Dans tout le sujet, les questions d'informatique portent sur le langage Python, on suppose que l'on a importé différentes librairies à l'aide des commandes suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

EXERCICE 1

PARTIE A : ÉTUDE D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES

On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan :

$$\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 1 + xy > 0\right\} \ ;$$

et on considère la fonction de deux variables réelles f définie sur l'ouvert $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathscr{D}, \qquad f(x, y) \ = \ x + \ln(1 + xy).$$

1\. **1.a.** Calculer le gradient $\nabla f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$.

> **☞ Rappel...**
> **Justification d'un caractère [...]**
> Si :
> ✓ u est [...] sur I **à valeurs dans** J,
> ✓ f est [...] sur J ;
> Alors : $f \circ u$ est [...] sur I.

✓ La fonction $(x, y) \longmapsto 1 + xy$ est polynomiale, donc elle est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$; et, par définition de $\mathscr{D}$, cette fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathscr{D}$;

✓ la fonction ln est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par composition et somme, la fonction f est donc $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ et, pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$:

$$\partial_1 f(x, y) = 1 + \frac{y}{1 + xy} \quad ; \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{x}{1 + xy}$$

Conclusion : $\forall (x, y) \in \mathscr{D}, \ \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{y}{1 + xy} \\ \dfrac{x}{1 + xy} \end{pmatrix}$.

1.b. Montrer que f admet un unique point critique (x_0, y_0) dans $\mathscr{D}$.

Soit $(x, y) \in \mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y) = 0_{2,1} &\iff \begin{cases} 1 + \dfrac{y}{1 + xy} = 0 \\ \dfrac{x}{1 + xy} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1 + \dfrac{y}{1 + xy} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1 + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\
&\iff (x, y) = (0, -1)
\end{aligned}$$

Conclusion : f possède un unique point critique sur $\mathscr{D}$: $(0, -1)$.

1.c. Calculer la matrice hessienne $\nabla^2 f(x_0, y_0)$, puis déterminer la nature du point critique (x_0, y_0).

• D'après la question **1.a.**, f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$; et, pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$:

$$\partial_{1,1} f(x, y) = \frac{-y^2}{(1 + xy)^2} \quad ; \quad \partial_{1,2} f(x, y) = \frac{1 + xy - xy}{(1 + xy)^2} = \frac{1}{(1 + xy)^2}$$

$$\partial_{2,1} f(x, y) = \frac{1 + xy - yx}{(1 + xy)^2} = \frac{1}{(1 + xy)^2} \quad ; \quad \partial_{2,2} f(x, y) = \frac{-x^2}{(1 + xy)^2}$$

> **Remarque**
> Je préfère ne pas utiliser le théorème de Schwarz pour calculer $\partial_{2,1} f(x, y)$: ainsi, en retrouvant $\partial_{1,2} f = \partial_{2,1} f$ (théorème de Schwarz, car f est $\mathscr{C}^2$), cela valide les calculs effectués.

D'où :

$$\nabla^2 f(, 0, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminons les valeurs propres de $\nabla^2 f(,0,-1)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}\big(\nabla^2 f(,0,-1)\big) &\iff \nabla^2 f(,0,-1) - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible}\\
&\iff \det\left(\nabla^2 f(,0,-1) - \lambda I_2\right) = 0\\
&\iff (-1-\lambda) \times (-\lambda) - 1 = 0\\
&\iff \lambda^2 + \lambda - 1 = 0\\
&\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ \lambda = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Sp}\big(\nabla^2 f(,0,-1)\big) = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Or $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\sqrt{5} > 1$, donc $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$.

Conclusion : f possède un point col en $(0,-1)$.

♥ Astuce du chef ♥

I n'est pas nécessaire de calculer les valeurs propres pour avoir leur signe...

• λ est VP de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ssi $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$
• on rappelle que le produit des racines du polynômes $X^2 - sX + p$ est égal à p et la somme à s...
Ainsi :
• si $ad - bc > 0$, alors les deux VP sont non nulles et de même signe, signe donné par le signe de $a + d$
• si $ad - bc < 0$, alors les deux VP sont non nulles et de signes opposés
• si $ad - bc = 0$, alors au moins une des VP est nulle

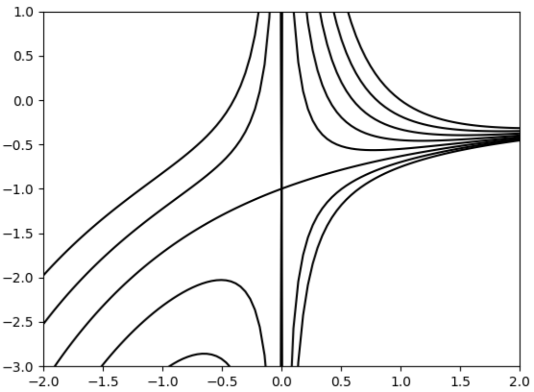
Soit $k \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* k de la fonction f le sous–ensemble du plan $\{(x,y) \in \mathscr{D}\ ;\ f(x,y) = k\}$.

2. 2.a. Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit $(x,y) \in \mathscr{D}$ avec $x \neq 0$, montrer que :

$$f(x,y) = k \iff y = \frac{e^{k-x} - 1}{x}.$$

$$\begin{aligned}
f(x,y) = k &\iff x + \ln(1+xy) = k\\
&\iff \ln(1+xy) = k - x\\
&\iff 1 + xy = e^{k-x} && \text{injectivité de exp sur } \mathbb{R}\\
&\iff y = \frac{e^{k-x}-1}{x} && x \neq 0
\end{aligned}$$

2.b. Le graphique ci-dessous, obtenu à l'aide d'un programme **Python**, représente certaines lignes de niveau de la fonction f.



Recopier et compléter la ligne 5 du programme ci-dessous afin qu'il produise le graphique ci–dessus. À la lecture du programme, préciser pour quelles valeurs de k la ligne de niveau k apparaît sur le graphique.

```
1 K = [-0.4+i/5 for i in range(8)]
2 X = np.linspace(-2,2,100)
3
4 for k in K:
5     M = [...... for x in X]
6     plt.plot(X,M,color='black')
7     plt.xlim(-2,2)
8     plt.ylim(-3,1)
9 plt.show()
```

- Commençons par vérifier que l'on peut utiliser le résultat de la question précédente en justifiant que 0 n'appartient pas à la liste `X`.
Par définition de `linspace(-2,2,100)`, la liste `X` contient 100 valeurs équiréparties entre -2 et 2.
Autrement dit, `X` contient les $-2 + k\dfrac{4}{99}$ avec k parcourant $[\![0;99]\!]$. Or, pour tout $k \in [\![0;99]\!]$:

$$\begin{aligned} -2 + k\frac{4}{99} = 0 &\iff 4k = 198 \\ &\iff k = \frac{99}{2} \end{aligned}$$

Et $\dfrac{99}{2} \notin [\![0;99]\!]$. Ainsi $0 \notin \left\{-2 + \dfrac{4k}{99},\ k \in [\![0;99]\!]\right\}$: la liste `X` ne contient pas 0.

> **Conclusion :** D'après la question précédente, on complète la ligne 5 ainsi :
> `M=[(np.exp(k-x)-1)/x for x in X]`

- La liste `K` est écrite en compréhension et est égale à `[-0.4,-0.2,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1]`.

> **Conclusion :** Les lignes de niveau représentées sont les lignes de niveau k, avec $k \in \{-0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$.

Remarque
Ceci n'était sans doute pas attendu, mais aurait pu être demandé.

★Subtil...★
• `linspace(a,b,n)` renvoie la liste des n valeurs (dans l'ordre croissant) équiréparties entre a et b : les réels de l'ensemble

$$\left\{a + k\frac{b-a}{n-1},\ k \in [\![0;n-1]\!]\right\}$$

On vérifie rapidement que cet ensemble contient k valeurs, allant de a à b ; et que ces valeurs sont équiréparties (la différence de deux valeurs consécutives vaut toujours $\dfrac{b-a}{n-1}$, qui ne dépend pas de k).
• On peut démontrer, de la même façon que, `linspace(a,b,n)` contient $\dfrac{a+b}{2}$ si, et seulement si, n est impair...

Partie B : Étude de la ligne de niveau zéro

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}.$$

3. Donner le signe de g sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 > 0 &\iff e^{-x} > 1 \\ &\iff -x > 0 \quad \text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}^{+*} \\ &\iff x < 0 \end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{-x} - 1$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$-$	

4. Montrer que la fonction g admet un prolongement continu en 0.

✓ $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \underset{u \to 0}{o}(u^2)$
✓ $\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$.

D'où :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{-x + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)}{x} \\ &= -1 + \frac{x}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = -1$$

> **Conclusion :** la fonction g admet un prolongement continu en 0 en posant $g(0) = -1$.

Remarque
Utiliser l'équivalent $e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$ suffit pour obtenir $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} -1$ et permet de conclure.

On note encore g le prolongement continu de g à $\mathbb{R}$.

5. Montrer que g est dérivable en 0, et préciser la valeur de $g'(0)$.

On a trouvé en question précédente : $g(x) = -1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

Conclusion : g admet un développement limité d'ordre 1 en 0, elle est donc dérivable en 0 ; et $g'(0) = \frac{1}{2}$.

> **☞ Rappel...**
> f est dérivable en a si, et seulement si, elle admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ et, le cas échéant :
> $f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\underset{x\to a}{o}(x-a)$

Autre méthode

J'ai fait le choix du développement limité en question précédente puisqu'il permet également de répondre à cette question.
On peut cependant travailler sur le taux d'accroissement...
Pour tout $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} &= \frac{\frac{e^{-h}-1}{h}+1}{h}\\ &= \frac{\frac{e^{-h}-1+h}{h}}{h}\\ &= \frac{e^{-h}-1+h}{h^2}\\ &= \frac{1-h+\frac{h^2}{2}-1+h+\underset{h\to 0}{o}(h^2)}{h^2}\\ &= \frac{1}{2}+\underset{h\to 0}{o}(1)\end{aligned}$$

$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+\underset{u\to 0}{o}(u^2)$ et $\lim\limits_{h\to 0} -h = 0$

Ainsi :

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{1}{2}$$

Conclusion : g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{2}$.

6. 6.a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{-e^{-x}x-(e^{-x}-1)}{x^2}\\ &= \frac{1-e^{-x}-xe^{-x}}{x^2}\end{aligned}$$

6.b. Montrer que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Posons $h : x \longmapsto 1-e^{-x}-xe^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}h'(x) &= e^{-x}-\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)\\ &= xe^{-x}\end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

> **Remarque**
> Les limites de h ne sont pas demandées, et pas nécessaires.

Ainsi h admet un minimum égal à 0, atteint uniquement en 0. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h(x) > 0$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) > 0$.

6.c. Déterminer soigneusement les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, puis dresser son tableau de variation.

- En $+\infty$:
  $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc par opérations :
  $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$
- En $-\infty$:
  Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, suffisamment proche de $-\infty$:
  $$\begin{aligned}g(x) &= \frac{e^{-x}}{x}-\frac{1}{x}\\ &= -\frac{e^{-x}}{-x}-\frac{1}{x}\end{aligned}$$
  Or :

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;
* et :
  - ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$;
  - ✓ $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ par croissances comparées.

  Ainsi, par composition :
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$$

Par opérations, on obtient :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

D'où, d'après la question précédente :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-\infty$ ↗	0

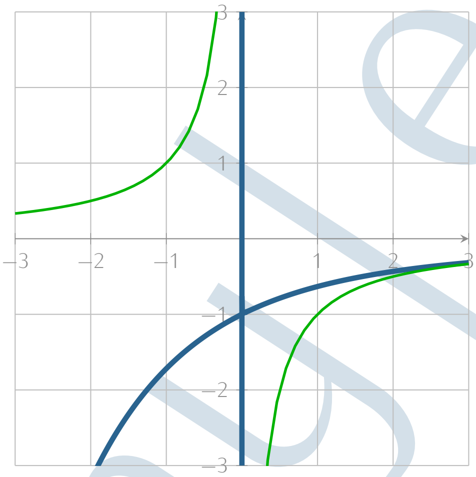
Rédaction
L'énoncé demande de justifier soigneusement" : on détaille donc bien cette croissances comparées avec la composition.

7. On suppose le plan muni d'un repère orthonormé.

7.a. Représenter sur un même dessin :

- la courbe d'équation $1 + xy = 0$ qui délimite le domaine $\mathscr{D}$;
- la ligne de niveau 0 de f qui est formée de la droite d'équation $x = 0$ et de la courbe de g.

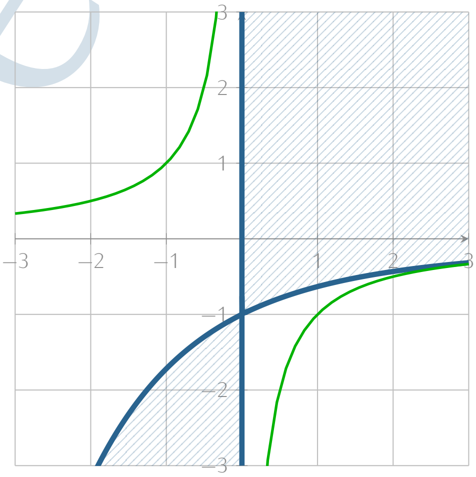
On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$1 + xy = 0 \iff y = \frac{-1}{x}$$
D'où la courbe d'équation $1 + xy = 0$ en vert et la ligne de niveau 0 de f en bleu :



7.b. La ligne de niveau 0 de la fonction f divise le domaine $\mathscr{D}$ en quatre zones, dans chacune d'elles f est de signe constant. Hachurer (sur votre dessin) les deux zones dans lesquelles f prend des valeurs positives.

Remarquons que $f(-1, 0) = 0$; ainsi $(-1, 0)$ appartient à la ligne de niveau 0 de f.
Sur chacune des quatre zones ainsi délimitées f est alors de signe constant et on a :
$$f(1, 0) = 1 > 0 \quad ; \quad f(-1, 0) = -1 < 0 \quad ; \quad f(-1, 2) = -1 + \ln(3) > 0 \quad ; \quad f(0.5, -1) = \frac{1}{2} - \ln(2) < 0$$
D'où :

Remarque
On peut raisonner un peu différemment en disant que puisque f possède un point col en $(-1, 0)$, f ne peut être de signe constant sur deux zones adjacentes parmi les quatre… seul le calcul de $f(1, 0)$ suffit alors à conclure !



Partie C : Aire de la surface délimitée par la ligne de niveau zéro

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

8. Justifier que la fonction G est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donner sa dérivée.

D'après la partie précédente, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

> **Conclusion :** d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = g(x)$.

Plus généralement...

Si on doit traiter une intégrale du type $\displaystyle\int_0^{v(x)} h(t)dt$, *ou* $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} h(t)dt$:

Puisque h est continue sur J, elle admet des primitives qui sont $\mathscr{C}^1$ sur J. Notons H l'une d'elles.
Par conséquent, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{u(x)}^{v(x)} h(t)dt \\ &= H\big(v(x)\big) - H\big(u(x)\big) \end{aligned}$$

Or :

- ✓ u est $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans J,
- ✓ H est $\mathscr{C}^1$ sur J.

Donc, par composition, $H \circ u$ est $\mathscr{C}^1$ sur I ; de même, $H \circ v$ est $\mathscr{C}^1$ sur I.
Ainsi, F est $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= v'(x)H'\big(v(x)\big) - u'(x)H'\big(u(x)\big) \\ &= v'(x)h\big(v(x)\big) - u'(x)h\big(u(x)\big) \end{aligned}$$

> **✘ Attention !**
> On rédige et on dérive ensuite parfaitement tout ce travail avec les composées !

9. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x).$$

Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x g(t)dt \\ &= \int_0^1 g(t)dt + \int_1^x g(t)dt && \text{relation de Chasles} \\ &= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t} dt \\ &= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \big[\ln(|t|)\big]_1^x && \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x) \end{aligned}$$

> **Conclusion :** pour tout $x > 0$, $G(x) = G(1) + \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x)$.

10. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ on a : $G(x) \sim -\ln(x)$.

D'après la question précédente, pour tout $x > 1$:

$$\frac{G(x)}{-\ln(x)} = 1 - \frac{G(1)}{\ln(x)} - \frac{\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt}{\ln(x)}$$

Or :

- par opérations, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{G(1)}{\ln(x)} = 0$;
- et :
  - ✓ $\forall t \geqslant 1,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$
  - ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente

donc par critère de comparaison sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est convergente. Par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est finie et donc, par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt}{\ln(x)} = 0$$

D'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{-\ln(x)} = 1$$

Conclusion : $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln(x)$.

11. Montrer que, pour $x > 0$ voisin de 0, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\ln(x) + G(1) + x + o(x).$$

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt &= -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt \\
&= -\ln(x) + G(1) - G(x) && \text{question 9.} \\
&= -\ln(x) + G(1) - \left(G(0) + xG'(0) + \underset{x\to0}{o}(x)\right) && G \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en 0 donc elle admet un } DL_1(0) \\
&= -\ln(x) + G(1) + x + \underset{x\to0}{o}(x) && G(0)=0 \text{ et } G'(0)=g(0)=-1
\end{aligned}$$

Commentaire : l'intégrale ci–dessus est égale à l'aire de la surface formée des points de $\mathscr{D}$ situés au–dessous de la ligne de niveau 0 dont l'abscisse est comprise entre $x \in]0,1[$ et 1.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle *trace* et *déterminant* les applications $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définies, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par :

$$\mathrm{tr}(M) = a + d \text{ et } \det(M) = ad - bc.$$

Partie A : Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application tr est linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\lambda M + \mu N) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda d + \mu d' \end{pmatrix} \right) \\ &= \lambda a + \mu a' + \lambda d + \mu d' \\ &= \lambda(a + d) + \mu(a' + d') \\ &= \lambda \mathrm{tr}(M) + \mu \mathrm{tr}(M') \end{aligned}$$

Conclusion : l'application tr est linéaire.

On définit une application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en posant, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = \mathrm{tr}(M)I - M$$

où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. 2.a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

✓ On a déjà, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{R}$, donc

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ \varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

✓ Soients ensuite $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + \mu N) &= \mathrm{tr}(\lambda M + \mu N)I - (\lambda M + \mu N) \\ &= \big(\lambda \mathrm{tr}(M) + \mu \mathrm{tr}(N)\big)I - \lambda M - \mu N \\ &= \lambda \varphi(M) + \mu \varphi(N) \end{aligned}$$

linéarité de la tr

Ainsi φ est une application linéaire.

Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.b. Vérifier que $\varphi(I) = I$.

On a

$$\mathrm{tr}(I) = 2$$

D'où :

$$\varphi(I) = 2I - I$$

Conclusion : $\varphi(I) = I$.

2.c. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{tr}\big(\varphi(M)\big) = \mathrm{tr}(M)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\big(\varphi(M)\big) &= \mathrm{tr}\big(\mathrm{tr}(M)I - M\big) \\ &= \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(I) - \mathrm{tr}(M) \\ &= \mathrm{tr}(M) \end{aligned}$$

linéarité de tr

$\mathrm{tr}(I) = 2$

Remarque

On peut en déduire que

$$\varphi\big(\varphi(M)\big) = M$$

Ainsi :

$$\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$$

L'application φ est donc bijective et $\varphi^{-1} = \varphi$.

Conclusion : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ \mathrm{tr}\big(\varphi(M)\big) = \mathrm{tr}(M)$.

3. **3.a.** Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a :

- $\text{tr}(E_1) = 1$, donc $\varphi(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$
- $\text{tr}(E_2) = 0$, donc $\varphi(E_2) = -E_2$
- $\text{tr}(E_3) = 0$, donc $\varphi(E_3) = -E_3$
- $\text{tr}(E_4) = 1$, donc $\varphi(E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$

Conclusion : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.b. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

On trouve :

$$A^2 = I_4$$

Conclusion : A est inversible et $A^{-1} = A$.

3.c. Déterminer le spectre de A, ainsi qu'une base de chacun de ses sous–espaces propres.

- On a trouvé $A^2 = I_4$, donc le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de A. Ainsi :

$$\text{Sp}(A) \subset \{-1; 1\}$$

Dans la suite, si $\lambda \in Sp(A)$, on notera $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A pour la valeur propre λ.

- Pour -1 :

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = -X &\iff (A + I_4)X = 0_{4,1} \\ &\iff \begin{cases} a + d = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \\ &\iff a + d = 0 \\ &\iff \begin{cases} a = -d \\ b = b \\ c = c \\ d = d \end{cases} \\ &\iff X = -d \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi -1 est valeur propre de A et :

$$E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Notons $\mathscr{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\mathscr{F}_{-1}$ est ainsi :

✓ génératrice de $E_{-1}(A)$,
✓ libre car constituée de vecteurs échelonnés.

Conclusion : -1 est valeur propre de A et la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_{-1}(A)$.

- Pour 1 :

  Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX = X &\iff (A - I_4)X = 0_{4,1} \\
&\iff \begin{cases} -a \qquad\qquad + d = 0 \\ \quad - 2b \qquad\quad\; = 0 \\ \qquad\quad - 2c \quad = 0 \\ a \qquad\qquad\;\; - d = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = d \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = d \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \\
&\iff X = d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  Ainsi 1 est valeur propre de A et :

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est ainsi :

  ✓ génératrice de $E_1(A)$,
  ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

  Conclusion : 1 est valeur propre de A et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$.

Partie B : Deux formules d'inversion

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $\varphi(M)$ comme un tableau de nombres puis établir :

$$M\varphi(M) = \det(M)I.$$

- On a $\mathrm{tr}(M) = a + d$, d'où :

$$\varphi(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Puis :

$$\begin{aligned}
M\varphi(M) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ad - bc & \\ 0 & \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\
&= \det(M)I
\end{aligned}$$

Conclusion : $M\varphi(M) = \det(M)I$.

5. 5.a. Déduire de cette égalité que M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$, et que dans ce cas

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\varphi(M).$$

Procédons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\det(M) \neq 0$.
Dans ce cas, d'après la question précédente :

$$M \times \frac{1}{\det(M)}\varphi(M) = I$$

Donc M est inversible et $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\varphi(M)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que M est inversible. Démontrons que $\det(M) \neq 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\det(M) = 0$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$M\varphi(M) = 0_2$$

D'où, en multipliant par M^{-1} :

$$\varphi(M) = 0_2$$

Autrement dit :

$$M \in \ker(\varphi)$$

Or A est inversible, donc φ est bijective et en particulier injective. Par conséquent $\ker(\varphi) = \{0_2\}$. D'où :

$$M = 0_2 \quad : \quad \text{absurde !}$$

Par conséquent

$$\det(M) \neq 0$$

Conclusion : M est inversible si, et seulement si, $\det(M) \neq 0$, et le cas échéant

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\varphi(M).$$

5.b. Soient M et N deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M+N$ soit inversible. Montrer que :

$$(M+N)^{-1} = \frac{\det(M)}{\det(M+N)}M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)}N^{-1}.$$

D'après la question précédente $\det(M+N) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}
(M+N)^{-1} &= \frac{1}{\det(M+N)}\varphi(M+N) && \text{linéarité de } \varphi \\
&= \frac{1}{\det(M+N)}\big(\varphi(M)+\varphi(N)\big) \\
&= \frac{1}{\det(M+N)}\varphi(M) + \frac{1}{\det(M+N)}\varphi(N) && \text{question précédente, licite car } M \text{ et } N \text{ sont inversibles : } \varphi(M) = \det(M)M^{-1} \text{ et } \varphi(N) = \det(N)N^{-1} \\
&= \frac{\det(M)}{\det(M+N)}M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)}N^{-1}
\end{aligned}$$

Partie C : Polynômes de Tchebychev et trace des matrices de déterminant 1

On note $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par ses deux premiers termes

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 0 \ \text{ et } \ P_1(x) = 1$$

et la relation de récurrence, valable pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

6. 6.a. Déterminer les polynômes P_2 et P_3.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= xP_1(x) - P_0(x) \\ &= x \end{aligned}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= xP_2(x) - P_1(x) \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

6.b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\deg(P_n) = n - 1$.

Procédons par récurrence double.

- **Initialisation.**
  - Pour $n = 1$: immédiat, car $\deg(P_1) = 0$
  - Pour $n = 2$: immédiat, car $\deg(P_2) = 1$.

  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\deg(P_n) = n - 1$ et $\deg(P_{n+1}) = n$.
  Démontrons que $\deg(P_{n+2}) = n + 1$.
  - Puisque, par hypothèse de récurrence, $\deg(P_{n+1}) = n$, on a $\deg\big(x \longmapsto xP_{n+1}(x)\big) = n + 1$.
  - Également, par hypothèse de récurrence, $\deg(P_n) = n - 1$.

  Ainsi :
  $$\deg\big(x \longmapsto xP_{n+1}(x) - P_n(x)\big) = n + 1$$
  Autrement dit :
  $$\deg(P_{n+2}) = n + 1$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Pourquoi ?
Récurrence double car la relation sur $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est d'ordre 2.

☞ Rappel...
Si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n - 1$.

7. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1, c'est-à-dire avec $\det(M) = 1$.
On définit une suite de nombres réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = P_n\big(\mathrm{tr}(M)\big).$$

7.a. À l'aide de l'identité établie en question **4.**, montrer que :
$$M^2 = \mathrm{tr}(M)M - I.$$

D'après la question **4.** et puisque $\det(M) = 1$:
$$M\varphi(M) = I$$
Autrement dit :
$$M\big(\mathrm{tr}(M)I - M\big) = I$$
D'où :
$$\mathrm{tr}(M)M - M^2 = I$$

Conclusion : $M^2 = \mathrm{tr}(M)M - I$.

7.b. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :
$$M^n = -a_{n-1}I + a_nM \quad (*)$$

Procédons par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  $$\begin{aligned} -a_0I + a_1M &= -P_0\big(\mathrm{tr}(M)\big)I + P_1\big(\mathrm{tr}(M)\big)M \\ &= M \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 0 \text{ et } P_1(x) = 1 \end{aligned}$$
  L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $M^n = -a_{n-1}I + a_nM$. Démontrons que $M^{n+1} = -a_nI + a_{n+1}M$.
  $$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= \big(-a_{n-1}I + a_nM\big)M \qquad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= -a_{n-1}M + a_nM^2 \\ &= -a_{n-1}M + a_n\mathrm{tr}(M)M - a_nI \qquad \text{question précédente} \\ &= -a_nI + \big(a_n\mathrm{tr}(M) - a_{n-1}\big)M \end{aligned}$$
  Or :
  $$\begin{aligned} a_{n+1} &= P_{n+1}\big(\mathrm{tr}(M)\big) \\ &= \mathrm{tr}(M)P_n\big(\mathrm{tr}(M)\big) - P_{n-1}\big(\mathrm{tr}(M)\big) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x) \\ &= a_n\mathrm{tr}(M) - a_{n-1} \end{aligned}$$
  D'où $M^{n+1} = -a_nI + a_{n+1}M$. L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = -a_{n-1}I + a_nM$.

7.c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q_n tel que :

$$\operatorname{tr}(M^n) = Q_n\big(\operatorname{tr}(M)\big).$$

Exprimer le polynôme Q_n à l'aide des polynômes de Tchebychev.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(M^n) &= \operatorname{tr}(-a_{n-1}I + a_n M) \\
&= -a_{n-1}\operatorname{tr}(I) + a_n \operatorname{tr}(M) && \text{linéarité de tr} \\
&= -2a_{n-1} + a_n \operatorname{tr}(M) && \operatorname{tr}(I) = 2 \\
&= -2P_{n-1}\big(\operatorname{tr}(M)\big) + \operatorname{tr}(M) P_n\big(\operatorname{tr}(M)\big) \\
&= Q_n\big(\operatorname{tr}(M)\big) && \text{en posant } Q_n : x \longmapsto xP_n(x) - 2P_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : d'où le résultat, avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Q_n(x) = xP_n(x) - 2P_{n-1}(x) = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)$$

8. 8.a. Compléter la fonction **Python** `P(n,x)` ci–dessous qui prend en argument un entier naturel n et un réel x, et qui renvoie le nombre $P_n(x)$. Vous pouvez utiliser autant de lignes que vous le souhaitez dans la boucle `for`.

```python
def P(n,x):
    P0 = 0
    P1 = 1
    for k in range(1,n+1):
        .....
        .....
        .....
    return(P0)
```

```python
def P(n,x):
    P0 = 0
    P1 = 1
    for k in range(1,n+1):
        Pk=x*P1-P0
        P0=P1
        P1=Pk
    return(P0)
```

8.b. En utilisant la fonction `P(n,x)` ainsi que l'identité $(*)$ ci-dessus, rédiger une fonction **Python** `Puissance(n,M)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et une matrice M de déterminant 1, et qui renvoie la matrice M^n. On suppose la matrice M construite à l'aide de la commande `np.array`.

Rappel Python : La commande `np.eye(2)` renvoie la matrice identité d'ordre 2.

✘ Attention !
Comme pour les listes, la numérotation des tableaux `numpy` commence à 0. Ainsi, le premier coefficient en haut à gauche de la matrice M est donné par `M[0,0]`.

```python
def Puissance(M,n):
    t=M[0,0]+M[1,1]
    a=P(n-1,t)
    b=P(n,t)
    I=np.eye(2)
    return -a*I+b*M
```

Exercice 3

La partie C est indépendante des parties A et B.
Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dispose d'une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité $p \in]0,1[$, on pose $q = 1 - p$. Lorsqu'on effectue une succession de $n \geqslant 2$ lancers avec cette pièce on note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

- P_k l'évènement : "on obtient pile au k-ième lancer",
- F_k l'évènement : "on obtient face au k-ième lancer".

Par abus de notation, on omettra le symbole d'intersection entre ces évènements, ainsi on écrira $P_1F_2F_3$ au lieu de $P_1 \cap F_2 \cap F_3$. Enfin, on appelle :

- *double pile* tout évènement de la forme $P_{k-1}P_k$ avec $k \in [\![2, n]\!]$,
- *pile isolé* tout évènement de la forme P_1F_2 ou $F_{k-1}P_kF_{k+1}$ avec $k \in [\![2, n-1]\!]$.

Partie A : Rang moyen du premier double pile

On considère la *première expérience aléatoire* suivante : on lance une pièce jusqu'à obtenir un premier pile, puis on relance la pièce une seule fois. On note :

- N la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués,
- S l'évènement « le dernier lancer donne pile ».

Exemple : si la succession de lancers donne $F_1P_2F_3$ alors on a $N = 3$ et l'évènement $\overline{S}$ est réalisé, si la succession de lancers donne $F_1F_2F_3P_4P_5$ alors on a $N = 5$ et l'évènement S est réalisé.

1. **1.a.** Reconnaître la loi de la variable aléatoire $N - 1$ qui donne le rang du premier lancer pile.

✓ L'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.

✓ La variable aléatoire $N - 1$ prend comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : $N - 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

1.b. En déduire la loi de N, puis donner son espérance $\mathbb{E}(N)$ et sa variance $\mathbb{V}(N)$.

- Puisque $N - 1$ suit la loi géométrique de paramètre p, on a $(N-1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$N(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$$

et, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([N = n]\big) &= \mathbb{P}\big([N - 1 = n - 1]\big) \\ &= (1-p)^{n-2}p \\ &= q^{n-2}p\end{aligned}$$

$N - 1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $n - 1 \in \mathbb{N}^*$

- On a :

$$N = N - 1 + 1$$

Or $N - 1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, donc $N - 1$ admet une espérance et une variance. C'est donc le cas de N, qui est fonction affine de $N - 1$; et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N) &= \mathbb{E}(N - 1 + 1) \\ &= \mathbb{E}(N - 1) + 1 \\ &= \frac{1}{p} + 1\end{aligned}$$

linéarité de l'espérance

ainsi que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N) &= \mathbb{V}(N - 1 + 1) \\ &= \mathbb{V}(N - 1) \\ &= \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

☞ Rappel...
Si X admet une variance alors, pour tous réels a, b, $aX + b$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

Conclusion :

$$N(\Omega) = [\![2; +\infty[\![\quad ; \quad \forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([N = n]\big) = q^{n-2}p \quad ; \quad \mathbb{E}(N) = \frac{1}{p} + 1 \quad ; \quad \mathbb{V}(N) = \frac{q}{p^2}$$

2. 2.a. Soit $n \geqslant 2$, calculer la probabilité $\mathbb{P}\big([N=n] \cap S\big)$.

On a :

$$\begin{aligned}[N=n] \cap S &= [N-1=n-1] \cap S \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{n-2} F_i\right) \cap P_{n-1} \cap P_n\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([[N=n] \cap S]\big) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} F_i\right) \cap P_{n-1} \cap P_n\right) && \text{indépendance des lancers} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-2} \mathbb{P}(F_i)\right) \times \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(P_n) \\ &= q^{b-2}p^2\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([N=n] \cap S\big) = q^{n-2}p^2$.

2.b. Montrer que $\mathbb{P}(S) = p$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([N=n]\big)_{n\geqslant 2}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{n\geqslant 2} \mathbb{P}\big([N=n] \cap S\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(S\big) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n] \cap S\big) && \text{question précédente} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} q^{n-2}p^2 && i = n-2 \\ &= p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\ &= p^2 \frac{1}{1-q} && p = 1-q \\ &= p\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(S) = p$.

On s'intéresse maintenant à l'expérience aléatoire consistant à lancer la pièce jusqu'à obtenir un premier double pile. On admet que cela revient à répéter de manière indépendante la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S. On note alors :

- R la variable aléatoire égale au nombre de répétitions de la première expérience aléatoire,
- T la variable aléatoire égale au nombre total de lancers effectués,

et, pour tout un entier $i \geqslant 1$,

- N_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers réalisés lors de la i-ème répétition de la première expérience aléatoire si $R \geqslant i$, et égale à 0 si $R < i$.

On admet que toutes ces variables aléatoires sont bien définies presque sûrement.

Exemple : la série de lancers $F_1P_2F_3F_4F_5F_6P_7P_8$ se décompose en deux répétitions de la première expérience aléatoire, on a $F_1P_2F_3$ puis $F_4F_5F_6P_7P_8$, ce sont les deux exemples vus précédemment. Dans ce cas, on a $R=2$, $T=8$, $N_1=3$, $N_2=5$ et $N_i=0$ pour tout $i \geqslant 3$.

3. 3.a. Déterminer la loi de R.

✓ L'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli de succès S dont la probabilité vaut p (question précédente).

✓ La variable aléatoire R prend comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : R suit la loi géométrique de paramètre p.

3.b. En moyenne, combien de piles isolés obtient-on avant le premier double pile ?

Puisque R compte le nombre de répétitions de la première expérience jusqu'à l'obtention du succès S et que :

- la dernière répétition fournit un double-pile par définition de R ;
- chacune des répétitions précédentes fournit un pile isolé

on en déduit que le nombre de piles isolés est donné par la variable aléatoire $R-1$.
Or R admet une espérance, donc $R-1$ également et, par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R-1) &= \mathbb{E}(R)-1 \\ &= \frac{1}{p}-1 \qquad R \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \\ &= \frac{1-p}{p} \\ &= \frac{q}{p}\end{aligned}$$

Conclusion : le nombre moyen de piles isolés avant l'apparition est $\frac{q}{p}$.

Remarque
Qui n'est pas nécessairement entier, mais ce n'est pas grave…

.

4. Soit $i \geqslant 1$ un entier. On admet que la loi conditionnelle de N_i sachant $(R \geqslant i)$ est la loi de N.

4.a. Calculer $\mathbb{P}(N_i = 0)$.

Par définition de N_i, on a :

$$[N_i = 0] = [R < i]$$

- Si $i = 1$:
  Puisque R est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a alors :
  $$[R < 1] = \varnothing$$
  Par conséquent, $\mathbb{P}\big([N_1 = 0]\big) = 0$.
- Si $i \geqslant 2$:
  Puisque R est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que $i \geqslant 2$:
  $$[R < i] = \bigcup_{j=1}^{i-1} [R = j]$$
  D'où :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([N_i = 0]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{i-1}[R=j]\right) \qquad \text{incompatibilité des évènements de } \big([R=j]\big)_{j\in\mathbb{N}^*} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{P}\big([R=j]\big) \qquad R \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} q^{j-1}p \qquad m = i-1 \\ &= p\sum_{m=0}^{i-2} q^m \\ &= p\,\frac{1-q^{i-1}}{1-q} \qquad p = 1-q \\ &= 1-q^{i-1}\end{aligned}$$

Remarque
La disjonction de cas n'est pas nécessaire si l'on considère que l'union est vide dans le cas où $i = 1$.

Les deux cas se regroupent…

Conclusion : $\mathbb{P}\big([N_i = 0]\big) = 1 - q^{i-1}$.

Autre méthode

On a :

$$\begin{aligned}[N_i = 0] &= [R < i] \\ &= \overline{[R \geqslant i]}\end{aligned}$$

Or :
$[R \geqslant i]$ est réalisé si, et seulement si, l'évènement S est réalisé pour la première fois après $i-1$ répétitions de la première expérience
si, et seulement si, les $i-1$ premières répétitions de la première expérience aboutissent toutes à $\overline{S}$

Ainsi, par indépendance des $i-1$ premières répétitions de la première expérience, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([R \geqslant i]\big) &= \mathbb{P}(\overline{S})^{i-1} \\ &= q^{i-1}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([N_i = 0]\big) = 1 - q^{i-1}$.

4.b. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}(N_i = k) = pq^{i+k-3}$.

Soit $k \in [\![2; +\infty[\![$. Puisque $\mathbb{P}\big([R \geqslant i]\big) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([N_i = k]\big) &= \mathbb{P}\big([R \geqslant i]\big)\mathbb{P}_{[R\geqslant i]}\big([N_i = k]\big) \\ &= q^{i-1}q^{k-2}p \\ &= pq^{i+k-3}\end{aligned}$$

calcul dans question précédente et la loi de N_i sachant $[R \geqslant i]$ est la loi de N

Conclusion : pour tout entier $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}(N_i = k) = pq^{i+k-3}$.

4.c. Montrer que N_i admet une espérance donnée par : $\mathbb{E}(N_i) = q^{i-1}\dfrac{1+p}{p}$.

- On sait que $N_i(\Omega) = \{0\} \cup [\![2; +\infty[\![$. Ainsi :

  N_i admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0, k\neq 1} \big|k\mathbb{P}\big([N_i = k]\big)\big|$ est convergente

  si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0, k\neq 1} k\mathbb{P}\big([N_i = k]\big)$ est convergente,

  car pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $k\mathbb{P}\big([N_i = k]\big) \geqslant 0$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{N} k\mathbb{P}\big([N_i = k]\big) &= \sum_{k=2}^{N} k\mathbb{P}\big([N_i = k]\big) \\ &= pq^{i-2}\sum_{k=2}^{N} kq^{k-1} \\ &= pq^{i-2}\left(\sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} - 1\right)\end{aligned}$$

question précédente

  Or, $q \in]-1; 1[$, donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} kq^{k-1}$ est une série géométrique convergente.

  Par conséquent, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0, k\neq 1} k\mathbb{P}\big([N_i = k]\big)$ est convergente.

- On en déduit que N_i admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_i) &= \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{+\infty} k\mathbb{P}\big([N_i = k]\big) \\ &= pq^{i-2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} - 1\right) \\ &= pq^{i-2}\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) \\ &= pq^{i-2}\frac{1-p^2}{p^2} \\ &= q^{i-2}\frac{(1-p)(1+p)}{p} \\ &= q^{i-1}\frac{1+p}{p}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(N_i) = q^{i-1}\dfrac{1+p}{p}$.

5. Établir que la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} \mathbb{E}(N_i)$ converge et calculer sa somme.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(N_i) = \sum_{i=1}^{N} q^{i-1}\frac{1+p}{p}$$

$j = i-1$

$$= \frac{1+p}{p} \sum_{j=0}^{N-1} q^j$$

Or $q \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{j \geqslant 0} q^j$ est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{i \geqslant 1} \mathbb{E}(N_i)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(N_i) &= \frac{1+p}{p} \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \\
&= \frac{1+p}{p} \frac{1}{1-q} \\
&= \frac{1+p}{p^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(N_i) = \frac{1+p}{p^2}$.

Par définition des variables aléatoires N_i on a $T = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, \ T(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\omega)$$

Notez que cette somme est (presque sûrement) bien définie puisque $N_i(\omega) = 0$ pour tout $i > R(\omega)$.

Important !
En fait, on a :

$$\forall \omega \in \Omega, \ T(\omega) = \sum_{i=1}^{R(\omega)} N_i(\omega)$$

Sous cette forme, on voit sans doute mieux que l'on a affaire à une *loi composée*.

6. Soit $n \geqslant 2$.

6.a. Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(N_1 + \cdots + N_n = k)$.

Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Soit $\omega \in \Omega$. On a

$$\begin{aligned}
\omega \in [T = k]) &\iff \omega \in \left[\sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\omega) = k\right] \\
&\iff \sum_{i=1}^{R(\omega)} N_i(\omega) = k
\end{aligned}$$

$\forall i > R(\omega), \ N_i(\omega) = 0$

Remarque
Une explication avec des phrases montrant que l'on a globalement compris que R devait alors prendre une valeur inférieure ou égale à k suffit probablement pour obtenir une grosse partie des points.

Or

$$\forall i \leqslant R(\omega), \ N_i(\omega) \geqslant 2$$

donc $R(\omega) \leqslant k$ et comme $k \leqslant n$, on a :

$$\forall i > n, \ N_i(\omega) = 0$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{R(\omega)} N_i(\omega) = k \iff \sum_{i=1}^{n} N_i(\omega) = k$$

Par conséquent :

$$[T = k] = \left[\sum_{i=1}^{n} N_i = k\right]$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(N_1 + \cdots + N_n = k)$.

6.b. En déduire que : $\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(T = k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(N_i)$.

D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![2; n]\!], \ k\mathbb{P}\big([T = k]\big) = k\mathbb{P}\big([N_1 + \ldots + N_n = k]\big)$$

D'où, en sommant pour $k \in [\![2; n]\!]$:

$$\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}\big([T = k]\big) = \sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}\big([N_1 + \ldots + N_n = k]\big)$$

Or $N_1, \ldots, N_n$ admettent une espérance, donc $N_1 + \ldots + N_n$ également et, puisque $(N_1 + \ldots + N_n)(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{E}(N_1 + \ldots + N_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}\big([N_1 + \ldots + N_n = k]\big)$$

À retenir...
Nul besoin de l'égalité donnant $X(\Omega)$ pour exprimer $\mathbb{E}(X)$ sous forme d'une somme. En effet, si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et que X admet une espérance, on a bien

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}\big([X = n]\big)$$

car si $n \notin X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([X = n]\big) = 0$...

Par conséquent :

$$\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}\big([T=k]\big) \leqslant \mathbb{E}(N_1 + \ldots + N_n)$$

D'où le résultat, par linéarité de l'espérance, licite car toutes existent.

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(T=k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(N_i)$.

6.c. Établir que T admet une espérance.

- On sait que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Ainsi :

  T admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \big|k\mathbb{P}\big([T=k]\big)\big|$ est convergente

  si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}\big([T=k]\big)$ est convergente,

  car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k\mathbb{P}\big([T=k]\big) \geqslant 0$

- Or, on sait que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(N_i) \geqslant 0$ et que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1} \mathbb{E}(N_i)$ est convergente ; donc :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(N_i) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(N_i) = \frac{1+p}{p^2}$$

Remarque
Il n'est même pas nécessaire d'avoir calculé la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(N_i)$ pour conclure.

D'où, d'après la question précédente :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}\big([T=k]\big) \leqslant \frac{1+p}{p^2}$$

Par conséquent, la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}\big([T=k]\big)\right)_{n\geqslant 2}$ est :

✓ croissante car pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, $k\mathbb{P}\big([T=k]\big) \geqslant 0$;
✓ majorée d'après ce qui précède.

Ainsi, par théorème de convergence de monotone, la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}\big([T=k]\big)\right)_{n\geqslant 2}$ est convergente. Autrement dit, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}\big([T=k]\big)$ est convergente.

Conclusion : T admet une espérance.

7. Conclure que $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(N_i)$.

- En faisant tendre $n \to +\infty$ dans l'inégalité de la question **6.b.**, licite car les deux séries en jeu sont convergentes :

$$\mathbb{E}(T) \leqslant \sum_{i+1}^{+\infty} \mathbb{E}(N_i)$$

- Mais également, puisque les variables aléatoires N_i sont à valeurs positives, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T \geqslant \sum_{i=1}^{n} N_i$$

D'où, par croissance de l'espérance puis linéarité de l'espérance, licite car toutes existent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(N_i)$$

Ainsi, en faisant tendre $n \to +\infty$, licite car $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1} \mathbb{E}(N_i)$ est convergente :

$$\mathbb{E}(T) \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(N_i)$$

Conclusion : $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(N_i)$.

✘ Attention !
La linéarité de l'espérance n'est valable que pour une somme finie de variables aléatoires !

Partie B : Simulation informatique

Rappel Python : la commande **rd.random()** renvoie un nombre dans $[0, 1[$ selon la loi uniforme sur $[0, 1[$.

8. Recopier et compléter la fonction **Exp_1(p)** ci-dessous qui simule la première expérience aléatoire (décrite en début de partie A). Cette fonction prend en argument le paramètre $p \in]0, 1[$ et renvoie un couple d'entiers (N, S), où N représente le nombre de lancers effectués, et $S \in \{0, 1\}$ prend la valeur 1 si le dernier lancer a donné pile et 0 sinon.

```python
def Exp_1(p):
    N = 1
    while ..... :
        N = N + 1
    if ..... :
        S = .....
    else:
        S = .....
    return N+1, S
```

```python
def Exp_1(p):
    N = 1
    while rd.random()<1-p : #tant qu'on a FACE
        N = N + 1
    if rd.random()<p : #si on a PILE
        S = 1
    else:
        S = 0
    return N+1, S
```

Remarque
On peut également écrire `while rd.random()>p`

9. Rédiger une fonction **Exp_2(p)** qui simule la deuxième expérience aléatoire consistant à répéter la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S. Cette fonction prend en argument le paramètre p et renvoie le couple d'entiers (R, T), où R est le nombre de répétitions de la première expérience aléatoire, et T est le nombre total de lancers effectués.
On vous demande de suivre cet algorithme :

> On affecte aux variables R, S et T la valeur 0.
> Tant que $S = 0$:
> - On augmente la variable R de 1
> - On affecte à la variable E le résultat de **Exp_1(p)**
> - On affecte à la variable S la deuxième composante de E
> - On ajoute à la variable T la première composante de E
>
> On renvoie le couple (R, T)

```python
def Exp_2(p):
    R,S,T=0,0,0
    while S==0:
        R=R+1
        E=Exp_1(p)
        S=E[1]
        T=T+E[0]
    return (R,T)
```

10. 10.a. Rédiger une fonction **Freq_T(n,p)** qui prend en argument un entier $n \geqslant 2$ ainsi que le paramètre p, et qui renvoie la fréquence d'apparition de n parmi 10^4 réalisations de la variable aléatoire T (on pourra simuler T par la deuxième composante de **Exp_2(p)**.

```python
def Freq_T(n,p):
    c=0
    for k in range(10**4):
        T=Exp_2(p)[1]
        if T==n:
            c=c+1
    return c/10**4
```

10.b. En exécutant la commande `Freq_T(4,1/2)` l'ordinateur affiche `0.123`.
Ce résultat vous paraît-il cohérent ? Justifier votre réponse.
On sait (conséquence de la loi faible des grands nombres) que la fréquence d'apparition de l'évènement $[T=4]$ sur un grand nombre de réalisations indépendantes de T est une valeur approchée de $\mathbb{P}([T=4])$.
Or l'évènement $[T=4]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient le premier double-pile au quatrième lancer.
Ainsi :

$$[T=4] = (P_1F_2P_3P_4) \cup (F_1F_2P_3P_4)$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T=4]) &= \mathbb{P}\big((P_1F_2P_3P_4) \cup (F_1F_2P_3P_4)\big) \\
&= \mathbb{P}(P_1F_2P_3P_4) + \mathbb{P}(F_1F_2P_3P_4) && \text{incompatibilité de } P_1 \text{ et } F_1\text{, donc de } (P_1F_2P_3P_4) \text{ et } (F_1F_2P_3P_4) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 && \text{indépendance des lancers} \\
&= \frac{1}{8} \\
&= 0,125
\end{aligned}$$

Conclusion : le résultat est cohérent car proche de $\mathbb{P}([T=4])$.

Partie C : Nombre de doubles piles

On réalise une succession infinie de lancers avec la même pièce qui tombe sur pile avec une probabilité p, et on note $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de variables aléatoires définies par :

$$\forall n \geqslant 1,\ Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } P_nP_{n+1} \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, Y_n prend la valeur 1 si on réalise un double pile lors des n-ième et $n+1$-ième lancers.

11. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Reconnaître la loi de Y_n, puis donner son espérance $\mathbb{E}(Y_n)$ et sa variance $\mathbb{V}(Y_n)$.
Puisque $Y_n(\Omega) \subset \{0;1\}$, la variable aléatoire Y_n suit une loi de Bernoulli. Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y_n=1]) &= \mathbb{P}(P_n \cap P_{n+1}) \\
&= p^2 && \text{indépendance des lancers}
\end{aligned}$$

Conclusion : Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p^2 ;

$$\mathbb{E}(Y_n) = p^2 \quad ; \quad \mathbb{V}(Y_n) = p^2(1-p^2)$$

12. Soit n et m deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $m \geqslant n+2$.

12.a. Les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ? Même question avec Y_n et Y_m.

- ⁎ D'une part

  $$\mathbb{P}([Y_n=1]) \times \mathbb{P}([Y_{n+1}=1]) = p^4$$

  ⁎ et d'autre part

  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}([Y_n=1]\cap[Y_{n+1}=1]) &= \mathbb{P}(P_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) \\
  &= \mathbb{P}(P_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) \\
  &= p^3 && \text{indépendance des lancers}
  \end{aligned}$$

  Or $p \neq 0$ et $p \neq 1$, donc $p^3 \neq p^4$. Ainsi :

  $$\mathbb{P}([Y_n=1]\cap[Y_{n+1}=1]) \neq \mathbb{P}([Y_n=1]) \times \mathbb{P}([Y_{n+1}=1])$$

  Rigueur ! On précise bien que $p \neq 0$ et $p \neq 1$...

  Conclusion : Y_n et Y_{n+1} ne sont pas indépendantes.

- Puisque $m \geqslant n+2$, les évènements P_n, P_{n+1}, P_m et P_{m+1} sont deux à deux différents. Ainsi, par indépendance des lancers, les évènements $P_n \cap P_{n+1}$ et $P_m \cap P_{m+1}$ sont indépendants.

  Remarque — On ne s'attarde pas sur une démonstration plus rigoureuse. Il est certainement attendu de raisonner ainsi (une sorte de lemme des coalitions...). On pourrait également écrire que Y_n et Y_m sont les variables aléatoires indicatrices des évènements P_nP_{n+1} et P_mP_{m+1} respectivement.

  Conclusion : les variables aléatoires Y_n et Y_m sont indépendantes.

12.b. Calculer les covariances $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ et $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_m)$.

- D'après la question précédente, Y_n et Y_m sont indépendantes.

> **Conclusion :** $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_m) = 0$.

- Puisque Y_n et Y_{n+1} admettent une variance, $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ existe et, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) &= \mathbb{E}(Y_n Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(Y_{n+1}) \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![0;1]\!]^2} ij\mathbb{P}\big([Y_n = i] \cap Y_{n+1} = j\big) - p^4 && Y_n, Y_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(p^2)\,;\ \text{théorème de transfert} \\
&= \mathbb{P}\big([Y_n = 1] \cap [Y_{n+1} = 1]\big) - p^4 \\
&= p^3 - p^4 && \text{calcul fait en question précédente}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) = p^3(1-p)$.

♣ Méthode !

On peut également dire que puisque Y_n et Y_{n+1} suivent des lois de Bernoulli, la variable $Y_n Y_{n+1}$ aussi (car $Y_n Y_{n+1}(\Omega) = \{0;1\}$) ; et son paramètre vaut $\mathbb{P}\big([Y_n Y_{n+1} = 1]\big)$.
Or :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big([Y_n Y_{n+1} = 1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([Y_n = 1] \cap [Y_{n+1} = 1]\big) \\
&= p^3
\end{aligned}$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier, on s'intéresse à la variable aléatoire S_n égale au nombre de doubles piles survenus au cours des $n+1$ premiers lancers, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

13. 13.a. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$, et montrer que la variance $\mathbb{V}(S_n)$ est donnée par :

$$\mathbb{V}(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p).$$

- La variable aléatoire S_n admet une espérance comme somme de n variables aléatoires admettant une espérance ; et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) && \text{linéarité de l'espérance, licite car toutes existent} \\
&= np^2 && \forall k \in [\![1;n]\!],\ Y_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p^2)
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\mathbb{E}(S_n) = np^2$.

- ∗ La variable aléatoire S_n admet une variance comme somme de n variables aléatoires admettant une variance.
  ∗ Démontrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathbb{V}(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$$

Remarque

Le n étant fixé dans l'énoncé, ce n'était peut-être pas ce qui était attendu ; mais je fais le choix de présenter cette méthode car c'est sans doute la plus simple à mettre en place. Une autre est présentée au-dessous.

× **Initialisation.** Pour $n = 1$:
On a $S_1 = Y_1$ et on sait que $\mathbb{V}(Y_1) = p^2(1-p)^2$. L'initialisation est vérifiée.

× **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $\mathbb{V}(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$ et démontrons que $\mathbb{V}(S_{n+1}) = (n+1)p^2(1-p^2) + 2n)p^3(1-p)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_{n+1}) &= \mathbb{V}(S_n + Y_{n+1}) \\
&= \mathbb{V}(S_n) + \mathbb{V}(Y_{n+1}) + 2\mathrm{Cov}(S_n, Y_{n+1}) && \text{hypothèse de récurrence} \\
&= np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) + p^2(1-p^2) + 2\mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k, Y_{n+1}\right) && \text{linéarité à gauche de la covariance} \\
&= (n+1)p^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{n+1}) && \text{question précédente : } \forall k < n,\ \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{n+1}) = 0 \\
&= (n+1)p^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) + 2\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) && \text{question précédente} \\
&= (n+1)p^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) + 2p^3(1-p) \\
&= np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)
\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathbb{V}(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$.

AUTRE MÉTHODE

On peut procéder directement :La variable aléatoire S_n admet une variance comme somme de n variables aléatoires admettant une variance ; et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_n) &= \mathrm{Cov}(S_n, S_n)\\
&= \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k, \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) && \text{linéarité à gauche de la covariance}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(Y_k, \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) && \text{linéarité à droite de la covariance}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(Y_k, Y_j)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_k, Y_j) + \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_k, Y_j) && \text{symétrie de la covariance}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + 2\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_k, Y_j)\\
&= np^2(1-p^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{Cov}(Y_k, Y_j) && \text{question précédente : } \forall j > k+1,\ \mathrm{Cov}(Y_k, Y_j) = 0\\
&= np^2(1-p^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) && \text{question précédente}\\
&= np^2(1-p^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} p^3(1-p)\\
&= np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)
\end{aligned}$$

♥ Conseil du chef ♥

Je pense bon de s'entraîner sur cette méthode en vue des épreuves type HEC-ESSEC et de l'oral.

★ Classique ! ★

L'obtention de cette égalité est un classique des sujets HEC-ESSEC.

13.b. En déduire que :

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \leqslant \frac{3p^2}{n}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) && \text{question précédente}\\
&= \frac{1}{n}\left(p^2(1-p^2) + 2\frac{n-1}{n}p^3(1-p)\right)
\end{aligned}$$

Or :

- $p \in]0;1[$, donc $1-p^2 \leqslant 1$; ainsi, puisque $p^2 \geqslant 0$:

$$p^2(1-p^2) \leqslant p^2$$

- $0 \leqslant \dfrac{n-1}{n} \leqslant 1$; et $p \in]0;1[$, donc $0 \leqslant p^3 \leqslant p$ et $0 \leqslant 1-p \leqslant 1$. Par conséquent :

$$\frac{n-1}{n}p^3(1-p) \leqslant p^2$$

D'où :

$$p^2(1-p^2) + 2\frac{n-1}{n}p^3(1-p) \leqslant 3p^2$$

Important !

On peut aller un peu plus vite, mais on se souvient que

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \leqslant d \end{array}\right\} \Longrightarrow ac \leqslant bd$$

Sans oublier l'hypothèse de positivité !

Conclusion : $\mathbb{V}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) \leqslant \dfrac{3p^2}{n}$.

14. Soit $\varepsilon > 0$, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev établir :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 3\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2\frac{1}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

- La variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$ admet une variance, ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$$

Or, d'après la question **13.a.** : $\mathbb{E}(S_n) = np^2$. D'où :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$$

D'où le résultat d'après la question précédente.

- Immédiat, par théorème d'encadrement.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★