On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies **numpy**, **mathplotlib.pyplot** et **numpy.random** de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import matplotlib.pyplot as plt` et `import numpy.random as rd`.

EXERCICE 1

On considère un nombre réel a strictement supérieur à 1, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = a$ et par la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

1. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle retourne la valeur de u_n pour des valeurs données de n et de a :

```python
def suite_u(a,n):
    u=...
    for k in range(1,n+1):
        u=...
    return u
```

2. Montrer que si l'on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\ell = 1$.
3. 3.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   3.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a$.
   3.c. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. À l'aide de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la question précédente, préciser laquelle des quatre propositions suivantes est vraie et justifier l'équivalent choisi :

$$❶\ u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad ❷\ u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2 \quad ; \quad ❸\ u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2} \quad ; \quad ❹\ u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n}$$

5. 5.a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}$$

   5.b. En déduire, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ en fonction de a et u_{n+1}.
   5.c. Conclure que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de a.

   Dans toute la suite, on suppose que $a = 2$.
6. 6.a. Montrer que l'on définit bien la loi d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{u_n}$$

   6.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on a $2^n(2^n - 1) + 1 \geqslant 2^{n+1}$.
   6.c. En déduire que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on a l'inégalité $u_n \geqslant 2^n$ puis vérifier que cette dernière inégalité reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
   6.d. Établir que X possède une espérance et une variance que l'on ne cherchera pas à calculer.

EXERCICE 2

On se propose de trouver, de deux façons différentes, les fonctions f et g, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f(0) = 1$, $g(0) = 1$, et qui sont solutions du système différentiel :

$$(S) : \forall x \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \end{array} \right.$$

1. 1.a. Justifier que ce problème possède un seul couple (f, g) solution.
   1.b. Montrer que f et g sont 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

   Dans la suite, (f, g) désigne le couple solution de (S).
2. **Première méthode utilisant f''.**

2.a. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y'' - 6y' + 9y = 0$.
2.b. Donner la valeur de $f'(0)$.
2.c. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.
2.d. En déduire l'expression de $g(x)$ pour tout réel x.

Dans les questions 3. et 4., on propose une deuxième méthode utilisant une fonction auxiliaire.

3. On pose $h = f + g$.

3.a. Montrer que $(S) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$.

3.b. Donner la valeur de $h(0)$ puis résoudre l'équation différentielle $h' = 3h$ et déterminer $h(x)$ pour tout réel x.

3.c. En déduire que $(S) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4\mathrm{e}^{3x} \\ (f+g)(x) = 2\mathrm{e}^{3x} \end{cases}$.

4. On note (ED) l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R},\ y' = 3y - 4\mathrm{e}^{3x}$.

4.a. Déterminer le réel a tel que la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = ax\mathrm{e}^{3x}$, soit une solution particulière de (ED).
4.b. En déduire $f(x)$ pour tout réel x.
4.c. Donner finalement les fonctions f et g cherchées.

5. 5.a. Écrire des fonctions **Python** d'en-têtes `def f(x)` et `def g(x)` renvoyant respectivement $f(x)$ et $g(x)$.

5.b. Écrire un script **Python** utilisant `np.arange` ou `np.linspace` et permettant le tracé des courbes de f et g sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$, θ étant un réel élément de $[5, 7]$.
On dispose de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, mutuellement indépendantes et de même loi que X.

1. On note F la fonction de répartition de X, $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

1.a. Rappeler l'expression explicite de $F(x)$ en fonction de x.
1.b. Donner sans démonstration les expressions de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de θ.

2. On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire.

2.a. Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n.
2.b. En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité f_n de Y_n.

3. On rappelle que `rd.random(n)` renvoie, sous forme de vecteur, une simulation **Python** de n variables aléatoires à densité, indépendantes, et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

3.a. Montrer que, si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors θU suit la loi uniforme sur $[0, \theta]$.
3.b. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n :

```python
def var_Y(theta,n):
    X=...
    Y=...
    return Y
```

On suppose dans la suite que θ est inconnu et on se propose de l'estimer.

4. 4.a. Montrer que Y_n possède une espérance et donner sa valeur.
4.b. Montrer que Y_n possède une variance et vérifier que l'on a :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

5. On pose $Z_n = \dfrac{n+1}{n} Y_n$.

5.a. Montrer que Z_n est un estimateur de θ et que $\mathbb{E}(Z_n) = \theta$.
5.b. Calculer la variance de Z_n.

6. 6.a. Justifier que : $\forall n \geqslant 47,\ \dfrac{\theta^2}{n+2} \leqslant 1$.
6.b. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire Z_n, puis montrer que si n est supérieur ou égal à 47, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big(|Z_n - \theta| \leqslant \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

6.c. En déduire que, si n est supérieur ou égal à 2000, l'intervalle $\left[Z_n - \dfrac{1}{10}, Z_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour θ, avec un niveau de confiance au moins égal à 0,95.

7. On considère le code **Python** suivant :

```python
def mystere(theta):
    c=0
    for k in range(1000):
        y=var_Y(theta,2000)
        z=2001*y/2000
        if np.abs(z-theta)<=0.1:
            c=c+1
    return c/1000

print(mystere(6))
```

Expliquer le fonctionnement de ce code et préciser ce que représente le résultat affiché.

Exercice 4

Dans ce problème, le mot « graphe » désigne un graphe simple (c'est-à-dire sans boucles et sans arêtes multiples), connexe (chaque sommet est relié à au moins un autre), non orienté et non pondéré.
Dans tout l'exercice, d désigne un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Rappels, notations et définitions

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
L'ordre n d'un graphe est le nombre de ses sommets.
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
On appelle degré maximal d'un graphe, noté d, le maximum des degrés de ses sommets.
Deux sommets sont voisins (ou adjacents) s'ils sont reliés par une arête (c'est-à-dire une chaîne de longueur 1).
On appelle distance entre deux sommets d'un graphe, la longueur minimale de toutes les chaînes reliant ces deux sommets.
On rappelle que le diamètre D d'un graphe est la plus grande des distances séparant chaque paire de sommets distincts.
On note $E_n(d)$ l'ensemble des graphes d'ordre n de diamètre $D = 2$ et de degré maximal d.

Partie 1 : préliminaires

1. 1.a. Montrer que le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - nx$ est un polynôme annulateur de J_n.

1.b. Rappeler pourquoi J_n est diagonalisable puis montrer par l'absurde que J_n possède deux valeurs propres qui sont 0 et n.

1.c. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a l'équivalence :

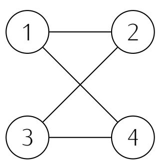
$$J_n X = nX \iff \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

1.d. En déduire que le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est de dimension 1 et engendré par le vecteur U de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont tous les éléments sont égaux à 1.

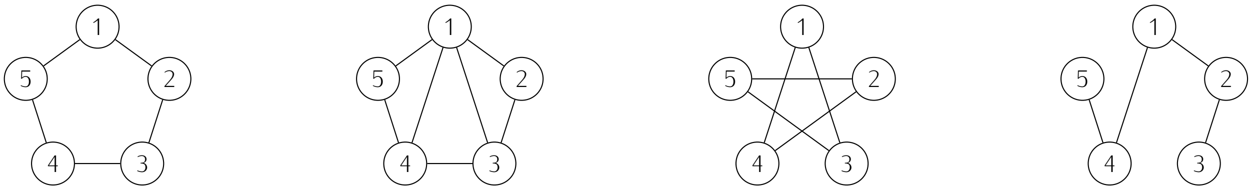
Partie 2 : quelques généralités

2. Étude d'exemples.

2.a. Justifier que le graphe suivant est élément de $E_4(2)$.



2.b. Parmi les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 suivants, quels sont les deux graphes éléments de $E_5(2)$? Justifier la réponse pour chaque graphe.



G_1 G_2 G_3 G_4

3. Soit G un graphe de $E_n(d)$ et un sommet s fixé de ce graphe.
   - 3.a. Montrer que s possède d voisins au maximum.
   - 3.b. Utiliser le fait que $D = 2$ pour établir que le nombre m de sommets de G, autres que s, est au maximum égal à $d + d(d-1)$.
   - 3.c. Conclure que l'on a : $n \leqslant d^2 + 1$.

Les graphes de $E_n(d)$ pour lesquels on a l'égalité $n = d^2 + 1$ sont appelés graphes de Moore.

Dans toute la suite, on considère un graphe de Moore G (on a donc $n = d^2 + 1$) ainsi que sa matrice d'adjacence $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on rappelle que, pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j}$ désigne le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Partie 3 : étude de la matrice d'adjacence d'un graphe de Moore

On rappelle que, par définition du produit matriciel, si p, q, r sont trois entiers naturels non nuls et si on a $E = (e_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $F = (f_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant q} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, alors $EF \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et, en notant $EF = (g_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, on a, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$, $g_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} e_{i,k} f_{k,j}$.

On admet que chaque sommet de G est de degré d et est relié à tout sommet distinct par exactement une chaîne qui est de longueur 1 ou 2.

On pose $B = A^2$ avec $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et on rappelle que $b_{i,j}$ est le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets i et j.

4. Rappeler pourquoi A est symétrique.
5. 5.a. Justifier que, pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, on a $a_{i,j} \in \{0, 1\}$.
   - 5.b. Expliquer rapidement pourquoi $a_{i,i} = 0$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$.
6. 6.a. Utiliser le rappel fait au début de cette partie pour montrer que :
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \;\; b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k}$$
   - 6.b. Montrer que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ et en déduire que $b_{i,i} = d$.
7. 7.a. Établir que, pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$, on a :
$$\begin{cases} a_{i,j} = 0 \\ b_{i,j} = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_{i,j} = 1 \\ b_{i,j} = 0 \end{cases}$$
   - 7.b. En déduire, pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$, la valeur de $b_{i,j} + a_{i,j}$.
   - 7.c. Donner, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la valeur de $b_{i,i} + a_{i,i}$.
8. Déduire des questions 7.b. et 7.c. la relation :
$$A^2 + A = (d-1)I_n + J_n$$

Partie 4 : valeurs propres possibles de A

On rappelle que U est le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

9. Justifier que A est diagonalisable.
10. Une première valeur propre de A.
    - 10.a. Utiliser le rappel sur le produit matriciel ainsi que la question 6. pour montrer que $AU = dU$.
    - 10.b. En déduire que d est valeur propre de A.
11. Recherche des autres valeurs propres possibles de A.
    Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
    - 11.a. Établir que l'on a :
$$J_n X = (\lambda^2 + \lambda - d + 1)X$$
    - 11.b. Montrer que, si $\lambda = d$, alors $X \in \text{Vect}(U)$ et en déduire que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\lambda = d$ est de dimension 1.
    - 11.c. Utiliser la relation $n = d^2 + 1$ pour résoudre l'équation $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = n$, d'inconnue λ, puis montrer qu'une seule des solutions est effectivement valeur propre de A et préciser laquelle.
    - 11.d. Expliquer pourquoi, si $\lambda \neq d$, on a $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$.
    - 11.e. En déduire que les autres valeurs propres possibles de A sont :
$$b = \frac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{-1 - \sqrt{4d-3}}{2}$$

Partie 5 : confirmation des valeurs propres de A

On définit la trace d'une matrice carrée M, notée $\mathrm{tr}(M)$, comme étant la somme de ses éléments diagonaux et on admet que, si M et N sont deux matrices carrées de même format, on a $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$.

12. 12.a. Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.

    12.b. Utiliser la question 9. pour montrer par l'absurde qu'au moins un des réels b ou c est effectivement valeur propre de A.

    On note Δ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A.

13. Montrer que Δ comporte un seul élément diagonal égal à d, les autres étant égaux à b ou à c.

14. Justifier, grâce à l'égalité $D = 2$, que l'on ne peut pas avoir $d = 1$.

15. On suppose que le réel b est la seule valeur propre de A autre que d.

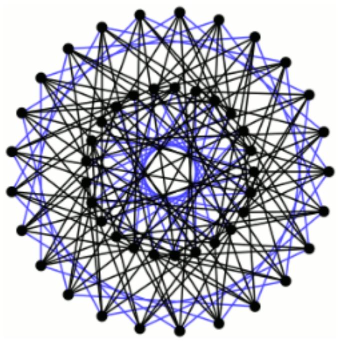
    15.a. Montrer, en considérant la trace de Δ, que l'on a $d + (n-1)b = 0$.

    15.b. En déduire que $d - 2 = d\sqrt{4d-3}$.

    15.c. En élevant au carré, exhiber une contradiction concernant la valeur de d.

16. Montrer que les valeurs propres de A sont d, b et c.

Remarque. Il est prouvé que les seules valeurs possibles de d sont $d = 2$, $d = 3$, $d = 7$ et $d = 57$, mais à ce jour, l'existence des graphes de Moore n'a été démontrée que pour $d = 2$, $d = 3$ et $d = 7$.
Voici le graphe de Moore correspondant à $d = 7$, appelé aussi graphe de Hoffman-Singleton :



★★★★★★★ Fin ★★★★★★★