On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies **numpy**, **mathplotlib.pyplot** et **numpy.random** de **Python** sont importées avec les commandes respectives **import numpy as np**, **import matplotlib.pyplot as plt** et **import numpy.random as rd**.

Exercice 1

On considère un nombre réel a strictement supérieur à 1, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = a$ et par la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

1. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle retourne la valeur de u_n pour des valeurs données de n et de a :

```python
def suite_u(a,n):
    u=...
    for k in range(1,n+1):
        u=...
    return u
```

```python
def suite_u(a,n):
    u=a
    for k in range(1,n+1):
        u=u**2-u+1
    return u
```

2. Montrer que si l'on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\ell = 1$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Dans ce cas :

- ✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
- ✓ par opérations : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 - u_n + 1 = \ell^2 - \ell + 1$.

Mais :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

Ainsi, par unicité de la limite, on obtient :

$$\ell = \ell^2 - \ell + 1$$

Autrement dit :

$$\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$$

D'où :

$$\ell = 1$$

Conclusion : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers 1.

♣ Méthode !
On peut aussi utiliser le résultat suivant :
SI :
✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$
✓ (u_n) converge vers ℓ
✓ f est continue en ℓ
ALORS : $f(\ell) = \ell$.

3. 3.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 1 \\ &= (u_n - 1)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = a$; ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par a.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a$.

♥ L'avis du chef ! ♥
C'est un peu (trop ?) détaillé. L'énoncé aurait pu se contenter d'une seule des deux questions : 3.a. ou 3.b..

3.c. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- Raisonnons par l'absurde. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Ainsi, d'après la question **2.** :

$$\ell = 1$$

Mais, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a$$

D'où en faisant tendre $n \to +\infty$:

$$\ell \geqslant a \quad : \quad \text{absurde car } a > 1$$

> **Conclusion :** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

- D'après la question **3.a.**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, d'après le théorème de limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite en $+\infty$ qui est soit finie soit égale à $+\infty$.
Or on vient d'établir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

> **Conclusion :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. À l'aide de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la question précédente, préciser laquelle des quatre propositions suivantes est vraie et justifier l'équivalent choisi :

$$❶\ u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad ❷\ u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2 \quad ; \quad ❸\ u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2} \quad ; \quad ❹\ u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n}$$

Puisque $a > 0$, d'après la question **3.b.**, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n^2} &= \frac{u_n^2 - u_n + 1}{u_n^2} \\ &= 1 - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n^2}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n^2} = 1$$

> **Conclusion :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n^2} = 1$, donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$, proposition ❷.

5. **5.a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}$$

Puisque $a > 1$, d'après la question **3.b.**, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} &= \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n^2 - u_n} \\ &= \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n(u_n - 1)} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n(u_n - 1)} \\ &= \frac{1}{u_n}\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{u_n}$.

5.b. En déduire, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ en fonction de a et u_{n+1}.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \end{aligned}$$

télescopage

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{u_{n+1} - 1}$.

♥ L'avis du chef ! ♥
Là encore, l'énoncé aurait pu se passer de cette question.

5.c. Conclure que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de a.

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

Or $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1}$$

Conclusion : la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a-1}$.

Dans toute la suite, on suppose que $a = 2$.

6. 6.a. Montrer que l'on définit bien la loi d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{u_n}$$

✓ D'après la question **3.b.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_n} \geqslant 0$$

✓ D'après la question précédente, puisque $a = 2$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = 1$$

Conclusion : la suite $\left(\frac{1}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

6.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on a $2^n(2^n - 1) + 1 \geqslant 2^{n+1}$.

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Travaillons par équivalences :

$$\begin{aligned} 2^n(2^n - 1) + 1 \geqslant 2^{n+1} &\iff 2^n(2^n - 1) + 1 \geqslant 2 \times 2^n \\ &\iff 2^n - 1 + \frac{1}{2^n} \geqslant 2 \\ &\iff 2^n + \frac{1}{2^n} \geqslant 3 \end{aligned}$$

$2^n > 0$

➠Réflexe !
Quand on manque d'inspiration, on travaille par équivalences pour transformer le résultat en un résultat plus simple a établir. C'est le cas ici.

Or $n \geqslant 2$, donc $2^n \geqslant 4$ et ainsi, on a $2^n + \frac{1}{2^n} \geqslant 3$. Par équivalences, on conclut donc que l'inégalité initiale est vraie.

Conclusion : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ 2^n(2^n - 1) + 1 \geqslant 2^{n+1}$.

6.c. En déduire que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on a l'inégalité $u_n \geqslant 2^n$ puis vérifier que cette dernière inégalité reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- Procédons par récurrence.
  - **Initialisation.** Pour $n = 2$:
    $u_0 = 2$, donc $u_1 = 3$ et $u_2 = 7$; ainsi
    $$u_2 \geqslant 2^2$$
    L'initialisation est vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Supposons que $u_n \geqslant 2^n$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$.
    Par hypothèse de récurrence :
    $$u_n \geqslant 2^n$$
    D'où :
    $$u_n - 1 \geqslant 2^n - 1$$
    Mais :
    ✓ $u_n - 1 \geqslant 2^n - 1 \geqslant 0$ (car $n \geqslant 2$)
    ✓ $u_n \geqslant 2^n \geqslant 0$ par hypothèse de récurrence.
    Ainsi :
    $$u_n(u_n - 1) \geqslant 2^n(2^n - 1)$$
    D'où :
    $$u_n^2 - u_n + 1 \geqslant 2^n(2^n - 1) + 1$$
    Et ainsi, d'après la question précédente, licite car $n \geqslant 2$, et par définition de u_{n+1} :
    $$u_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$$
    L'hérédité est ainsi établie.

  Conclusion : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \ u_n \geqslant 2^n$.

- On avait $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$. L'inégalité est donc encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant 2^n$.

Important !

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{array}\right\} \Longrightarrow ac \leqslant bd$$

Sans oublier l'hypothèse de positivité !

6.d. Établir que X possède une espérance et une variance que l'on ne cherchera pas à calculer.

- On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Ainsi, par théorème de transfert :
  X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \left| n^2 \mathbb{P}([X = n]) \right|$ est convergente
  si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n^2 \mathbb{P}([X = n])$ est convergente,
  car $\forall n \in \mathbb{N}, \ n^2 \mathbb{P}([X = n]) \geqslant 0$
  si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{n^2}{u_n}$ est convergente

- Or :
  ✓ d'après la question précédente,
  $$\frac{n^2}{u_n} \leqslant \frac{n^2}{2^n}$$
  ✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\begin{aligned} \frac{n^2}{2^n} &= \frac{n(n-1) + n}{2^n} \\ &= \frac{1}{4} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$
  Or $\dfrac{1}{2} \in]-1; 1[$, donc les séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} n(n-1) \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} n \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ sont des séries géométriques convergentes.
  D'où la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{n^2}{2^n}$ (combinaison linéaire de séries convergentes).

  Ainsi, par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{n^2}{u_n}$ est convergente.

Conclusion : X possède une espérance et une variance.

☞ **Rappels...**

- X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre 2. On en déduit que X admet un moment d'ordre 2, donc X admet en particulier une espérance, et admet une variance.
- Si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance. Plus généralement, si X admet un moment d'ordre r, alors pour tout $k < r$, X admet un moment d'ordre k (résultat limite HP).

Exercice 2

On se propose de trouver, de deux façons différentes, les fonctions f et g, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f(0) = 1$, $g(0) = 1$, et qui sont solutions du système différentiel :

$$(S) : \forall x \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \end{cases}$$

1. 1.a. Justifier que ce problème possède un seul couple (f, g) solution.

Le système différentiel (S) est un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants.

Ainsi, le problème $\begin{cases} (S) \\ f(0) = 1, \ g(0) = 1 \end{cases}$ est un problème de Cauchy.

> **Conclusion :** ce problème possède une seul couple (f, g) solution.

1.b. Montrer que f et g sont 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

- On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = f(x) - 2g(x)$$

Or f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f' est également dérivable sur $\mathbb{R}$.

> **Conclusion :** f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- De même pour g.

> **Conclusion :** g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

☞ **Pour info...**

En fait, f et g sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. En effet, on a $f' = f - 2g$ et f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f' également... Ainsi f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De même pour g. Et on réitère, car $f' = f - 2g$, donc f devient quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$,...

Dans la suite, (f, g) désigne le couple solution de (S).

2. **Première méthode utilisant f''.**

2.a. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y'' - 6y' + 9y = 0$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et,pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) - 2g(x)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) &= f'(x) - 2g'(x) - 6f'(x) + 9f(x) \\ &= f'(x) - 4f(x) - 10g(x) - 6f'(x) + 9f(x) && g' = 2f + 5g \\ &= -5f'(x) + 5f(x) - 10g(x) \\ &= 5\big(- f'(x) + f(x) - 2g(x)\big) \\ &= 0 && f' = f(x) - 2g(x) \end{aligned}$$

> **Conclusion :** f est solution de l'équation différentielle $(E) : y'' - 6y' + 9y = 0$.

Si on ne donne pas l'équation (E) :

On sait que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) - 2g(x)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x) - 2g'(x) \\ &= f'(x) - 2\big(2f(x) + 5g(x)\big) && g' = 2f + 5g \\ &= f'(x) - 4f(x) - 10g(x) \\ &= f'(x) - 4f(x) + 5 \times \big(- 2g(x)\big) \\ &= f'(x) - 4f(x) + 5\big(f'(x) - f(x)\big) && f' - f = -2g \\ &= 6f'(x) - 9f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : f est solution de $(E) : y'' - 6y' + 9y = 0$.

2.b. Donner la valeur de $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= f(0) - 2g(0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

> **Conclusion :** $f'(0) = -1$.

2.c. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.

- L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 6r + 9 = 0$, donc l'unique solution est 3.
Par conséquent, il existe deux réels a et b, que l'on considère ensuite, tels que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{3x}$$
- Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$; et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = a\mathrm{e}^{3x} + 3(ax+b)\mathrm{e}^{3x}$$
Ainsi :
$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} b = 1 \\ a + 3b = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 1 \\ a = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (-4x+1)\mathrm{e}^{3x}$.

2.d. En déduire l'expression de $g(x)$ pour tout réel x.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = f(x) - 2g(x)$, donc :
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\big(f(x) - f'(x)\big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((-4x+1)\mathrm{e}^{3x} - \big(-4\mathrm{e}^{3x} + 3(-4x+1)\mathrm{e}^{3x}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}(-4x+1+4+12x-3) \\ &= (4x+1)\mathrm{e}^{3x} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{3x}$.

Dans les questions 3. et 4., on propose une deuxième méthode utilisant une fonction auxiliaire.

3. On pose $h = f + g$.

3.a. Montrer que $(S) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} (S) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \end{cases} \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ f'(x) + g'(x) = 3f(x) + 3g(x) \end{cases} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases} \end{aligned}$$

> ✍ **Rédaction**
> Il est aussi possible d'omettre les x et d'écrire seulement les égalités de fonctions pour alléger l'écriture. En revanche, si on évalue en x, il faut quantifier avec "$\forall x \in \mathbb{R}$" à chaque étape pour traduire les égalités de fonctions sous-jacentes.

3.b. Donner la valeur de $h(0)$ puis résoudre l'équation différentielle $h' = 3h$ et déterminer $h(x)$ pour tout réel x.

- $h(0) = f(0) + g(0) = 2$
- L'ensemble des solutions de l'équation $y' = 3y$ est $\{x \longmapsto a\mathrm{e}^{3x}\ \ a \in \mathbb{R}\}$.
- Puisque $h' = 3h$, il existe un réel a, que l'on considère ensuite, tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = a\mathrm{e}^{3x}$$
Or $h(0) = 2$. D'où $a = 2$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.

3.c. En déduire que $(S) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$.

En partant de la question **3.a.** :

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2\big(h(x) - f(x)\big) \\ h(x) = 2e^{3x} \end{cases} && \text{question précédente et } g = h - f \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ h(x) = 2e^{3x} \end{cases} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}
\end{aligned}$$

4. On note (ED) l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R},\ y' = 3y - 4e^{3x}$.

Remarque

Notation un peu particulière. Habituellement, on ne quantifie pas x au préalable quand on parle de l'équation différentielle $y' = 3y - 4e^{3x}$; ou alors on écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = 3y(x) - 4e^{3x}$$

4.a. Déterminer le réel a tel que la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = axe^{3x}$, soit une solution particulière de (ED).

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_a'(x) = ae^{3x} + 3axe^{3x}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\big(f_a \text{ est solution de } (ED)\big) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) = 3f_a(x) - 4e^{3x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ae^{3x} + 3axe^{3x} = 3axe^{3x} - 4e^{3x} \\
&\iff a = -4 && \forall x \in \mathbb{R},\ e^{3x} \neq 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $a = -4$; la fonction $x \longmapsto -4xe^{3x}$ est solution particulière de (ED).

4.b. En déduire $f(x)$ pour tout réel x.

D'après la question **3.c.**, f est solution de (ED) et vérifie $f(0) = 1$.

- ∗ L'ensemble des solutions de $y' = 3y$ est $\{x \longmapsto ae^{3x},\ a \in \mathbb{R}\}$.
  ∗ D'après la question précédente, la fonction $x \longmapsto -4xe^{3x}$ est solution particulière de (ED).

  Conclusion : l'ensemble des solutions de (ED) est

  $$\{x \longmapsto ae^{3x} - 4xe^{3x}\}$$

- Il existe donc un réel a, que l'on considère ensuite, tel que

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ae^{3x} - 4xe^{3x}$$

  Or $f(0) = 1$. D'où $a = 1$.

  Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (-4x+1)e^{3x}$.

4.c. Donner finalement les fonctions f et g cherchées.

On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = (-4x+1)e^{3x} \\ f(x) + g(x) = 2e^{3x} \end{cases}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = (-4x+1)e^{3x} \\ g(x) = (4x+1)e^{3x} \end{cases}$.

5. **5.a.** Écrire des fonctions **Python** d'en-têtes `def f(x)` et `def g(x)` renvoyant respectivement $f(x)$ et $g(x)$.

```python
def f(x):
    return (-4*x+1)*np.exp(3*x)

def g(x):
    return (4*x+1)*np.exp(3*x)
```

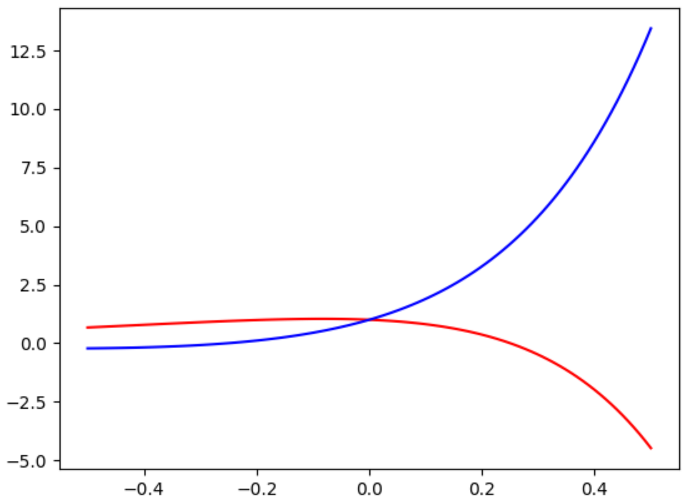
5.b. Écrire un script **Python** utilisant **np.arange** ou **np.linspace** et permettant le tracé des courbes de f et g sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

```python
X=np.linspace(-0.5,0.5,100)
Yf=[f(x) for x in X]
Yg=[g(x) for x in X]
plt.plot(X,Yf,"r")
plt.plot(X,Yg,"b")
plt.show()
```

Remarque

Ici, on peut aussi écrire **Yf=f(X)** pour obtenir la liste des images. Mais attention, ceci ne fonctionne que si la fonction **Python f** peut agir sur les listes / tableaux...

Pour information, on obtient le graphique ci-dessous :



Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$, θ étant un réel élément de $[5, 7]$.
On dispose de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, mutuellement indépendantes et de même loi que X.

1. On note F la fonction de répartition de X, $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

 1.a. Rappeler l'expression explicite de $F(x)$ en fonction de x.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0; \theta]. \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$

 1.b. Donner sans démonstration les expressions de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de θ.

Conclusion : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\theta}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{\theta^2}{12}$.

2. On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire.

 2.a. Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n.
 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) && \text{indépendance de } X_1, \ldots, X_n \\ &= F(x)^n && X_1, \ldots, X_n \text{ ont même loi que } X \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0; \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases} \end{aligned}$$

☞ Rappels...

$\max(x_1, \ldots, x_n) \leqslant a \iff \forall i,\ x_i \leqslant a$
$\max(x_1, \ldots, x_n) \geqslant a \iff \exists i,\ x_i \geqslant a$
$\min(x_1, \ldots, x_n) \geqslant a \iff \forall i,\ x_i \geqslant a$
$\min(x_1, \ldots, x_n) \leqslant a \iff \exists i,\ x_i \leqslant a$

 2.b. En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité f_n de Y_n.
 La fonction F_n est :

 ✓ continue sur $\mathbb{R}$, car F l'est ;
 ✓ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points (0 et θ) car F l'est.

 Ainsi, la variable aléatoire Y_n est à densité et :

$$\forall x < 0,\ f_n(x) = F_n'(x) = 0$$
$$\forall x \in]0; \theta[,\ f_n(x) = F_n'(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}$$
$$\forall x > \theta,\ f_n(x) = F_n'(x) = 0$$

 on pose

$$f_n(0) = 0 \quad ; f_n(\theta) = \frac{n}{\theta}$$

Remarque
$f_n(\theta) = 0$ est également une possibilité...

Conclusion : Y_n est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_n : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{\theta^n} x^{n-1} & \text{si } x \in [0; \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. On rappelle que `rd.random(n)` renvoie, sous forme de vecteur, une simulation `Python` de n variables aléatoires à densité, indépendantes, et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

 3.a. Montrer que, si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors θU suit la loi uniforme sur $[0, \theta]$.
 Supposons que U suit la loi uniforme sur $[0; 1]$. Notons F_U sa fonction de répartition.
 Notons également G la fonction de répartition de θU.
 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$G(x) = \mathbb{P}([\theta U \leqslant x]) \qquad \theta > 0$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{x}{\theta}\right]\right) \\
&= F_U\left(\frac{x}{\theta}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \dfrac{x}{\theta} < 0 \\ \dfrac{x}{\theta} & \text{si } \dfrac{x}{\theta} \in [0;1] \\ 1 & \text{si } \dfrac{x}{\theta} > 1 \end{cases} \qquad \theta > 0 \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases} \\
&= F(x)
\end{aligned}
$$

Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors θU suit la loi uniforme sur $[0,\theta]$.

3.b. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n :

```python
def var_Y(theta,n):
    X=...
    Y=...
    return Y
```

```python
def var_Y(theta,n):
    X=theta*rd.random()
    Y=max([X for i in range(1,n+1)])
    return Y
```

On suppose dans la suite que θ est inconnu et on se propose de l'estimer.

4. 4.a. Montrer que Y_n possède une espérance et donner sa valeur.

On considère que $Y_n(\Omega) = [0;\theta]$. Ainsi $Y_n(\Omega)$ est borné, donc Y_n admet une espérance et :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n) &= \int_0^\theta x f_n(x)dx \\
&= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx \\
&= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta \\
&= \frac{n\theta}{n+1}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{n\theta}{n+1}$.

4.b. Montrer que Y_n possède une variance et vérifier que l'on a :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

On a $Y_n(\Omega) = [0;\theta]$. Ainsi $Y_n(\Omega)$ est borné, donc Y_n admet une variance.

☞ **Rappel...**
L'existence de la variance équivaut à celle du moment d'ordre 2.

- Par théorème de transfert, licite car la fonction $.^2$ est continue sur $[0;\theta]$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n^2) &= \int_0^\theta x^2 f_n(x)dx \\
&= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}dx \\
&= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta \\
&= \frac{n\theta^2}{n+2}
\end{aligned}
$$

- Puis, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - \left(\mathbb{E}(Y_n)\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} \\
&= n\theta^2 \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\
&= n\theta^2 \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\mathbb{V}(Y_n) = \dfrac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$.

5. On pose $Z_n = \dfrac{n+1}{n} Y_n$.

5.a. Montrer que Z_n est un estimateur de θ et que $\mathbb{E}(Z_n) = \theta$.

- On a $Z_n = \dfrac{n+1}{n} \max(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, Z_n est :
  - ✓ une variable aléatoire ;
  - ✓ fonction d'un n-échantillon, car $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi ;
  - ✓ dont l'expression ne fait pas apparaître θ.

  Conclusion : Z_n est un estimateur de θ.

- D'après la question **4.a.**, Y_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{n\theta}{n+1}$. Ainsi Z_n admet une espérance et, par linéarité de l'espérance, on obtient :
$$\mathbb{E}(Z_n) = \theta$$

> ☞ **Pour info...**
> Un estimateur de θ dont l'espérance vaut θ est un **estimateur sans biais**.

5.b. Calculer la variance de Z_n.

D'après la question **4.a.**, Y_n admet une variance. Ainsi Z_n admet une variance et :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{n+1}{n} Y_n\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2} \mathbb{V}(Y_n) \\
&= \frac{\theta^2}{n(n+2)}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\mathbb{V}(Z_n) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$.

6. 6.a. Justifier que : $\forall n \geqslant 47,\ \dfrac{\theta^2}{n+2} \leqslant 1$.

Soit $n \geqslant 47$. On sait que :
$$5 \leqslant \theta \leqslant 7$$

Ainsi, par croissance de $.^2$ sur $\mathbb{R}^+$:
$$25 \leqslant \theta^2 \leqslant 49$$

D'où, puisque $n + 2 > 0$:
$$\frac{\theta^2}{n+2} \leqslant \frac{49}{n+2}$$

Or $n \geqslant 47$, donc $n + 2 \geqslant 49$ et ainsi
$$\frac{49}{n+2} \leqslant 1$$

D'où le résultat.

Conclusion : $\forall n \geqslant 47,\ \dfrac{\theta^2}{n+2} \leqslant 1$.

6.b. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire Z_n, puis montrer que si n est supérieur ou égal à 47, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| \leqslant \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

- La variable aléatoire Z_n admet une variance, on peut donc lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Z_n)}{\varepsilon^2}$$

- Soient $n \geqslant 47$ et $\varepsilon > 0$.
D'après le point ci-dessus et les questions **5.a.** et **5.b.** :

$$\mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$$

Ainsi, d'après la question **6.a.**, licite car $n \geqslant 47$, et puisque $n\varepsilon^2 > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| \geqslant \varepsilon\big) &= \mathbb{P}\big(\overline{|Z_n - \theta| < \varepsilon}\big)\\ &= 1 - \mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| < \varepsilon\big)\\ &\geqslant 1 - \mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| \leqslant \varepsilon\big)\end{aligned}$$

$[|Z_n - \theta| < \varepsilon] \subset [|Z_n - \theta| \leqslant \varepsilon]$ donc $\mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| < \varepsilon\big) \leqslant \mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| \leqslant \varepsilon\big)$

D'où, par transitivité :

$$1 - \mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| \leqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| \leqslant \varepsilon\big) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$.

★ Classique ! ★
C'est une question très classique sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. À travailler pour parvenir à la traiter dans un temps raisonnable.

6.c. En déduire que, si n est supérieur ou égal à 2000, l'intervalle $\left[Z_n - \dfrac{1}{10}, Z_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour θ, avec un niveau de confiance au moins égal à 0,95.

Soit $n \geqslant 2000$.

✓ $Z_n - \dfrac{1}{10}$ et $Z_n + \dfrac{1}{10}$ sont des estimateurs de θ ;

✓ $\mathbb{P}\left(\left[Z_n - \dfrac{1}{10} \leqslant Z_n + \dfrac{1}{10}\right]\right) = 1$

✓ et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left[\theta \in \left[Z_n - \frac{1}{10}; Z_n + \frac{1}{10}\right]\right]\right) &= \mathbb{P}\left(\left[Z_n - \frac{1}{10} \leqslant \theta \leqslant Z_n + \frac{1}{10}\right]\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{-1}{10} \leqslant Z_n - \theta \leqslant \frac{1}{10}\right]\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - \theta| \leqslant \frac{1}{10}\right]\right)\\ &\geqslant 1 - \frac{100}{n}\end{aligned}$$

question précédente avec $\varepsilon = \dfrac{1}{10} > 0$

➠Réflexe !
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+$
$-a \leqslant x \leqslant a \iff |x| \leqslant a$

Or $n \geqslant 2000$, donc $\dfrac{100}{n} \leqslant \dfrac{1}{20}$ et ainsi :

$$1 - \frac{100}{n} \geqslant 1 - \frac{1}{20} = 0,95$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}\left(\left[\theta \in \left[Z_n - \frac{1}{10}; Z_n + \frac{1}{10}\right]\right]\right) \geqslant 0,95$$

Conclusion : si n est supérieur ou égal à 2000, l'intervalle $\left[Z_n - \dfrac{1}{10}, Z_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour θ, avec un niveau de confiance au moins égal à 0,95.

7. On considère le code **Python** suivant :

```python
def mystere(theta):
    c=0
    for k in range(1000):
        y=var_Y(theta,2000)
        z=2001*y/2000
        if np.abs(z-theta)<=0.1:
            c=c+1
    return c/1000

print(mystere(6))
```

Expliquer le fonctionnement de ce code et préciser ce que représente le résultat affiché.

- À l'intérieur de la boucle `for`, on simule Y_{2000} ainsi la variable `z` prend comme valeur une réalisation de Z_{2000}.
- La variable `c` compte alors le nombre d'apparitions, sur les 1000 répétitions, de l'évènement $[|Z_{2000} - \theta| \leqslant 0,1]$.

L'exécution de la fonction `mystere` renvoie donc la fréquence d'apparition de l'évènement $[|Z_{2000} - \theta| \leqslant 0,1]$ sur 1000 réalisations indépendantes de Z_{2000}. Or, d'après la loi faible des grands nombres, cette fréquence est proche de $\mathbb{P}\big([|Z_{2000} - \theta| \leqslant 0,1]\big)$.

Conclusion : le résultat affiché sera proche de $\mathbb{P}\big([|Z_{2000} - 6| \leqslant 0,1]\big)$ qui, puisque le contexte de l'exercice est vérifié, est, d'après la question **6.c.** un nombre supérieur ou égal à 0,95.

Précisions sur la LfGN...

Rappelons l'énoncé de la loi faible des grands nombres.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes**, admettant toutes **la même espérance m** et **la même variance σ^2** (c'est le cas si elles ont toutes la même loi) alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon]\big) = 0$$

Conséquence : pour n suffisamment grand, on peut considérer qu'une réalisation de $\overline{X_n}$ fournit une valeur approchée de m.

Appliquée lorsque les X_k suivent une loi de Bernoulli dont le succès est la réalisation d'un évènement A, la moyenne empirique $\overline{X_n}$ représente alors la fréquence d'apparition de l'évènement A et la valeur m est alors $\mathbb{P}(A)$.
La fréquence d'apparition de l'évènement A est alors, sur un grand nombre de répétitions, une valeur approchée de $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 4

Dans ce problème, le mot « graphe » désigne un graphe simple (c'est-à-dire sans boucles et sans arêtes multiples), connexe (chaque sommet est relié à au moins un autre), non orienté et non pondéré.
Dans tout l'exercice, d désigne un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Remarque
Dans le sujet initial, il était écrit "Les lettres n et d désignent des entiers naturels non nuls.". Problème : le résultat donné en question 1.b. n'est valable que si $n \geqslant 2$.

Rappels, notations et définitions

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
L'ordre n d'un graphe est le nombre de ses sommets.
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
On appelle degré maximal d'un graphe, noté d, le maximum des degrés de ses sommets.
Deux sommets sont voisins (ou adjacents) s'ils sont reliés par une arête (c'est-à-dire une chaîne de longueur 1).
On appelle distance entre deux sommets d'un graphe, la longueur minimale de toutes les chaînes reliant ces deux sommets.
On rappelle que le diamètre D d'un graphe est la plus grande des distances séparant chaque paire de sommets distincts.
On note $E_n(d)$ l'ensemble des graphes d'ordre n de diamètre $D = 2$ et de degré maximal d.

Remarques
- Il existe au moins une chaîne entre deux sommets distincts car le graphe est supposé connexe dans l'exercice.
- Il aurait été préférable d'écrire "On appelle diamètre D d'un graphe la plus grande des distances...", la notion de diamètre de graphe n'étant ps au programme.

Partie 1 : préliminaires

1. **1.a.** Montrer que le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - nx$ est un polynôme annulateur de J_n.

Notons U le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On a :

$$J_n U = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

D'où, par concaténation de produits matriciels :

$$\begin{aligned} J_n^2 &= \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} \\ &= nJ_n \end{aligned}$$

Conclusion : P est un polynôme annulateur de J_n.

Remarque
Le résultat étant donné, il faut essayer de le justifier au mieux...

1.b. Rappeler pourquoi J_n est diagonalisable puis montrer par l'absurde que J_n possède deux valeurs propres qui sont 0 et n.

- La matrice J_n est symétrique à coefficients réels, elle est donc, d'après le théorème spectral, diagonalisable.
- D'après la question précédente, P est annulateur de J_n. Or les racines de P sont 0 et n. D'où :

$$\mathrm{Sp}(J_n) \subset \{0; n\}$$

-
  - Puisque J_n est diagonalisable, elle possède au moins une valeur propre.
  - Supposons que J_n ne possède qu'une unique valeur propre égale à λ.
    Dans ce cas, puisque J_n est diagoanalisable, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, constituée de λ sur la diagonale, telles que :

$$J_n = PDP^{-1}$$

Mais alors $D = \lambda I_n$ et on aurait :

$$J_n = \lambda I_n \quad : \quad \text{absurde !}$$

Par conséquent, J_n possède 2 valeurs propres ; et d'après le point précédent, ce sont 0 et n.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(J_n) = \{0; n\}$.

♥ L'avis du chef ! ♥
À trop guider, on rend parfois le sujet plus difficile en imposant une méthode. Le raisonnement par l'absurde n'est pas toujours bien maitrisé et on peut très facilement s'en passer dans cette question.

Autres méthodes

On peut procéder autrement pour justifier que $\mathrm{Sp}(J_n) = \{0; n\}$. Voyons deux autres méthodes, la première pourrait être acceptée ici car met en place un raisonnement par l'absurde. La seconde non.
1#
- D'après la question précédente, P est annulateur de J_n. Or les racines de P sont 0 et n. D'où :

$$\mathrm{Sp}(J_n) \subset \{0; n\}$$

- Pour 0 :
  Supposons que 0 n'est pas valeur propre de J_n. Dans ce cas, la matrice J_n est inversible. Or, d'après la

question précédente :
$$J_n^2 = nJ_n$$
D'où, en multipliant par J_n^{-1} :
$$J_n = nI_n \quad : \quad \text{absurde car } n \neq 1\,!$$
Conclusion : 0 est valeur propre de J_n.

- Pour n :
Supposons que n n'est pas valeur propre de J_n. Dans ce cas, la matrice $J_n - nI_n$ est inversible. Or, d'après la question précédente :
$$(J_n - nI_n)J_n = 0_{n,1}$$
D'où, en multipliant par $(J_n - nI_n)^{-1}$:
$$J_n = 0_{n,1} \quad : \quad \text{absurde}\,!$$
Conclusion : n est valeur propre de J_n.

2#

- D'après la question précédente, P est annulateur de J_n. Or les racines de P sont 0 et n. D'où :
$$\mathrm{Sp}(J_n) \subset \{0; n\}$$
- Pour 0 :
Puisque la matrice J_n n'est constituée que de 1, toutes ses colonnes sont colinéaires à la première colonne. La matrice J_n n'est donc pas inversible.
Conclusion : 0 est valeur propre de J_n.
- Pour n :
On remarque que
$$J_nU = nU$$
Or $U \neq 0_{n,1}$.
Conclusion : n est valeur propre de J_n et U en est un vecteur propre associé.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(J_n) = \{0; n\}$.

☞ **Rappel...**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$
$\iff \exists X \neq 0 \ / \ MX = \lambda X$
$\iff \ker(M - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$
$\iff \mathrm{rg}(M - \lambda I_n) \neq n$
$\iff M - \lambda I_n$ n'est pas inversible

Remarque
On peut même dire que $\mathrm{rg}(J_n) = 1$ et donc que 0 est valeur propre de J_n et l'espace propre associé est de dimension $n - 1$.

1.c. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a l'équivalence :
$$J_nX = nX \iff \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

$$J_nX = nX \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_2 \\ \quad \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_n \end{cases}$$

$$\underset{\forall i \in [\![2;n]\!],\ L_i \leftarrow L_i - L_1}{\iff} \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_1 \\ 0 = n(x_2 - x_1) \\ \quad \vdots \\ 0 = n(x_n - x_1) \end{cases}$$

$n \neq 0$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_1 \\ x_2 = x_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} nx_1 = nx_1 \\ x_2 = x_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

1.d. En déduire que le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est de dimension 1 et engendré par le vecteur U de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont tous les éléments sont égaux à 1.

Notons $F_n(J_n)$ le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_n(J_n) &\iff J_n X = nX \qquad \text{question précédente} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \\ &\iff X = x_1 U \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F_n(J_n) &= \{x_1 U,\ x_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(U) \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (U) est une famille :

- ✓ génératrice de $F_n(J_n)$,
- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

La famille (U) est donc une base de $F_n(J_n)$ et $\dim\big(F_n(J_n)\big) = 1$.

Conclusion : le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est de dimension 1 et engendré par U.

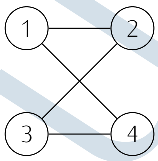
♥ L'avis du chef ! ♥

Bien que le fait de travailler sur une matrice de taille $n \times n$ augmente la difficulté, cette partie I est peut-être un peu trop guidée. En entraînement, je pense qu'il faudrait être capable de traiter cette partie sans aucune question intermédiaire.

Partie 2 : quelques généralités

2. Étude d'exemples.

2.a. Justifier que le graphe suivant est élément de $E_4(2)$.

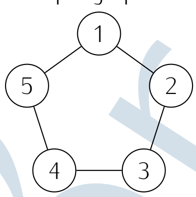


Ce graphe

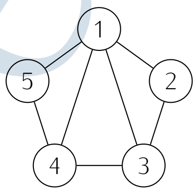
- ✓ possède 4 sommets,
- ✓ est de degré maximal 2,
- ✓ est de diamètre 2 car chaque sommet est relié par une arête ou par une chaîne de longueur 2 à tout autre.

Conclusion : ce graphe appartient à $E_4(2)$.

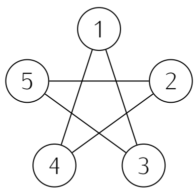
2.b. Parmi les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 suivants, quels sont les deux graphes éléments de $E_5(2)$? Justifier la réponse pour chaque graphe.



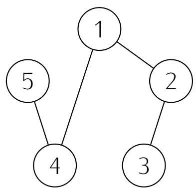
G_1



G_2



G_3



G_4

	G_1	G_2	G_3	G_4
ordre	5	5	5	5
degré maximal	2	4	2	2
diamètre	2	2	2	4

Remarque

Puisque l'énoncé demande les deux graphes de $E_5(2)$, il suffit d'identifier 2 graphes qui conviennent pour obtenir tous les points. Je fais tout de même le choix (pédagogique) de donner les caractéristiques des quatre.

Conclusion : les graphes G_1 et G_3 sont les deux graphes qui appartiennent à $E_5(2)$.

3. Soit G un graphe de $E_n(d)$ et un sommet s fixé de ce graphe.

3.a. Montrer que s possède d voisins au maximum.

Puisque $G \in E_n(d)$, on a, par définition de d, on a :

$$\deg(s) \leqslant d$$

Conclusion : s possède d voisins au maximum.

3.b. Utiliser le fait que $D = 2$ pour établir que le nombre m de sommets de G, autres que s, est au maximum égal à $d + d(d-1)$.

Remarque
Dans l'énoncé initial, i était écrit "le nombre n de sommets de G, autres que s". Mais n désigne l'ordre du graphe depuis le début de l'exercice. Je renomme donc en m.

Notons $\mathscr{E}_{1,s}$ et $\mathscr{E}_{2,s}$ l'ensemble des sommets autres que s qui sont à une distance 1 et 2 respectivement de s. Puisque $D = 2$, chaque sommet autre que s est à une distance 1 ou 2 de s. Ainsi :

$$m = \mathrm{Card}(\mathscr{E}_{1,s}) + \mathrm{Card}(\mathscr{E}_{2,s})$$

Or :

- d'après la question précédente, s a au plus d voisins, donc
$$\mathrm{Card}(\mathscr{E}_{1,s}) \leqslant d$$
- chacun des voisins de s est de degré au plus d ; et donc possède au plus $d-1$ voisins autres que s. Par conséquent, s est relié à au plus $d(d-1)$ sommets autres que lui-même par un chaîne de longueur 2. Ainsi :
$$\mathrm{Card}(\mathscr{E}_{2,s}) \leqslant d(d-1)$$

Conclusion : $m \leqslant d + d(d-1)$.

3.c. Conclure que l'on a : $n \leqslant d^2 + 1$.

Par définition de m, on a :

$$m = n - 1$$

D'où le résultat, d'après la question précédente.

Conclusion : $n \leqslant d^2 + 1$.

Les graphes de $E_n(d)$ pour lesquels on a l'égalité $n = d^2 + 1$ sont appelés graphes de Moore.

Dans toute la suite, on considère un graphe de Moore G (on a donc $n = d^2 + 1$) ainsi que sa matrice d'adjacence $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}$ désigne le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Partie 3 : Étude de la matrice d'adjacence d'un graphe de Moore

On rappelle que, par définition du produit matriciel, si p, q, r sont trois entiers naturels non nuls et si on a $E = (e_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $F = (f_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant q} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, alors $EF \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et, en notant $EF = (g_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$, $g_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} e_{i,k} f_{k,j}$.

On admet que chaque sommet de G est de degré d et est relié à tout sommet distinct par exactement une chaîne qui est de longueur 1 ou 2.

On pose $B = A^2$ avec $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et on rappelle que $b_{i,j}$ est le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets i et j.

4. Rappeler pourquoi A est symétrique.

Conclusion : A est symétrique car le graphe G est non orienté.

5. 5.a. Justifier que, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, on a $a_{i,j} \in \{0,1\}$.

Puisque le graphe est simple, il ne possède aucune arête multiple. Ainsi :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \; a_{i,j} \leqslant 2$$

Conclusion : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; a_{i,j} \in \{0,1\}$.

5.b. Expliquer rapidement pourquoi $a_{i,i} = 0$ pour tout i de $[\![1,n]\!]$.

Puisque le graphe est simple, il ne possède aucune boucle.

Conclusion : $\forall i \in [\![1;n]\!], \; a_{i,i} = 0$.

6. **6.a.** Utiliser le rappel fait au début de cette partie pour montrer que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k}$$

Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$. Par définition du produit matriciel :

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k} \end{aligned}$$

A est symétrique, donc $\forall k \in [\![1;n]\!],\ a_{k,j} = a_{j,k}$

Conclusion : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k}$.

6.b. Montrer que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ et en déduire que $b_{i,i} = d$.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} b_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \\ &= \deg(s_i) \\ &= d \end{aligned}$$

d'après la question **5.a.**, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $a_{i,k} \in \{0;1\}$, donc $a_{i,k}^2 = a_{i,k}$

en notant s_i le i-ème sommet du graphe

par hypothèse, tous les sommets sont de degré d

Conclusion : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ b_{i,i} = d$.

7. **7.a.** Établir que, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i,j} = 0 \\ b_{i,j} = 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{i,j} = 1 \\ b_{i,j} = 0 \end{array} \right.$$

Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. D'après la question **5.a.**, $a_{i,j} \in \{0;1\}$. Distinguons alors deux cas.

- Si $a_{i,j} = 0$.
  Dans ce cas, il n'y a pas d'arête entre les sommets i et j. Mais, par hypothèse, chaque sommet de G est relié à tout autre par exactement une chaîne, qui est de longueur 1 ou 2.
  Par conséquent, puisque les sommets i et j ne sont pas voisins, ils sont reliés par exactement une chaîne de longueur 2. Or $b_{i,j}$ est le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets i et j. D'où :
  $$b_{i,j} = 1$$
- Si $a_{i,j} = 1$.
  Dans ce cas, il y a une arête entre les sommets i et j. Mais, par hypothèse, chaque sommet de G est relié à tout autre par exactement une chaîne, qui est de longueur 1 ou 2.
  Par conséquent, puisque les sommets i et j sont voisins, ils sont reliés par exactement une chaîne de longueur 1 et donc ne sont pas reliés par une chaîne de longueur 2. D'où :
  $$b_{i,j} = 0$$

Conclusion : pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i,j} = 0 \\ b_{i,j} = 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{i,j} = 1 \\ b_{i,j} = 0 \end{array} \right.$$

7.b. En déduire, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$, la valeur de $b_{i,j} + a_{i,j}$.

Conclusion : d'après la question précédente, on a toujours pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$,

$$a_{i,j} + b_{i,j} = 1$$

7.c. Donner, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la valeur de $b_{i,i} + a_{i,i}$.

Conclusion : d'après les questions **5.b.** et **6.b.**, on a :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \; a_{i,i} + b_{i,i} = d$$

8. Déduire des questions 7.b. et 7.c. la relation :

$$A^2 + A = (d-1)I_n + J_n$$

Notons, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, $(M)_{i,j}$ le coefficient (i,j) de la matrice M. On a alors, pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$:

$$\begin{aligned} \big((d-1)I_n + J_n\big)_{i,j} &= \begin{cases} d-1+1 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ &= \begin{cases} d & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ &= a_{i,j} + b_{i,j} \\ &= (A+B)_{i,j} \end{aligned}$$

questions **7.b.** et **7.c.**

Par conséquent :

$$(d-1)I_n + J_n = A + B$$

Conclusion : $A^2 + A = (d-1)I_n + J_n$.

Partie 4 : valeurs propres possibles de A

On rappelle que U est le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

9. Justifier que A est diagonalisable.
D'après la question **4.**, la matrice A est symétrique.

Conclusion : A est diagonalisable.

10. Une première valeur propre de A.

10.a. Utiliser le rappel sur le produit matriciel ainsi que la question 6. pour montrer que $AU = dU$.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$\begin{aligned} (AU)_i &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times 1 \\ &= d \\ &= (dU)_i \end{aligned}$$

question **6.b.**

Conclusion : $AU = dU$.

10.b. En déduire que d est valeur propre de A.
On a :

- ✓ $AU = dU$
- ✓ $U \neq 0_{n,1}$.

Conclusion : d est valeur propre de A et U en est un vecteur propre associé.

11. Recherche des autres valeurs propres possibles de A.
Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

11.a. Établir que l'on a :

$$J_n X = (\lambda^2 + \lambda - d + 1)X$$

On a :

$$AX = \lambda X$$

D'où :

$$\begin{aligned} A^2X &= A(\lambda X) \\ &= \lambda AX \\ &= \lambda^2 X \end{aligned}$$

À retenir...

$AX = \lambda X \implies \forall k, \; A^k X = \lambda^k X$

Ainsi, en démarrant du résultat de la question **8.** :

$$\begin{aligned} J_n X &= (A^2 + A - (d-1)I_n)X \\ &= A^2X + AX - (d-1)X \\ &= (\lambda^2 + \lambda - d + 1)X \end{aligned}$$

Conclusion : $J_n X = (\lambda^2 + \lambda - d + 1)X$.

11.b. Montrer que, si $\lambda = d$, alors $X \in \text{Vect}(U)$ et en déduire que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\lambda = d$ est de dimension 1.

- Supposons $\lambda = d$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} J_n X &= (d^2 + 1)X \\ &= nX \end{aligned}$$

G est un graphe de Moore, donc $n = d^2 + 1$

Ainsi X est vecteur propre de J_n pour la valeur propre 1. Or, d'après la question **1.d.**, l'espace propre de J_n pour la valeur propre n est $\text{Vect}(U)$.

Conclusion : si $\lambda = d$, alors $X \in \text{Vect}(U)$.

☞ Rappel...
J'en profite pour rappeler que l'espace propre pour une VP λ n'est pas l'ensemble des vecteurs propres associés à λ ! En effet, l'espace propre contient toujours le vecteur nul, qui n'est pas un vecteur propre...

- En notant $F_d(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre d, on a, d'après la question précédente :

$$F_d(A) \subset \text{Vect}(U)$$

Or :

$$\dim\left(F_d(A)\right) \geqslant 1 \quad ; \quad \dim\left(\text{Vect}(U)\right) = 1$$

D'où ;

$$F_d(A) = \text{Vect}(U)$$

☞ Rappel...
Un espace propre contient, par définition, le vecteur nul ainsi qu'au moins un vecteur propre (donc une infinité...) et ainsi, tout espace propre est de dimension au moins 1.

Conclusion : l'espace propre de A associé à la valeur propre d est de dimension 1, et égal à $\text{Vect}(U)$.

11.c. Utiliser la relation $n = d^2 + 1$ pour résoudre l'équation $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = n$, d'inconnue λ, puis montrer qu'une seule des solutions est effectivement valeur propre de A et préciser laquelle.

- $$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - d + 1 = n &\iff \lambda^2 + \lambda - d + 1 = d^2 + 1 \\ &\iff \lambda^2 - d^2 + \lambda - d = 0 \\ &\iff (\lambda - d)(\lambda + d) + \lambda - d = 0 \\ &\iff (\lambda - d)(\lambda + d + 1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda = d \\ \text{ou} \\ \lambda = -d - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

♣ Méthode !
Bien évidemment, on peut développer et calculer le discriminant pour obtenir les solutions de l'équation $\lambda^2 + \lambda - d^2 - d = 0$...

- On a déjà vu, au-dessus, que d est valeur propre de A.
- Démontrons que $-d - 1$ n'est pas valeur propre de A.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $-d - 1$ est valeur propre de A. Considérons X un vecteur propre associé. Ainsi, d'après la question **8.** :

$$A^2X + AX = (d-1)X + J_n X$$

Autrement dit :

$$(-d-1)^2X + (-d-1)X = (d-1)X + J_n X$$

D'où :

$$\begin{aligned} J_n X &= (d^2 + 2d + 1 - d - 1 - d + 1)X \\ &= (d^2 + 1)X \\ &= nX \end{aligned}$$

G est un graphe de Moore, donc $n = d^2 + 1$

Ainsi, d'après la question **1.d.**, $X \in \text{Vect}(U)$. Or, d'après la question précédente, $\text{Vect}(U)$ est l'espace propre de A associé à la valeur propre d. On en déduit que X est à la fois vecteur propre de A pour la valeur propre d et la valeur propre $-d - 1$: absurde car $d \neq -d - 1$!
Conclusion : $-d - 1$ n'est pas valeur propre de A.

Conclusion : d est valeur propre de A, mais $-d - 1$ ne l'est pas.

Matrices à diagonale strictement dominante

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On dit que **$M$ est à diagonale strictement dominante** lorsque :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ |m_{i,i}| > \sum_{\substack{i=1\\ j \neq i}}^{n} |m_{i,j}|$$

Remarquons que la matrice $A + (d+1)I_n$ est ici à diagonale strictement dominante car ses coefficients sont positifs et que la somme des coefficients autres que diagonaux de chaque ligne est égal à d, degré de chaque sommet ; et que les coefficients diagonaux sont tous égaux à $d+1$.
Un résultat bien connu en prépa scientifique : toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.
Démontrons-le.

Supposons que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ |m_{i,i}| > \sum_{\substack{i=1\\ j \neq i}}^{n} |m_{i,j}|$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(M)$. Raisonnons par l'absurde et supposons donc $X \neq 0_{n,1}$.

Notons i_0 l'indice tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{i \in [\![1;n]\!]} \left(|x_i|\right)$.
Or $MX = 0_{n,1}$. D'où, en particulier pour la ligne i_0 :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} x_j = 0$$

Ainsi :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j \neq i_0}}^{n} m_{i_0,j} x_j = -m_{i_0,i_0} x_{i_0}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|m_{i_0,i_0}||x_{i_0}| &= \left| \sum_{\substack{j=1\\ j \neq i_0}}^{n} m_{i_0,j} x_j \right| && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j \neq i_0}}^{n} |m_{i_0,j}||x_j| && \text{pour tout } j,\ |x_j| \leqslant |x_{i_0}| \text{ et } |m_{i_0,j}| \geqslant 0 \\
&\leqslant |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1\\ j \neq i_0}}^{n} |m_{i_0,j}|
\end{aligned}$$

Or $X \neq 0_{n,1}$, donc $|x_{i_0}| > 0$... Par conséquent, on obtient :

$$|m_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j \neq i_0}}^{n} |m_{i_0,j}| \quad : \quad \text{absurde, contredit l'hypothèse sur } M$$

Par conséquent $X = 0_{n,1}$. On a ainsi établi

$$X \in \ker(M) \implies X = 0_{n,1}$$

Conclusion : $\ker(M) = \{0_{n,1}\}$ et donc la matrice M est inversible.
Les matrices à diagonale strictement dominante sont inversibles.

11.d. Expliquer pourquoi, si $\lambda \neq d$, on a $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$.

Supposons $\lambda \neq d$. D'après la question **11.a.**, X est vecteur propre de J_n pour la valeur propre $\lambda^2 + \lambda - d + 1$.
Or, d'après la question **1.b.**, $\mathrm{Sp}(J_n) = \{0; n\}$.
Ainsi $\lambda^2 + \lambda - d + 1 \in \{0; n\}$.
Mais, d'après la question précédente, la seule valeur propre de A telle que $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = n$ est d.
Par conséquent, puisque $\lambda \neq d$, on a nécessairement :

$$\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$$

Conclusion : si $\lambda \neq d$, on a $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$.

11.e. En déduire que les autres valeurs propres possibles de A sont :

$$b = \frac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{-1 - \sqrt{4d-3}}{2}$$

D'après la question précédente, si λ est valeur propre de A autre que d, alors $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$. Or, après résolution, on a, puisque $4d-3>0$ (car $d \geqslant 1$) :

$$\lambda^2+\lambda-d+1 \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1+\sqrt{4d-3}}{2} \\ \text{ou} \\ \lambda = \dfrac{-1-\sqrt{4d-3}}{2} \end{cases}$$

Conclusion : les autres valeurs propres possibles de A sont $\dfrac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{4d-3}}{2}$.

Partie 5 : confirmation des valeurs propres de A

On définit la trace d'une matrice carrée M, notée $\mathrm{tr}(M)$, comme étant la somme de ses éléments diagonaux et on admet que, si M et N sont deux matrices carrées de même format, on a $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$.

12. 12.a. Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.

Soient M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, que l'on considère ensuite, telle que $M = PNP^{-1}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(M) &= \mathrm{tr}(PNP^{-1}) && \text{propriété admise} \\ &= \mathrm{tr}(PP^{-1}N) && \text{propriété admise} \\ &= \mathrm{tr}(N) \end{aligned}$$

Conclusion : deux matrices semblables ont la même trace.

12.b. Utiliser la question 9. pour montrer par l'absurde qu'au moins un des réels b ou c est effectivement valeur propre de A.

Supposons que ni b ni c n'est valeur propre de A.
D'après ce qui précède, on sait que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{b; c; d\}$. On obtient alors que d est la seule valeur propre de A.
Or, d'après la question 9., la matrice A est diagonalisable.
Ainsi, on obtient, de façon analogue à ce qui a été fait en question 1.b. :

$$A = dI_n \quad : \quad \text{absurde car } G \text{ est connexe}$$

Conclusion : un des réels b ou c est valeur propre de A.

On note Δ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A.

13. Montrer que Δ comporte un seul élément diagonal égal à d, les autres étant égaux à b ou à c.

D'après la question 11.b., l'espace propre de A associé à la valeur propre d est de dimension 1.

Conclusion : Δ comporte un seul élément diagonal égal à d, les autres étant égaux à b ou à c (selon que b et/ou c est valeur propre de A).

14. Justifier, grâce à l'égalité $D = 2$, que l'on ne peut pas avoir $d = 1$.

Puisque $D = 2$, il existe une chaîne $r - s - t$ avec r, s, t trois sommets distincts du graphe.
Ainsi :

$$\deg(s) \geqslant 2$$

et donc

$$d \geqslant 2$$

Conclusion : $d \neq 1$.

15. On suppose que le réel b est la seule valeur propre de A autre que d.

15.a. Montrer, en considérant la trace de Δ, que l'on a $d + (n-1)b = 0$.

- Puisque b est la seule autre valeur propre de A et que la valeur propre d n'apparaît qu'une fois dans Δ, on en déduit que Δ contient un d et $n-1$ b.
  Par conséquent :
  $$\mathrm{tr}(\Delta) = d + (n-1)b$$
- Les matrices Δ et A sont semblables, ainsi, d'après la question 12.a. :
  $$\mathrm{tr}(\Delta) = \mathrm{tr}(A)$$
- Enfin, puisque le graphe G ne contient aucune boucle, les coefficients diagonaux de A sont nuls ; d'où :
  $$\mathrm{tr}(A) = 0$$

Conclusion : $d+(n-1)b=0$.

15.b. En déduire que $d-2=d\sqrt{4d-3}$.

D'après la question précédente :

$$d+(n-1)b=0$$

Or $n=d^2+1$. D'où :

$$d+d^2b=0$$

D'où, puisque $d\neq 0$:

$$1+db=0$$

Autrement dit, par définition de b :

$$1+d\frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}=0$$

Conclusion : $d-2=d\sqrt{4d-3}$.

15.c. En élevant au carré, exhiber une contradiction concernant la valeur de d.

On obtient :

$$d^2-4d+4=d^2(4d-3)$$

D'où :

$$4d^3-4d^2+4d-4=0$$

Autrement dit :

$$d^3-d^2+d-1=0$$

Or :

$$d^3-d^2+d-1=(d-1)(d^2+1)$$

Pourquoi ?

1 est racine de X^3-X^2+X-1, on peut donc factoriser ce polynôme par $X-1$...

On obtient :

$$(d-1)(d^2+1)=0 \quad : \quad \text{absurde car } d\neq 1\text{, donc } (d-1)(d^2+1)\neq 0\,!$$

Conclusion : b ne peut pas être la seule autre valeur propre de A que d.

16. Montrer que les valeurs propres de A sont d, b et c.

On sait déjà que :

- $\mathrm{Sp}(A)\subset\{b;c;d\}$;
- d est valeur propre de A ;
- d n'est pas la seule valeur propre de A et b n'est pas la seule autre valeur propre de A... Donc c est aussi valeur propre de A.

Démontrons que c n'est pas la seule autre valeur propre de A que d.
Par l'absurde, on suppose que c'est le cas.
Dans ce cas, en procédant comme en question 15.a. :

$$d+(n-1)c=0$$

Ce qui donne :

$$1+d\frac{-1-\sqrt{4d-3}}{2}=0$$

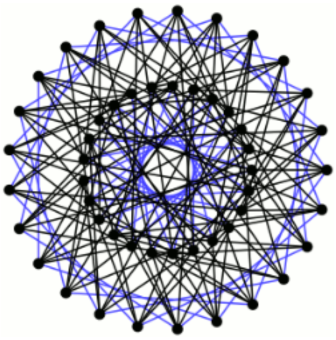
D'où :

$$d-2=-d\sqrt{4d-3}$$

Or, d'après la question 14., $d\geqslant 2$. D'où $-d\sqrt{4d-3}<0$: absurde car $d-2=-d\sqrt{4d-3}$.
Par conséquent, c n'est pas la seule autre valeur propre de A que d ; donc b est également valeur propre de A.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(A)=\{b;c;d\}$.

Remarque. Il est prouvé que les seules valeurs possibles de d sont $d = 2$, $d = 3$, $d = 7$ et $d = 57$, mais à ce jour, l'existence des graphes de Moore n'a été démontrée que pour $d = 2$, $d = 3$ et $d = 7$.
Voici le graphe de Moore correspondant à $d = 7$, appelé aussi graphe de Hoffman-Singleton :



★★★★★★★ Fin ★★★★★★★