) #choix de l'urne
    if k==n+1:
        X=0
    elif k==1:
        X=1
    else:
        X=1
        while rd.randint(1,n+1)<=k-1:
            X=X+1
    return (X)
```

♡ **L'avis du chef !** ♡
Question **Python** pour débuter l'exercice : cela permet de bien repérer celles et ceux qui font l'impasse de l'informatique...

2. Pour tout k de $[\![1;n+1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(U_k)$.
Il y a équiprobabilité du choix de l'urne, et $n+1$ urnes...

Conclusion : $\forall k \in [\![1;n+1]\!],\ \mathbb{P}(U_k) = \dfrac{1}{n+1}$.

3. 3.a. Pour tout k de $[\![1;n]\!]$, donner la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Supposons l'évènement U_k réalisé. Autrement dit, l'urne k a été choisie. **Sous cette hypothèse :**
✓ l'expérience consiste en une infinité de répétitions indépendantes (tirages avec remise, sans changement de composition de l'urne) dont le succès "on tire une boule blanche" est de probabilité $\dfrac{n-(k-1)}{n}$ (par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne, composée de n boules dont $k-1$ sont noires) ;
✓ la variable aléatoire X_n prend comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : la loi conditionnelle de X_n sachant U_k est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-k+1}{n}$.

✘ **Attention !**
Il est important de bien rédiger cette question. La variable aléatoire X_n ne suit pas une loi géométrique... C'est seulement la loi conditionnelle qui est une loi géométrique. On doit donc voir la supposition que U_k est réalisé, et un vocabulaire du type "sous cette hypothèse".

Petite remarque
On pourrait distinguer le cas $k=1$, dans lequel la probabilité du succès est égale à 1, mais ce n'est pas nécessaire.

3.b. En conservant, sans les écrire de nouveau, les 6 premières lignes de la fonction **Python** précédente, compléter les 3 lignes suivantes afin d'obtenir une nouvelle simulation de X_n :

```
else:
    X = ...
return (X)
```

Voici :

```
else:
    X=rd.geometric((n-k+1)/n)
return (X)
```

4. 4.a. Déterminer $\mathbb{P}_{U_{n+1}}\big([X_n = 1]\big)$.
Supposons l'évènement U_{n+1} réalisé. Dans ce cas, les tirages s'effectuent dans l'urne numérotée $n+1$, composée exclusivement de boules noires.
Il est alors impossible d'obtenir une boule blanche au premier tirage...

Conclusion : $\mathbb{P}_{U_{n+1}}\big([X_n = 1]\big) = 0$.

4.b. Pour tout k de $[\![1;n]\!]$, donner $\mathbb{P}_{U_k}\big([X_n = 1]\big)$.

Conclusion : d'après la question 3.a, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}_{U_k}\big([X_n = 1]\big) = \dfrac{n-k+1}{n}$.

☞ Rappel...
Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([X = k]\big) = p(1-p)^{k-1}$ et donc $\mathbb{P}\big([X = 1]\big) = p$.

➠Réflexe !
On connaît les $\mathbb{P}_{U_k}\big([X_n = 1]\big)$ et on cherche $\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big)$: FPT !!

4.c. Montrer alors que $\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) = \dfrac{1}{2}$.
D'après la formule des probabilités totales, avec $(U_k)_{k\in[\![1;n+1]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\big(U_k \cap [X_n = 1]\big) && \forall k \in [\![1;n+1]\!],\ \mathbb{P}(U_k) \neq 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}_{U_k}\big([X_n = 1]\big) && \text{questions 2, 4.a et 4.b} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}\,\frac{n-k+1}{n} \\
&= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) && j = n-k+1 \\
&= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\,\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) = \dfrac{1}{2}$.

5. Soit j un entier supérieur ou égal à 2.

5.a. Déterminer $\mathbb{P}_{U_{n+1}}\big([X_n = j]\big)$.
Supposons l'évènement U_{n+1} réalisé. Dans ce cas, les tirages s'effectuent dans l'urne numérotée $n+1$, composée exclusivement de boules noires.
Il est alors impossible d'obtenir une boule blanche...

Conclusion : $\mathbb{P}_{U_{n+1}}\big([X_n = j]\big) = 0$.

5.b. Pour tout k de $[\![1;n]\!]$, donner $\mathbb{P}_{U_k}\big([X_n = j]\big)$.

Conclusion : d'après la question 3.a, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}_{U_k}\big([X_n = j]\big) = \dfrac{n-k+1}{n}\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^{j-1}$.

5.c. En déduire l'égalité :

$$\mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $(U_k)_{k\in[\![1;n+1]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

➠Réflexe !
On connaît les $\mathbb{P}_{U_k}([X_n = j])$ et on cherche $\mathbb{P}([X_n = j])$: FPT !!

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = j]) &= \sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(U_k \cap [X_n = j]) && \forall k \in [\![1; n+1]\!],\ \mathbb{P}(U_k) \neq 0\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}_{U_k}([X_n = 1]) && \text{questions 2, 5.a et 5.b}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\,\frac{n-k+1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j}\right] && i = k-1\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{i}{n}\right)^{j}\right] && i = k-1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X_n = j]) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$.

6. 6.a. Justifier que, pour tout k de $[\![0; n-1]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \frac{k}{n}$.

Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Pour tout $N \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{N}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] &= \sum_{j=2}^{N}\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \sum_{j=2}^{N}\left(\frac{k}{n}\right)^{j} && \text{télescopage}\\
&= \frac{k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^{N}
\end{aligned}$$

Or $k \in [\![0; n-1]\!]$, donc $\dfrac{k}{n} \in]-1; 1[$. Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{N} = 0$$

D'où :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=2}^{N}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \frac{k}{n}$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 2}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$ est convergente et $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \frac{k}{n}$.

6.b. Calculer $\mathbb{P}([X_n \geqslant 2])$ en fonction de n.

Puisque X_n est à valeurs entières, on a :

$$[X_n \geqslant 2] = \bigcup_{j=2}^{+\infty}[X_n = j]$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n \geqslant 2]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=2}^{+\infty}[X_n = j]\right) && ([X_n = j])_{j\geqslant 2} \text{ est constituée d'évènements deux à deux incompatibles}\\
&= \sum_{j=2}^{+\infty}\mathbb{P}([X_n = j]) && \text{question 5.c, licite pour tout } j \geqslant 2\\
&= \sum_{j=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \\
&= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= \frac{1}{n(n+1)} \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n-1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

linéarité de la somme (infinie), licite car pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, la série $\sum_{j\geqslant 2} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \right]$ est convergente

question précédente

★Subtil...★

Autant il est possible d'écrire $\sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{+\infty}$, qui découle de la linéarité de la somme (infinie) ; autant il nous serait impossible d'intervertir deux sommes infinies du type $\sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty}$: il existe un théorème le permettant (sous de bonnes hypothèses), qui est cependant hors programme en ECG.

Conclusion : $\mathbb{P}([X_n \geqslant 2]) = \dfrac{n-1}{2(n+1)}$.

7. 7.a. Déduire des questions précédentes l'expression de $\mathbb{P}([X_n = 0])$ en fonction de n.

Puisque X_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, la famille $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n \geqslant 2])$ est un système complet d'évènements. D'où :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) + \mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n \geqslant 2]) = 1$$

Ce qui donne, d'après les questions 4.c et 6.b :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = 0]) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{n-1}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{n-1}{2(n+1)} \\
&= \frac{n+1-(n-1)}{2(n+1)} \\
&= \frac{2}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = \dfrac{1}{n+1}$.

7.b. Aurait-on pu anticiper ce dernier résultat sans aucun calcul ?

En choisissant n'importe quelle urne $1, \ldots, n$, il sera quasi-impossible de réaliser par la suite l'évènement $[X_n = 0]$. En revanche, en choisissant l'urne $n+1$, il est certain de réaliser par la suite l'évènement $[X_n = 0]$ (car l'urne $n+1$ ne contient aucune boule blanche).

On a ainsi :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = \mathbb{P}(U_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

Petite remarque

L'énoncé aurait pû demander de calculer cette probabilité directement après la question 3 par exemple. On aurait dans ce cas procédé comme en question 4 : à savoir faire en autonomie !

8. 8.a. Montrer que X_n possède une espérance $\mathbb{E}(X_n)$ donnée par :

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

Petite remarque

On pourrait démontrer cette égalité par double inclusion...

On considère que $X_n(\Omega) = \mathbb{N}$.

- On sait que :
  X_n admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{j \in X_n(\Omega)} |j\mathbb{P}([X_n = j])|$ est convergente
  si, et seulement si, la série $\sum_{j\geqslant 0} j\mathbb{P}([X_n = j])$ est convergente, car pour tout $j \in \mathbb{N}$, $j\mathbb{P}([X_n = j]) \geqslant 0$
- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} j\mathbb{P}([X_n = j]) &= 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + 1 \times \mathbb{P}([X_n = 1]) + \sum_{j=2}^{N} j\mathbb{P}([X_n = j]) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{N} j \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \right]
\end{aligned}$$

questions précédentes

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} j\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=2}^{N} j\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \frac{k}{n}\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\right)
\end{aligned}
$$

interversion des sommes

Or, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a $\frac{k}{n} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{j\geqslant 2} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}$ est convergente comme troncature d'une série géométrique convergente.
Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est convergente, comme somme de séries convergentes...

- On en déduit que X_n admet une espérance et :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{j=0}^{+\infty} j\mathbb{P}\big([X_n=j]\big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2} - 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\left(\frac{n^2}{(n-k)^2} - 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n}{n-k} - \frac{n-k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{n}{p} - \frac{p}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n} p \\
&= \frac{1}{2} + \frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

$p = n-k$

Conclusion : X_n admet une espérance et $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$.

Petite remarque
Ce n'est pas le calcul d'espérance le plus simple que l'on ait rencontré (peut-être existe-t-il des chemins menant plus rapidement au résultat d'ailleurs)... A travailler dans un second temps !

8.b. Informatique : calcul et affichage de $\mathbb{E}(X_n)$.
Compléter le script suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher $\mathbb{E}(X_n)$:

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
v=np.arange(1,n+1)
E=...
print(E)
```

Voici :

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
v=np.arange(1,n+1)
E=n/(n+1)*sum(1/v)
print(E)
```

☞ Rappel...
La commande **`np.arange(1,n+1)`** permet de créer un tableau **`numpy`** d'entiers entre 1 et n. L'avantage du tableau est de pouvoir effectuer du calcul plus aisément. En effet, dans ce cas, **`1/v`** est tableau composé des valeurs $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n$.

Petite remarque
Il faut savoir proposer un programme complet en utilisant une boucle **`for`** pour calculer la somme, ou avec une liste en compréhension.

Et encore une !
Pour finir, voici la plus classique des questions classiques. Il faut la repérer et se laisser le temps de la faire !

9\. 9.a. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^\star,\ \dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{p}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc sur $[p; p+1]$, on a :

$$\forall t \in [p; p+1],\ \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{p}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $p \leqslant p+1$:

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\,dt \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,dt$$

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}^\star,\ \dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{p}$.

9.b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^\star \setminus \{1\}$, l'encadrement : $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$.

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. D'après la question précédente, en calculant l'intégrale, on obtient :

$$\forall p \in [\![1; n]\!],\ \frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$$

D'où, en sommant de 1 à $n-1$, licite car $n \geqslant 2$:

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leqslant \sum_{p=2}^{n} \big(\ln(p+1) - \ln(p)\big) \leqslant \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

Puis, par télescopage sur la somme du milieu et changement d'indice $k = p+1$ dans la somme de gauche :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

Conclusion : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$.

9.c. Établir enfin l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \setminus \{1\},\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln(n) + 1$$

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. D'après la question précédente :

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

Mais :

- de l'inégalité de gauche, on déduit :

$$1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln(n)$$

  Autrement dit :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln(n) + 1$$

- de l'inégalité de droite, on déduit :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1}$$

  Autrement dit :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

Conclusion : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln(n) + 1$.

9.d. Utiliser l'encadrement précédent pour donner l'équivalent le plus simple possible de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la question précédente :
$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln(n) + 1$$
D'où, puisque $\ln(n) > 0$ (car $n > 1$) :
$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
Mais :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = 1 = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right)$$
Donc, par théorème d'encadrement :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}{\ln(n)} = 1$$
Conclusion : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

- Enfin, puisque $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n}{n+1} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, on obtient :
$$\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} \ln(n)$$
Et comme $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$, on a même :
$$\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

★★★★★★★ FIN ★★★★★★★