Dans tout le sujet, les questions d'informatique portent sur le langage Python, on suppose que l'on a importé différentes librairies à l'aide des commandes suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

Partie A : Étude d'une fonction de deux variables

On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan :

$$\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 1 + xy > 0\right\} \ ;$$

et on considère la fonction de deux variables réelles f définie sur l'ouvert $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathscr{D}, \qquad f(x, y) \ = \ x + \ln(1 + xy).$$

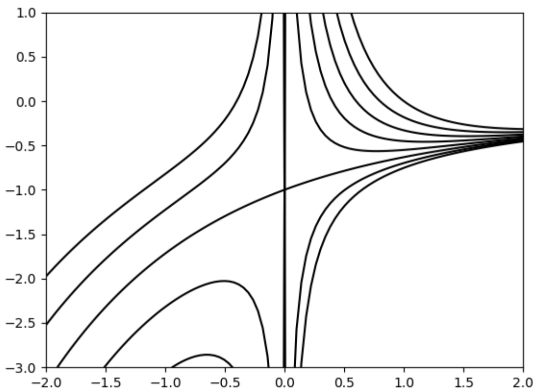
1. **1.a.** Calculer le gradient $\nabla f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$.
   1.b. Montrer que f admet un unique point critique (x_0, y_0) dans $\mathscr{D}$.
   1.c. Calculer la matrice hessienne $\nabla^2 f(x_0, y_0)$, puis déterminer la nature du point critique (x_0, y_0).

Soit $k \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* k de la fonction f le sous–ensemble du plan $\{(x, y) \in \mathscr{D} \ ; \ f(x, y) = k\}$.

2. **2.a.** Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit $(x, y) \in \mathscr{D}$ avec $x \neq 0$, montrer que :

$$f(x, y) = k \iff y = \frac{\mathrm{e}^{k-x} - 1}{x}.$$

   2.b. Le graphique ci-dessous, obtenu à l'aide d'un programme **Python**, représente certaines lignes de niveau de la fonction f.



Recopier et compléter la ligne 5 du programme ci-dessous afin qu'il produise le graphique ci–dessus. À la lecture du programme, préciser pour quelles valeurs de k la ligne de niveau k apparaît sur le graphique.

```
1 K = [-0.4+i/5 for i in range(8)]
2 X = np.linspace(-2,2,100)
3
4 for k in K:
5     M = [...... for x in X]
6     plt.plot(X,M,color='black')
7     plt.xlim(-2,2)
8     plt.ylim(-3,1)
9 plt.show()
```

Partie B : Étude de la ligne de niveau zéro

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}.$$

3. Donner le signe de g sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que la fonction g admet un prolongement continu en 0.

On note encore g le prolongement continu de g à $\mathbb{R}$.

5. Montrer que g est dérivable en 0, et préciser la valeur de $g'(0)$.
6. 6.a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   6.b. Montrer que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   6.c. Déterminer soigneusement les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, puis dresser son tableau de variation.
7. On suppose le plan muni d'un repère orthonormé.
   7.a. Représenter sur un même dessin :
   - la courbe d'équation $1 + xy = 0$ qui délimite le domaine $\mathscr{D}$;
   - la ligne de niveau 0 de f qui est formée de la droite d'équation $x = 0$ et de la courbe de g.

   7.b. La ligne de niveau 0 de la fonction f divise le domaine $\mathscr{D}$ en quatre zones, dans chacune d'elles f est de signe constant. Hachurer (sur votre dessin) les deux zones dans lesquelles f prend des valeurs positives.

Partie C : Aire de la surface délimitée par la ligne de niveau zéro

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

8. Justifier que la fonction G est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donner sa dérivée.
9. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt - \ln(x).$$

10. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ on a : $G(x) \sim -\ln(x)$.
11. Montrer que, pour $x > 0$ voisin de 0, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt = -\ln(x) + G(1) + x + o(x).$$

Commentaire : l'intégrale ci–dessus est égale à l'aire de la surface formée des points de $\mathscr{D}$ situés au–dessous de la ligne de niveau 0 dont l'abscisse est comprise entre $x \in]0, 1[$ et 1.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle *trace* et *déterminant* les applications $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définies, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par :

$$\mathrm{tr}(M) = a + d \text{ et } \det(M) = ad - bc.$$

Partie A : Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application tr est linéaire.

On définit une application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en posant, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = \mathrm{tr}(M)I - M$$

où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. 2.a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   2.b. Vérifier que $\varphi(I) = I$.
   2.c. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{tr}\big(\varphi(M)\big) = \mathrm{tr}(M)$.
3. 3.a. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   3.b. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
   3.c. Déterminer le spectre de A, ainsi qu'une base de chacun de ses sous–espaces propres.

Partie B : Deux formules d'inversion

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $\varphi(M)$ comme un tableau de nombres puis établir :

$$M\varphi(M) = \det(M)I.$$

5. 5.a. Déduire de cette égalité que M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$, et que dans ce cas

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\varphi(M).$$

5.b. Soient M et N deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M+N$ soit inversible. Montrer que :

$$(M+N)^{-1} = \frac{\det(M)}{\det(M+N)}M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)}N^{-1}.$$

Partie C : Polynômes de Tchebychev et trace des matrices de déterminant 1

On note $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par ses deux premiers termes

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 0 \ \text{ et } \ P_1(x) = 1$$

et la relation de récurrence, valable pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

6. 6.a. Déterminer les polynômes P_2 et P_3.

6.b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\deg(P_n) = n - 1$.

7. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1, c'est-à-dire avec $\det(M) = 1$.
On définit une suite de nombres réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P_n\big(\operatorname{tr}(M)\big).$$

7.a. À l'aide de l'identité établie en question 4., montrer que :

$$M^2 = \operatorname{tr}(M)M - I.$$

7.b. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$M^n = -a_{n-1}I + a_nM \quad (*)$$

7.c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q_n tel que :

$$\operatorname{tr}(M^n) = Q_n\big(\operatorname{tr}(M)\big).$$

Exprimer le polynôme Q_n à l'aide des polynômes de Tchebychev.

8. 8.a. Compléter la fonction **Python** `P(n,x)` ci–dessous qui prend en argument un entier naturel n et un réel x, et qui renvoie le nombre $P_n(x)$. Vous pouvez utiliser autant de lignes que vous le souhaitez dans la boucle `for`.

```
def P(n,x):
    P0 = 0
    P1 = 1
    for k in range(1,n+1):
        .....
        .....
        .....
    return(P0)
```

8.b. En utilisant la fonction `P(n,x)` ainsi que l'identité $(*)$ ci-dessus, rédiger une fonction **Python** `Puissance(n,M)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et une matrice M de déterminant 1, et qui renvoie la matrice M^n. On suppose la matrice M construite à l'aide de la commande `np.array`.
Rappel Python : La commande `np.eye(2)` renvoie la matrice identité d'ordre 2.

Exercice 3

La partie C est indépendante des parties A et B.
Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dispose d'une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité $p \in]0,1[$, on pose $q = 1 - p$. Lorsqu'on effectue une succession de $n \geqslant 2$ lancers avec cette pièce on note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

- P_k l'évènement : "on obtient pile au k-ième lancer",
- F_k l'évènement : "on obtient face au k-ième lancer".

Par abus de notation, on omettra le symbole d'intersection entre ces évènements, ainsi on écrira $P_1F_2F_3$ au lieu de $P_1 \cap F_2 \cap F_3$. Enfin, on appelle :

- *double pile* tout évènement de la forme $P_{k-1}P_k$ avec $k \in [\![2, n]\!]$,
- *pile isolé* tout évènement de la forme P_1F_2 ou $F_{k-1}P_kF_{k+1}$ avec $k \in [\![2, n-1]\!]$.

Partie A : Rang moyen du premier double pile

On considère la *première expérience aléatoire* suivante : on lance une pièce jusqu'à obtenir un premier pile, puis on relance la pièce une seule fois. On note :

- N la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués,
- S l'évènement « le dernier lancer donne pile ».

Exemple : si la succession de lancers donne $F_1P_2F_3$ alors on a $N = 3$ et l'évènement $\overline{S}$ est réalisé, si la succession de lancers donne $F_1F_2F_3P_4P_5$ alors on a $N = 5$ et l'évènement S est réalisé.

1. **1.a.** Reconnaître la loi de la variable aléatoire $N - 1$ qui donne le rang du premier lancer pile.
   1.b. En déduire la loi de N, puis donner son espérance $\mathbb{E}(N)$ et sa variance $\mathbb{V}(N)$.
2. **2.a.** Soit $n \geqslant 2$, calculer la probabilité $\mathbb{P}\big([N = n] \cap S\big)$.
   2.b. Montrer que $\mathbb{P}(S) = p$.

On s'intéresse maintenant à l'expérience aléatoire consistant à lancer la pièce jusqu'à obtenir un premier double pile. On admet que cela revient à répéter de manière indépendante la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S. On note alors :

- R la variable aléatoire égale au nombre de répétitions de la première expérience aléatoire,
- T la variable aléatoire égale au nombre total de lancers effectués,

et, pour tout un entier $i \geqslant 1$,

- N_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers réalisés lors de la i-ème répétition de la première expérience aléatoire si $R \geqslant i$, et égale à 0 si $R < i$.

On admet que toutes ces variables aléatoires sont bien définies presque sûrement.

Exemple : la série de lancers $F_1P_2F_3F_4F_5F_6P_7P_8$ se décompose en deux répétitions de la première expérience aléatoire, on a $F_1P_2F_3$ puis $F_4F_5F_6P_7P_8$, ce sont les deux exemples vus précédemment. Dans ce cas, on a $R = 2$, $T = 8$, $N_1 = 3$, $N_2 = 5$ et $N_i = 0$ pour tout $i \geqslant 3$.

3. **3.a.** Déterminer la loi de R.
   3.b. En moyenne, combien de piles isolés obtient-on avant le premier double pile ?
4. Soit $i \geqslant 1$ un entier. On admet que la loi conditionnelle de N_i sachant $(R \geqslant i)$ est la loi de N.
   4.a. Calculer $\mathbb{P}(N_i = 0)$.
   4.b. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}(N_i = k) = pq^{i+k-3}$.
   4.c. Montrer que N_i admet une espérance donnée par : $\mathbb{E}(N_i) = q^{i-1}\dfrac{1+p}{p}$.
5. Établir que la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} \mathbb{E}(N_i)$ converge et calculer sa somme.

Par définition des variables aléatoires N_i on a $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} N_i$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, \; T(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i(\omega)$$

Notez que cette somme est (presque sûrement) bien définie puisque $N_i(\omega) = 0$ pour tout $i > R(\omega)$.

6. Soit $n \geqslant 2$.
   6.a. Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(N_1 + \cdots + N_n = k)$.
   6.b. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(T = k) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(N_i)$.
   6.c. Établir que T admet une espérance.
7. Conclure que $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}(N_i)$.

Partie B : Simulation informatique

Rappel Python : la commande **rd.random()** renvoie un nombre dans $[0, 1[$ selon la loi uniforme sur $[0, 1[$.

8. Recopier et compléter la fonction **Exp_1(p)** ci-dessous qui simule la première expérience aléatoire (décrite en début de partie A). Cette fonction prend en argument le paramètre $p \in]0, 1[$ et renvoie un couple d'entiers (N, S), où N représente le nombre de lancers effectués, et $S \in \{0, 1\}$ prend la valeur 1 si le dernier lancer a donné pile et 0 sinon.

```python
def Exp_1(p):
    N = 1
    while ..... :
        N = N + 1
    if ..... :
        S = .....
    else:
        S = .....
    return N+1, S
```

9. Rédiger une fonction `Exp_2(p)` qui simule la deuxième expérience aléatoire consistant à répéter la première expérience aléatoire jusqu'à la réalisation de l'évènement S. Cette fonction prend en argument le paramètre p et renvoie le couple d'entiers (R, T), où R est le nombre de répétitions de la première expérience aléatoire, et T est le nombre total de lancers effectués.

   On vous demande de suivre cet algorithme :

   > On affecte aux variables R, S et T la valeur 0.
   >
   > Tant que $S = 0$:
   >
   > > On augmente la variable R de 1
   > > On affecte à la variable E le résultat de `Exp_1(p)`
   > > On affecte à la variable S la deuxième composante de E
   > > On ajoute à la variable T la première composante de E
   >
   > On renvoie le couple (R, T)

10. **10.a.** Rédiger une fonction `Freq_T(n,p)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 2$ ainsi que le paramètre p, et qui renvoie la fréquence d'apparition de n parmi 10^4 réalisations de la variable aléatoire T (on pourra simuler T par la deuxième composante de `Exp_2(p)`.

    10.b. En exécutant la commande `Freq_T(4,1/2)` l'ordinateur affiche `0.123`.
    Ce résultat vous paraît-il cohérent ? Justifier votre réponse.

Partie C : Nombre de doubles piles

On réalise une succession infinie de lancers avec la même pièce qui tombe sur pile avec une probabilité p, et on note $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de variables aléatoires définies par :

$$\forall n \geqslant 1,\ \ Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \ P_n P_{n+1} \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, Y_n prend la valeur 1 si on réalise un double pile lors des n-ième et $n+1$-ième lancers.

11. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Reconnaître la loi de Y_n, puis donner son espérance $\mathbb{E}(Y_n)$ et sa variance $\mathbb{V}(Y_n)$.
12. Soit n et m deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $m \geqslant n+2$.

    12.a. Les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ? Même question avec Y_n et Y_m.

    12.b. Calculer les covariances $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ et $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_m)$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier, on s'intéresse à la variable aléatoire S_n égale au nombre de doubles piles survenus au cours des $n+1$ premiers lancers, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

13. **13.a.** Calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$, et montrer que la variance $\mathbb{V}(S_n)$ est donnée par :

    $$\mathbb{V}(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p).$$

    13.b. En déduire que :

    $$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \leqslant \frac{3p^2}{n}.$$

14. Soit $\varepsilon > 0$, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev établir :

    $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 3\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

    En déduire :

    $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★