Exercice 1

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}.$$

1. 1.a. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   1.b. Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   1.c. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.
2. Compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 10^6$:

```python
import numpy as np
u=1
n=0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

Partie B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x e^{1/x}.$$

3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.
5. Soit $x > 0$.
   5.a. Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.
   5.b. En déduire que :
   $$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$
6. Soit $x \geqslant 1$.
   6.a. Établir séparément les inégalités suivantes :
   $$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leqslant e$$
   6.b. En déduire que :
   $$(\star) \quad \frac{1}{2x} \leqslant f(x) - (x+1) \leqslant \frac{e}{x}$$
7. Montrer que $f(x) = x + 1 + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Représenter sur un même dessin la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9. 9.a. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$.
   9.b. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$
10. 10.a. À l'aide de l'encadrement $(*)$ montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
    $$1 + \frac{1}{2u_k} \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \frac{e}{u_k}$$

10.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir :

$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leqslant u_n - 1 \leqslant n + \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

puis :

$$1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \leqslant u_n - n \leqslant 1 + \mathrm{e}\ln(u_n)$$

11. 11.a. Justifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

11.b. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

12. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A : Réduction simultanée et spectre

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $E = \mathrm{Vect}(I, J, K)$.

1. Montrer que (I, J, K) est une base de E, en déduire la dimension de E.
2. Justifier sans calcul que les matrices J et K sont diagonalisables.
3. 3.a. Exprimer la matrice J^3 comme un multiple de J.

   3.b. En déduire que les valeurs propres de J appartiennent à l'ensemble $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.
4. On pose :

$$U_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   4.a. Vérifier que U_1 et U_2 sont des vecteurs propres de J.

   4.b. Déterminer un vecteur propre U_3 de J associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.
5. 5.a. Justifier que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   5.b. Donner une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

6. 6.a. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est aussi une base de vecteurs propres de K.

   6.b. Déterminer la matrice $P^{-1}KP$.
7. Soit M une matrice de E de coordonnées $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dans la base (I, J, K).

   7.a. Exprimer $P^{-1}MP$ sous la forme d'un tableau de nombres dépendant de a, b et c.

   7.b. En déduire les valeurs propres de M.
8. On considère l'application linéaire $s : E \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$s(M) = s(aI + bJ + cK) = (a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c)$$

   8.a. Donner la matrice S de s relativement à la base (I, J, K) de E et à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   8.b. Montrer que l'application linéaire s est bijective.

Partie B : Un algorithme de coloration des graphes

Soit $n \geqslant 1$ un entier, on considère un graphe non orienté G donné par sa matrice d'adjacence $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{S} = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ l'ensemble des sommets de G, dans les programmes informatiques on confondra un sommet s_i avec son numéro i. On dit que deux sommets sont voisins s'ils sont distincts et reliés par une arête.

Une *coloration* de G est une application $c : \mathscr{S} \to \mathbb{N}$ telle que $c(s_i) \neq c(s_j)$ si les sommets s_i et s_j sont voisins. Dans cette définition, $\mathbb{N}$ représente l'ensemble des "couleurs" disponibles, la coloration c attribue à chaque sommet une "couleur" de sorte que deux sommets voisins soient de "couleurs" différentes.

Le graphe G admet la *coloration triviale* donnée par $c(s_i) = i$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il peut cependant admettre une coloration nécessitant moins de n "couleurs". Ainsi, le graphe à cinq sommets ci-dessous admet la coloration à trois "couleurs" définie par : $c(s_0) = 0, c(s_1) = 1, c(s_2) = 0, c(s_3) = 1, c(s_4) = 2$.

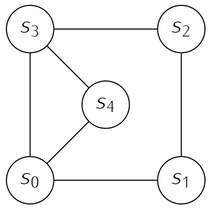


Figure 1 : un graphe d'ordre 5

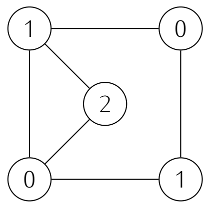


Figure 2 : le graphe colorié avec trois "couleurs" (0,1 et 2)

Les questions suivantes ont pour but de réaliser un programme Python qui renvoie une coloration d'un graphe G quelconque, en essayant de minimiser le nombre de couleurs utilisées. On commence par rédiger deux fonctions auxiliaires, "voisins" et "**min_ext**", qui serviront pour la fonction finale "**coloration**". On suppose que la matrice d'adjacence A de G est définie à l'aide de la commande "**np.array**".

9. Recopier et compléter le programme **Python** ci-dessous de manière à ce qu'il définisse une fonction "**voisins**", prenant en arguments la matrice d'adjacence A et un entier $i \in [\![0; n-1]\!]$, et renvoyant la liste des sommets voisins de s_i.

```python
def voisins(A,i):
    n=len(A[i])
    V=[]
    for j in range(n):
        if j!=i and ... :
            V.append(...)
    return V
```

10. Rédiger en **Python** une fonction "**min_ext**" qui prend en argument une liste d'entiers naturels L, et qui renvoie le plus petit entier naturel n'appartenant pas à L (par exemple, si $L = [1, 0, 3]$, alors la commande "**min_ext(L)**" renvoie 2). On pourra transcrire en langage **Python** l'algorithme suivant :

On affecte à une variable m la valeur 0. Tant que m appartient à la liste L : |On augmente de 1 la valeur de m. On renvoie m.

11. À l'aide des fonctions introduites précédemment on rédige maintenant une fonction «coloration» prenant en argument la matrice d'adjacence $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un graphe G, et renvoyant une coloration de G sous la forme d'une liste d'entiers $C = [C_0, \ldots, C_{n-1}]$, où C_i désigne la "couleur" du sommet s_i pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

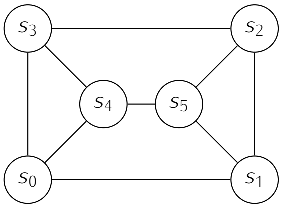
On construit cette fonction selon l'algorithme glouton ci-dessous :

On affecte à la variable n le nombre de sommets de G.
On affecte à la variable C la liste $[0, 1, \ldots, n-1]$.
Pour i allant de 1 à $n-1$:
    |On affecte à la variable **C_voisins** la liste des "couleurs" des sommets voisins de s_i.
    |On affecte à C_i le plus petit entier naturel qui n'est pas élément de la liste **C_voisins**.
On renvoie la liste C.

Recopier et compléter la fonction "**coloration**" ci-dessous.

```python
def coloration(A):
    n=len(A[0])
    C=...
    for i in range(1,n):
        C_voisins=[... for j in ...]
        C[i]=min_ext(...)
    return C
```

12. On note A la matrice d'adjacence du graphe G représenté figure 3 ci-dessous.



   12.a. Donner la liste obtenue en exécutant la commande "`coloration(A)`".

   12.b. Le graphe G admet-il une coloration à trois couleurs ? Si oui, exhiber une telle coloration.

Exercice 3

Les parties B, C et D de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.
Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : La variable aléatoire V

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$, on note V la variable aléatoire définie par

$$V = \frac{1}{\sqrt{U}}$$

1. 1.a. Justifier que V est à valeurs dans $[1, +\infty[$.

   1.b. Montrer que la fonction de répartition de V est donnée par :

$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

   1.c. En déduire que V est une variable aléatoire à densité, et donner une densité f_V de V.

2. Déterminer si V admet une espérance et une variance, calculer leurs valeurs éventuelles.

La variable aléatoire V suit une *loi de Pareto*, les compagnies d'assurance utilisent cette loi pour modéliser les montants des sinistres. Afin d'établir des prévisions, un actuaire étudie une suite $(V_i)_{i \geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi que V, la variable aléatoire V_i représente le coût du i-ième sinistre survenu à partir d'un instant donné.

Partie B : Loi du sinistre le plus coûteux

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit une variable aléatoire M_n en posant :

$$M_n = \max(V_1, \ldots, V_n)$$

On note F_n la fonction de répartition de M_n.

3. 3.a. Montrer que $F_n = (F_V)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

   3.b. Calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   3.c. Justifier que la suite $(M_n)_{n \geqslant 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire.

On considère une variable aléatoire W dont la fonction de répartition F_W est définie par :

$$F_W(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$.

4. 4.a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour tout $x > 0$.

   4.b. Conclure quant à la convergence en loi de la suite $\left(\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geqslant 1}$.

Partie C : Manipulation d'une base de données

La compagnie d'assurance tient à jour une table "**sinistres**" contenant des informations sur tous les sinistres qu'elle a indemnisés entre les années 2000 et 2024. Les attributs (colonnes) de cette table sont :

- **id** (de type INTEGER) : numéro d'identification du sinistre,
- **annee** (de type INTEGER) : année durant laquelle est survenu le sinistre,
- **mois** (de type TEXT) : mois durant lequel est survenu le sinistre (on écrit le mois en minuscules),
- **montant** (de type INTEGER) : montant de l'indemnisation versée à l'assuré (en euros).

5. Rédiger une requête SQL permettant d'afficher :
   5.a. La liste des montants d'indemnisation des sinistres de l'année 2024.
   5.b. Le mois et l'année de tous les sinistres dont le montant dépasse un million.
6. Le sinistre numéro 7652 a eu lieu en avril 2025 et a été indemnisé à hauteur de 1540 euros. Rédiger une requête SQL ajoutant à la table "**sinistre**" une ligne correspondant à ce sinistre.

Partie D : Nombre de sinistres graves

On rappelle que $(V_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi que V (voir partie A). On suppose que le nombre de sinistres se produisant au cours d'une année est donné par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On s'intéresse au nombre de sinistres dont le coût dépasse un certain montant $A > 1$. On note ainsi T la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $\{V_1, \dots, V_N\}$ prenant une valeur supérieure à A, formellement :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \ T(\omega) = \big|\, \{ i \in [\![1, N(\omega)]\!]\ ;\ V_i(\omega) > A \}\, \big|$$

où la notation $|.|$ désigne le cardinal.

7. Exprimer $\mathbb{P}\big([N = n]\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Quel est l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par T ?
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   9.a. Justifier que la loi conditionnelle de T sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{A^2}\right)$.
   9.b. Donner la valeur de $\mathbb{P}_{[N=n]}\big([T = k]\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, vous distinguerez les cas $k \leqslant n$ et $k > n$.
10. Calculer $\mathbb{P}\big([T = k]\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis reconnaître la loi de T.
11. En moyenne, combien de sinistres avec un coût supérieur à A surviennent en un an ?

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★