ESSEC 2025

Dans ce sujet on s'intéresse à un problème d'arrêt optimal c'est-à-dire au problème du choix d'un moment pour entreprendre une action spécifique, afin de maximiser un gain attendu ou de minimiser un coût attendu.

Des problèmes d'arrêts optimaux peuvent être trouvés dans les domaines des statistiques, de l'économie et des mathématiques financières (par exemple dans la tarification des options américaines).

On peut modéliser le problème étudié comme suit. Supposons que nous recevions une suite finie de nombres réels, un par un. Ces réels sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes de lois connues à l'avance mais pas nécessairement identiques. Nous ne pouvons garder qu'un seul nombre de la suite. À chaque observation, nous pouvons soit sélectionner le nombre actuel, soit pousser notre chance et passer à l'observation suivante. Notre objectif est de maximiser la probabilité de sélectionner le nombre maximal de la suite.

Dans tout le sujet on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Toutes les variables aléatoires réelles et événements qui interviennent dans cet énoncé sont définies sur cet espace.

On rappelle que si A désigne un événement, $\mathbb{1}_A$ est la variable aléatoire qui vaut 1 sur A et 0 sur $\overline{A}$.

La partie 2 utilise des résultats de la partie 1. La partie 3 est indépendante des deux premières et seules les deux dernières questions 20 et 21 de la partie 4 utilisent des résultats établis dans les parties précédentes.

Un aide-mémoire **Python** se trouve à la fin de l'énoncé. Pour les scripts et fonctions **Python**, on supposera que les instructions suivantes ont été exécutées :

```
import numpy as np, numpy.random as rd, matplotlib.pyplot as plt
```

♥ L'avis du chef ! ♥

Très bon problème mêlant analyse et variables aléatoires discrètes. Des classiques sur lesquels il fallait prendre les points ; même si le sujet contient également bon nombre de questions assez difficiles.
Pour information :
- Répartition des points de barème respectivement sur 4 parties : 29%, 17%, 25%, 29%.
- La note 13/20 était obtenu avec 18% des points et le 20 à 50%.
- Rapport de jury

PARTIE I – DES RÉSULTATS GÉNÉRAUX

1. Montrer que pour tout t réel, $e^t \geqslant 1 + t$ et que, pour tout $t > -1$, $\ln(1 + t) \leqslant t$.

Remarque

On commence doucement pas deux énormes classiques sur lesquels il est inimaginable de ne pas prendre tous les points !

- On sait que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, sa courbe représentative est partout au-dessus de toutes ses tangentes, et en particulier au-dessus de sa tangente en le point d'abscisse 0 dont l'équation réduite est $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$, autrement dit, $y = x + 1$.

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geqslant 1 + t$.

- Soit $t > -1$. D'après le point précédent :
$$e^t \geqslant 1 + t$$
Ainsi, par croissance de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, licite car $1 + t > 0$ (puisque $t > -1$) :
$$\ln(1 + t) \leqslant t$$

Conclusion : $\forall t > -1,\ \ln(1 + t) \leqslant t$.

2. On définit la fonction f sur $[0; 1]$ par $f(t) = (1 + t)e^{-t} - t$.

2.a. Étudier les variations de f et montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$ et que pour tout $t \in [0; 1]$, $f(t) > 0 \iff t < \alpha$.

- La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ comme produit et somme de telles fonctions, et, pour tout $t \in [0; 1]$:
$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{-t} - (1 + t)e^{-t} - 1 \\ &= -te^{-t} - 1 \\ &< 0 \quad \text{$t \geqslant 0$, dont $-te^{-t} \leqslant 0$} \end{aligned}$$

D'où :

t	0	1
$f'(t)$	$-$	
f	$1 \searrow$	$2e^{-1} - 1$

♥ Conseil du chef ♥

C'est à peine plus long de faire un tableau qu'une phrase... Et c'est plus visuel !

- La fonction f est :
  ✓ continue sur $]0; 1[$,

✓ strictement décroissante sur $]0;1[$.

Ainsi, par théorème de bijection, f est bijective de $]0;1[$ dans $f\big(]0;1[\big)$, avec $f\big(]0;1[\big) =]2\mathrm{e}^{-1}-1;1[$.

Or

$$\begin{aligned} 2\mathrm{e}^{-1}-1 &= \frac{2}{\mathrm{e}}-1 \\ &= \frac{2-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} \\ &< 0 \qquad \mathrm{e}>2 \end{aligned}$$

Ainsi $0 \in]2\mathrm{e}^{-1}-1;1[$.

Conclusion : l'équation $f(t)=0$ possède une unique solution sur $]0;1[$, notée α.

- Enfin, pour tout $t \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} f(t)>0 &\iff f(t)>f(\alpha) \\ &\iff t<\alpha \qquad \text{stricte décroissance de } f \text{ sur } [0;1] \text{, licite car } t,\alpha\in[0;1] \end{aligned}$$

Important !
Là encore, c'est très classique : il faut prendre tous les points, sans oublier d'hypothèse, et avoir une rédaction type qui soit claire et structurée.

Conclusion : $\forall t \in [0;1],\ f(t)>0 \iff t<\alpha$.

2.b. Écrire un programme **Python** qui renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Proposons la fonction suivante, basée sur l'algorithme de dichotomie :

```python
import numpy as np

def f(t):
    return (1+t)*np.exp(-t)-t

def alpha():
    a=0
    b=1
    while b-a>10**(-3):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        elif f(a)*f(m)>0:
            a=m
        else:
            return m
    return (a+b)/2
```

Important !
Là encore, il faut prendre les points ! Cette question est certainement démesurément rémunérée compte tenu de sa difficulté...

Autre algorithme possible

Puisque f est décroissante sur $[0;1]$, on peut proposer la version suivante :

```python
import numpy as np

def f(t):
    return (1+t)*np.exp(-t)-t

def alpha():
    a=0
    b=1
    while b-a>10**(-3):
        m=(a+b)/2
        if f(m)>0:
            a=m
        elif f(m)<0:
            b=m
        else:
            return m
    return (a+b)/2
```

2.c. Montrer que pour tout $t\in[0;1]$, $\mathrm{e}^t \leqslant 1+2t$. En déduire que $\alpha \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- On sait que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, sur $[0;1]$, sa courbe représentative est au-dessous du segment $[AB]$, où $A(0;1)$ et $B(1;\mathrm{e})$. Or la droite (AB) a pour équation réduite $y=1+(\mathrm{e}-1)x$. D'où :

$$\forall t\in[0;1],\ \mathrm{e}^t \leqslant 1+(\mathrm{e}-1)t$$

♣ Méthode !
Bien évidemment, il est possible (et sans doute attendu...) d'étudier la fonction $g : t \longmapsto \mathrm{e}^t-(1+2t)$. Elle est dérivable sur $[0;1]$, et

$$\forall t\in[0;1],\ g'(t)=\mathrm{e}^t-2$$

On trouve que g possède un maximum en 0 ; et

$$g(0)=0$$

D'où :

$$\forall t\in[0;1],\ g(t)\leqslant 0$$

Ce qui prouve le résultat.

Ensuite, puisque $\mathrm{e} \leqslant 3$, on a $\mathrm{e}-1 \leqslant 2$; d'où le résultat, car pour tout $t \in [0;1]$, $t \geqslant 0$...
Conclusion : $\forall t \in [0;1],\ \mathrm{e}^t \leqslant 1+2t$.

- On sait que $f(\alpha) = 0$; et :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{2}+1-\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)}{\sqrt{2}} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

point précédent avec $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [0;1]$: $\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant 1+2\frac{1}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$

Ainsi

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geqslant f(\alpha)$$

D'où le résultat, par stricte décroissance de f sur $[0;1]$ (licite car $\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \in [0;1]$).

Conclusion : $\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

➟Réflexe !
Pour comparer α et $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on compare leurs images par f !

3. Soit U une variable aléatoire à densité, à valeurs dans $[0;1[$, qui suit la loi uniforme et $p \in]0;\alpha[$. On pose $\beta = f(p)$. On définit les variables aléatoires X et Y par :

$$X = \mathbb{1}_{[\beta < U \leqslant \beta+p]} \text{ et pour tout } \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min\left\{k \in \mathbb{N}\ /\ U(\omega) \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}\right\}$$

3.a. Rappeler la valeur de $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}$.
En déduire que la variable aléatoire Y est bien définie et déterminer la loi de X.

✘ Attention !
Question qui n'était pas dans le sujet initial ; cela crée un décalage de la numérotation.

- On sait que $\sum_{i\geqslant 0} \frac{p^i}{i!}$ est une série exponentielle convergente et que $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{p^i}{i!} = \mathrm{e}^p$.

Conclusion : $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} = 1$.

- Soit $\omega \in \Omega$. On sait que $U(\omega) < 1$ et d'après le point précédent $\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} = 1$.

Ainsi, par définition de la limite, il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_0,\ \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} \geqslant U(\omega)$. Par conséquent, l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}\ /\ U(\omega) \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}\right\}$ possède un minimum, et donc $Y(\omega)$ est bien défini.

Conclusion : la variable aléatoire Y est bien définie.

- **Loi de X.**
  - ⁎ Par définition, on a déjà $X(\Omega) \subset \{0;1\}$.
  - ⁎ Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X=1]\big) &= \mathbb{P}\big([\beta < U \leqslant \beta+p]\big) \\ &= F_U(\beta+p) - F_U(\beta) \end{aligned}$$

en notant F_U sa fonction de répartition

Remarque
Inutile, ici, de mentionner que U est à densité. En effet, on a toujours :
$\mathbb{P}\big([a < X \leqslant b]\big) = F_X(b) - F_X(a)$
En revanche, ce n'est pas toujours le cas de $\mathbb{P}\big([a \leqslant X \leqslant b]\big)$ par exemple...

Or, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Important !
On a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
Les lois uniformes sur $]0;1]$, $[0;1]$, $[0;1[$ et $]0;1[$ sont toutes les mêmes.

et :

× $p \in]0;\alpha[$, ainsi d'après la question 2.a. : $f(p) \in [0;1]$. Autrement dit :

$$\beta \in [0;1]$$

× ensuite :

$$\begin{aligned}\beta + p &= f(p) + p \\ &= e^{-p} + pe^{-p} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} e^{-p} = 1\end{aligned}$$

Donc

$$\beta + p \in [0; 1]$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X = 1]\big) &= F_U(\beta + p) - F_U(\beta) \\ &= \beta + p - \beta \\ &= p\end{aligned}$$

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

3.b. Écrire une fonction **Python**, minimum(x,p) qui renvoie le minimum de l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N} \ / \ x \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!} e^{-p}\right\}$ lorsque $x \in [0; 1[$ et $p \in]0; 1[$. En déduire une fonction **simulY(p)** qui réalise une simulation de Y.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def minimum(x,p):
    k=0
    fact=1
    S=np.exp(-p)
    while S<x:
        k=k+1
        fact=fact*k
        S=S+p**k/fact*np.exp(-p)
    return k

def simulY(p):
    U=rd.random()
    Y=minimum(U,p)
    return Y
```

Remarque
On calcule la factorielle au fur et à mesure, plutôt que d'utiliser une commande toute prête...

3.c. Montrer que Y suit la loi de Poisson de paramètre p.

- Remarquons déjà que, par définition : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soient $k \in \mathbb{N}$. Par définition de Y et avec la convention $\sum_{\varnothing} = 0$:

$$[Y = k] = \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!} e^{-p} < U \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!} e^{-p}\right]$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y = k]\big) &= \mathbb{P}\left(\left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!} e^{-p} < U \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!} e^{-p}\right]\right) \\ &= F_U\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!} e^{-p}\right) - F_U\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!} e^{-p}\right)\end{aligned}$$

Remarque
On peut se contenter de préciser que les deux sommes sont dans $[0; 1]$, sans aller chercher $[0; 1[$... car $F_U(1) = 1$ et donc, si $x = 1$, on a bien $F_U(x) = x$.

et :

* on a immédiatement

$$\forall K \in \mathbb{N}, \ \sum_{i=0}^{K} \frac{p^i}{i!} e^{-p} \geqslant 0$$

* ensuite, on sait que la série $\sum_{i \geqslant 0} \frac{p^i}{i!} e^{-p}$ est convergente de somme égale à 1. Et comme la suite des sommes partielles associée est croissante, on a :

$$\forall K \in \mathbb{N}, \ \sum_{i=0}^{K} \frac{p^i}{i!} e^{-p} \leqslant 1$$

D'où $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}$ appartiennent à $[0;1[$. Par conséquent, en reprenant le calcul plus haut :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y=k]\big) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} \\ &= \frac{p^k}{k!}\mathrm{e}^{-p}\end{aligned}$$

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(p)$.

3.d. Soit k un entier, $k \geqslant 2$. Montrer que si $[Y=k]$ est réalisé alors $[X=0]$ l'est.

En déduire que $\mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=k]\big) = \dfrac{p^k}{k!}\mathrm{e}^{-p}$.

- Démontrons $[Y=k] \subset [X=0]$. Soit $\omega \in [Y=k]$.
  - ∗ Remarquons déjà que $\beta = f(p) = (1+p)\mathrm{e}^{-p} - p$ et $\beta + p = (1+p)\mathrm{e}^{-p}$. Ainsi :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } (1+p)\mathrm{e}^{-p} - p < U(\omega) \leqslant (1+p)\mathrm{e}^{-p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  - ∗ Ensuite, on a $Y(\omega) = k$, et donc :

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} < U(\omega) \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}$$

  Et, puisque $k \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} &= \mathrm{e}^{-p} + p\mathrm{e}^{-p} + \underbrace{\sum_{i=2}^{k-1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant (1+p)\mathrm{e}^{-p}\end{aligned}$$

  D'où, par transitivité $U(\omega) > (1+p)\mathrm{e}^{-p}$.

  Et ainsi :

$$X(\omega) = 0$$

Conclusion : $[Y=k] \subset [X=0]$.

- Puisque $[Y=k] \subset [X=0]$, on a $[Y=k]\cap[X=0] = [Y=k]$; et ainsi :

$$\mathbb{P}\big([Y=k]\cap[X=0]\big) = \mathbb{P}\big([Y=k]\big)$$

Conclusion : d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=k]\big) = \dfrac{p^k}{k!}\mathrm{e}^{-p}$.

3.e. Montrer que $[X=0]\cap[Y=1] = \varnothing$. En déduire que

$$\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big) = p\mathrm{e}^{-p} \;\;;\;\; \mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=0]\big) = \beta \;\;;\;\; \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=0]\big) = p\big(1-\mathrm{e}^{-p}\big)$$

- Remarquons pour commencer :

$$\begin{aligned}[X=0]\cap[Y=1] = \varnothing &\iff [Y=1] \subset \overline{[X=0]} \\ &\iff [Y=1] \subset [X=1]\end{aligned}$$

$X(\Omega) = \{0;1\}$

À retenir...

C'est un résultat assez intuitif en fait :

$$A \cap B = \varnothing \iff A \subset \overline{B}$$

Soit alors $\omega \in [Y=1]$. Dans ce cas, par définition de Y :

$$\mathrm{e}^{-p} < U(\omega) \leqslant (1+p)\mathrm{e}^{-p} = \beta + p$$

Démontrons maintenant que $\mathrm{e}^{-p} \geqslant \beta$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-p} \geqslant \beta &\iff \mathrm{e}^{-p} \geqslant f(p) \\ &\iff \mathrm{e}^{-p} \geqslant (1+p)\mathrm{e}^{-p} - p \\ &\iff 0 \geqslant p(\mathrm{e}^{-p} - 1)\end{aligned}$$

Or $p \geqslant 0$, donc $\mathrm{e}^{-p} - 1 \leqslant 0$ et ainsi $p(\mathrm{e}^{-p}-1) \leqslant 0$. Par équivalences, on a donc établi :

$$\mathrm{e}^{-p} \geqslant \beta$$

Ainsi, par transitivité :

$$\beta < U(\omega) \leqslant \beta + p$$

D'où :

$$\omega \in [X=1]$$

Conclusion : $[Y = 1] \subset [X = 1]$, et donc, d'après l'équivalence du début, $[Y = 1] \cap [X = 0] = \varnothing$.

- D'après ce qui précède, $[Y = 1] \subset [X = 1]$, donc $[Y = 1] \cap [X = 1] = [Y = 1]$ et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([Y = 1]\big) \\ &= p e^{-p} \qquad Y \hookrightarrow \mathscr{P}(p) \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = 1]\big) = p e^{-p}$.

- On a :

$$\begin{aligned} [X = 0] \cap [Y = 0] &= \big([U \leqslant \beta] \cup [U > \beta + p]\big) \cap [U \leqslant e^{-p}] \\ &= \big([U \leqslant \beta] \cap [U > e^{-p}]\big) \cup \big([U > \beta + p] \cap [U \leqslant e^{-p}]\big) \qquad \text{on a vu, ci-dessus que } \beta \leqslant e^{-p}\text{, donc } [U \leqslant \beta] \cap [U > e^{-p}] = [U \leqslant \beta] \\ &= [U \leqslant \beta] \cup \big([U > e^{-p} + p e^{-p}] \cap [U \leqslant e^{-p}]\big) \qquad p e^{-p} > 0\text{, donc } [U > e^{-p} + p e^{-p}] \cap [U \leqslant e^{-p}] = \varnothing \\ &= [U \leqslant \beta] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X = 0] \cap [Y = 0]\big) &= F_U(\beta) \qquad \beta \in]0;1[\text{ (question 3.a.)} \\ &= \beta \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X = 0] \cap [Y = 0]\big) = \beta$.

Ou alors...

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Y = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \mathbb{P}\big([Y = k] \cap [X = 0]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X = 0]\big) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = k] \cap [X = 0]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([Y = 0] \cap [X = 0]\big) + \mathbb{P}\big([Y = 1] \cap [X = 0]\big) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = k] \cap [X = 0]\big) \qquad \text{point précédent, question 3.d.} \\ &= \mathbb{P}\big([Y = 0] \cap [X = 0]\big) + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} e^{-p} \\ &= \mathbb{P}\big([Y = 0] \cap [X = 0]\big) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} e^{-p} - e^{-p} - p e^{-p} \\ &= \mathbb{P}\big([Y = 0] \cap [X = 0]\big) + 1 - e^{-p} - p e^{-p} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Y = 0] \cap [X = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X = 0]\big) - 1 + (1 + p) e^{-p} \qquad X \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \\ &= 1 - p - 1 + (1 + p) e^{-p} \\ &= (1 + p) e^{-p} - p \\ &= f(p) \\ &= \beta \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X = 0] \cap [Y = 0]\big) = \beta$.

- Enfin :

$$\begin{aligned} [X = 1] \cap [Y = 0] &= [\beta < U \leqslant \beta + p] \cap [U \leqslant e^{-p}] \qquad \beta \leqslant e^{-p} \text{ et } \beta + p = e^{-p} + p e^{-p} > e^{-p} \\ &= [\beta < U \leqslant e^{-p}] \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([\beta < U \leqslant e^{-p}]\big) \\ &= F_U(e^{-p}) - F_U(\beta) \qquad \beta, e^{-p} \in]0;1[\\ &= e^{-p} - \beta \\ &= e^{-p} - f(p) \\ &= e^{-p} - (1 + p) e^{-p} + p \\ &= -p e^{-p} + p \\ &= p\big(1 - e^{-p}\big) \end{aligned}$$

Ou alors...

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=0],[X=1]\big)$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y=0]\big) &= \mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=0]\big)+\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=0]\big) \\ &= \beta+\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=0]\big) \quad \text{point précédent}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=0]\big) &= \mathbb{P}\big([Y=0]\big)-\beta \\ &= e^{-p}-f(p) \quad Y\hookrightarrow\mathscr{P}(p) \\ &= e^{-p}-(1+p)e^{-p}+p \\ &= -pe^{-p}+p \\ &= p\big(1-e^{-p}\big)\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=0]\big)=p\big(1-e^{-p}\big)$.

3.f. Montrer que $\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big)=1+p-(1+2p)e^{-p}$, puis que $\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big)\leqslant 2p^2$.

- On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big) &= 1-\mathbb{P}\big([X=Y]\big) \\ &= 1-\Big(\mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=0]\big)+\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big)\Big) \quad X(\Omega)=\{0;1\} \text{ et } Y(\Omega)=\mathbb{N} \\ &= 1-\big(\beta+pe^{-p}\big) \quad \text{question précédente} \\ &= 1-(1+p)e^{-p}+p-pe^{-p} \\ &= 1+p-(1+2p)e^{-p}\end{aligned}$$

Remarque

On pourrait également repasser par une FPT pour calculer $\mathbb{P}\big([X=Y]\big)$ et, on retrouverait $\mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=0]\big)+\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big)$.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big)=1+p-(1+2p)e^{-p}$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big)\leqslant 2p^2 &\iff 1+p-(1+2p)e^{-p}\leqslant 2p^2 \\ &\iff 2p^2-p-1+(2p+1)e^{-p}\geqslant 0 \\ &\iff (2p+1)(p-1)+(2p+1)e^{-p}\geqslant 0 \quad \forall x\in\mathbb{R},\ 2x^2-x-1=(2x+1)(x-1) \text{ (en remarquant que 1 est racine de } x\longmapsto 2x^2-x-1) \\ &\iff (2p+1)(p-1+e^{-p})\geqslant 0\end{aligned}$$

Or, d'après la question **1.** avec $t=-p$: $e^{-p}\geqslant -p+1$ donc $e^{-p}+p-\geqslant 0$; et $2p+1\geqslant 0$. D'où :

$$(2p+1)(p-1+e^{-p})\geqslant 0$$

Conclusion : par équivalences, on a $\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big)\leqslant 2p^2$.

4. *Inégalité de Boole* - Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements. Démontrer :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k)$$

✘ Attention !

L'énoncé initial guidait vers une méthode utilisant l'inégalité de Markov, sur laquelle le programme officiel est clair : elle n'est pas exigible. Je fais donc le choix de ne pas guider et laisser la possibilité de raisonner par récurrence (ce qui est aussi plus élémentaire...).

★ Classique ! ★

Question classique et facile...

- **Initialisation.** Pour $n=1$: c'est immédiat.
- **Hérédité.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k)$ et montrons $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(B_k)$.

  On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}B_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\cup B_{n+1}\right) \quad \text{formule de Poincaré} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)+\mathbb{P}(B_{n+1})-\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\cap B_{n+1}\right) \quad \text{hypothèse de récurrence et } \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\cap B_{n+1}\right)\geqslant 0 \\ &\leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k)+\mathbb{P}(B_{n+1})}_{=\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(B_k)}\end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k)$.

Énoncé initial

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $B_1, \ldots, B_k$ des évènements. On pose $T = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{B_i}$.

4.a. Montrer que $\mathbb{P}([T \geqslant 1]) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)$.

$[T \geqslant 1]$ est réalisé si, et seulement si, $\left[\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{B_i} \geqslant 1\right]$ est réalisé

si, et seulement si, au moins une des indicatrices $\mathbb{1}_{B_1}, \ldots \mathbb{1}_{B_k}$ a pris la valeur 1, car toutes sont positives ou nulles

si, et seulement si, $\bigcup_{i=1}^{k} [\mathbb{1}_{B_i} = 1]$ est réalisé

si, et seulement si, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ est réalisé

D'où :

$$[T \geqslant 1]) = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

Conclusion : $\mathbb{P}([T \geqslant 1]) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)$.

4.b. En utilisant une inégalité du cours, que l'on énoncera précisément, en déduire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$$

La variable aléatoire T

- ✓ est à valeurs positives, car les indicatrices le sont ;
- ✓ admet une espérance, comme somme de telles variables aléatoires.

Ainsi, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}([T \geqslant a]) \leqslant \frac{\mathbb{E}(T)}{a}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{B_i}\right) && \text{linéarité de l'espérance, licite car toutes existent} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}([\mathbb{1}_{B_i} = 1]) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)
\end{aligned}$$

D'où, en prenant $a = 1$:

$$\mathbb{P}([T \geqslant 1]) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose

$$\delta(X, Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}([X = k]) - \mathbb{P}([Y = k])\right| \quad \text{et} \quad d(X, Y) = \mathbb{P}([X \neq Y])$$

Remarque

On pourra aller travailler les sujets `ESSEC 2013 E2` et `ESSEC 2006 E2`.

5.a. Justifier que la série définissant $\delta(X, Y)$ est bien convergente.

- ✓ Par inégalité triangulaire : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \left|\mathbb{P}([X = k]) - \mathbb{P}([Y = k])\right| \leqslant \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([Y = k])$.
- ✓ Les séries $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}([X = k])$ et $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}([Y = k])$ sont convergentes, donc la série $\sum_{k \geqslant 0} \left(\mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([Y = k])\right)$ également.

Conclusion : par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série définissant $\delta(X, Y)$ est convergente.

5.b. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}([X = k]) \geqslant \mathbb{P}([Y = k])$. Montrer que $\left|\mathbb{P}([X = k]) - \mathbb{P}([Y = k])\right| \leqslant \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \neq k])$.

Puisque $\mathbb{P}([X = k]) \geqslant \mathbb{P}([Y = k])$, on a

$$\left|\mathbb{P}([X = k]) - \mathbb{P}([Y = k])\right| = \mathbb{P}([X = k]) - \mathbb{P}([Y = k])$$

FPT avec $([Y = k], [Y \neq k])$ comme SCE

$$= \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=k]\big) + \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big) - \mathbb{P}\big([Y=k]\big)$$
$$\leqslant \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big)$$

$[X=k]\cap[Y=k]\subset[Y=k]$, donc par croissance de $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=k]\big)\leqslant\mathbb{P}\big([Y=k]\big)$

Conclusion : $\big|\mathbb{P}\big([X=k]\big)-\mathbb{P}\big([Y=k]\big)\big| \leqslant \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big)$.

5.c. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\big|\mathbb{P}\big([X=k]\big)-\mathbb{P}\big([Y=k]\big)\big| \leqslant \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big) + \mathbb{P}\big([X\neq k]\cap[Y=k]\big)$$

Soit $k\in\mathbb{N}$. Distinguons deux cas :

- si $\mathbb{P}\big([X=k]\big)\geqslant\mathbb{P}\big([Y=k]\big)$, alors d'après la question précédente :

$$\big|\mathbb{P}\big([X=k]\big)-\mathbb{P}\big([Y=k]\big)\big| \leqslant \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big)$$

  Et comme $\mathbb{P}\big([X\neq k]\cap[Y=k]\big)\geqslant 0$, on a :

$$\big|\mathbb{P}\big([X=k]\big)-\mathbb{P}\big([Y=k]\big)\big| \leqslant \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big) + \mathbb{P}\big([X\neq k]\cap[Y=k]\big)$$

- si $\mathbb{P}\big([X=k]\big)<\mathbb{P}\big([Y=k]\big)$, alors en particulier $\mathbb{P}\big([Y=k]\big)\geqslant\mathbb{P}\big([X=k]\big)$; et ainsi, par symétrie des rôles de X et Y dans le résultat du point précédent, on a aussi :

$$\big|\mathbb{P}\big([X=k]\big)-\mathbb{P}\big([Y=k]\big)\big| \leqslant \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big) + \mathbb{P}\big([X\neq k]\cap[Y=k]\big)$$

D'où le résultat, dans les deux cas.

Conclusion : pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\big|\mathbb{P}\big([X=k]\big)-\mathbb{P}\big([Y=k]\big)\big| \leqslant \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big)+\mathbb{P}\big([X\neq k]\cap[Y=k]\big)$.

5.d. En conclure que $\delta(X,Y)\leqslant 2d(X,Y)\leqslant 2$.

- Déjà, puisque $d(X,Y)=\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big)$, on a $d(X,Y)\leqslant 1$. Et donc :

$$2d(X,Y)\leqslant 2$$

- Ensuite , d'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\big([X=k]\cap[X\neq Y]\big)$ est convergente et :

$$\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big([X=k]\cap[X\neq Y]\big)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big)$$

  De même, avec $\big([Y=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, on a

$$\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y\neq k]\big)$$

  Ainsi, en sommant le résultat de la question précédente pour $k\in\mathbb{N}$, licite car les deux séries en jeu sont convergentes (question **5.a.** et ce qui précède) :

$$\delta(X,Y)\leqslant 2\mathbb{P}\big([X\neq Y]\big)$$

✓ Rigueur !
On pense à mentionner la convergence des séries pour pouvoir sommer sur $\mathbb{N}$.

Conclusion : $\delta(X,Y)\leqslant 2d(X,Y)\leqslant 2$.

Partie 2 - Une inégalité d'après Hodge et Le Cam

On conserve les notations de la partie 1.

On considère une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à densité indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1[$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $p_1,\dots,p_n$ des réels appartenant à $]0;1[$. Pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, on définit, comme X et Y dans la question 3. de la partie 1, X_k et Y_k avec U_k et p_k à la place de U et p. On pose $\lambda_n=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ et $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k$.

Remarque
Je choisis de noter $\lambda_n=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$, plutôt que λ dans le sujet initial.

On souhaite établir l'inégalité : $\delta(S_n,T_n)\leqslant 4\sum\limits_{k=1}^{n}p_k^2$ (LC).

6. Montrer que si l'un au moins des p_k est supérieur ou égal à α alors (LC) est vérifiée.
Supposons qu'il existe $k_0\in[\![1;n]\!]$, que l'on considère ensuite, tel que $p_{k_0}\geqslant\alpha$.

- D'après la question 2.c., $\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. D'où $p_{k_0} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$; donc, par croissance de $.^2$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$p_{k_0}^2 \geqslant \frac{1}{2}$$

- Or, pour tout $k \in [\![1;n]\!] \setminus \{k_0\}$, $p_k^2 \geqslant 0$. D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geqslant p_{k_0}^2$$

Par conséquent :

$$4\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geqslant 4p_{k_0}^2$$

Ainsi :

$$4\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geqslant 2$$

D'après la question 5.d. et par transitivité, (LC) est vérifiée.

Conclusion : si l'un au moins des p_k est supérieur ou égal à α alors (LC) est vérifiée.

► **On suppose dans la suite de cette partie que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $p_k < \alpha$.**

7. Justifier brièvement que $X_1, \dots, X_n$ (respectivement $Y_1, \dots, Y_n$) sont indépendantes.

On sait que

✓ $U_1, \dots, U_n$ sont indépendantes,

✓ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $X_k = f_k(U_k)$, où $f_k : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]\beta;\beta+p_k] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi, par lemme des coalitions, $\mathbb{1}_{\beta < U_1 \leqslant \beta + p_1}, \dots, \mathbb{1}_{\beta < U_n \leqslant \beta + p_n}$ le sont également.

Conclusion : $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. De la même façon, $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

Remarque

L'énoncé dit "brièvement". Il était donc probable que le seul point certainement alloué à la question soit obtenu en mentionnant le lemme des coalitions (ans oublier l'hypothèse que $U_1, \dots, U_n$ sont indépendantes) : nul besoin de poser les fonctions f_k je pense.

8. Quelle est la loi de T_n ? Si les p_k sont tous égaux à $\frac{\lambda}{n}$ (avec λ un réel strictement positif), quelle est la loi de S_n ? Quelle est alors la limite en loi de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Remarque

Le sujet initial était un peu confus ici sur la valeur de λ qui était défini plus haut comme étant égal à $\sum_{k=1}^{n} p_k$. J'ai pris la liberté de modifier légèrement.

- On sait que :
  ✓ $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$,
  ✓ $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $Y_k \hookrightarrow \mathscr{P}(p_k)$ (question 3.c.),
  ✓ $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

  Ainsi, par stabilité des lois de Poisson, $T_n \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)$.

  Conclusion : $T_n \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_n)$.

- Supposons que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $p_k = \frac{\lambda}{n}$. Dans ce cas :
  ✓ $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$,
  ✓ $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ (question 3.a.),
  ✓ $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

  Conclusion : $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n; \frac{\lambda}{n}\right)$.

- **Conclusion :** on sait alors, d'après le cours, que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

9. **9.a.** Montrer que $[S_n \neq T_n] \subset \bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]$.

On a :

$$\begin{aligned}[S_n \neq T_n] \subset \bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k] &\iff \overline{\bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]} \subset \overline{[S_n \neq T_n]} \\ &\iff \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = Y_k] \subset [S_n = T_n]\end{aligned}$$

lois de Morgan

Et cette dernière inclusion est immédiate, par définition de S_n et T_n.

À retenir...
$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$

> **Conclusion :** par équivalences, on a établi $[S_n \neq T_n] \subset \bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]$.

Autrement...

Soit $\omega \in [S_n \neq T_n]$. Dans ce cas :

$$S_n(\omega) \neq T_n(\omega)$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \neq \sum_{k=1}^{n} Y_k(\omega)$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \big(X_k(\omega) - Y_k(\omega)\big) \neq 0$$

Et ainsi, il existe au moins un $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $X_k(\omega) - Y_k(\omega) \neq 0$ (si ce n'était pas le cas, la somme serait nulle...).
Ainsi : il existe au moins un $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $X_k(\omega) \neq Y_k(\omega)$. Autrement dit :

$$\omega \in \bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]$$

D'où le résultat.

☞ Rappels...

$\omega \in \bigcup_{k \in I} A_k \iff \exists k \in I \mid \omega \in A_k$

$\omega \in \bigcap_{k \in I} A_k \iff \forall k \in I,\ \omega \in A_k$

9.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta(S_n, T_n) \leqslant 4 \sum_{k=1}^{n} p_k^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question 5.d., licite car X_n et Y_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\delta(S_n, T_n) \leqslant 2d(S_n, T_n)$$

- D'après la question précédente, et par croissance de $\mathbb{P}$:

$$d(S_n, T_n) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]\right)$$

- D'après l'inégalité de Boole :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_k \neq Y_k]\big)$$

- D'après la question 3.f. (licite par définition de X_k et Y_k) :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_k \neq Y_k]\big) \leqslant 2p_k^2$$

  En sommant pour $k \in [\![1;n]\!]$, on obtient finalement :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_k \neq Y_k]\big) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} p_k^2$$

D'où le résultat, par transitivité.

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta(S_n, T_n) \leqslant 4 \sum_{k=1}^{n} p_k^2$.

Remarque
C'est une question bilan. Tous les résultats intermédiaires étant donnés, il faut tenter cette question pour avoir les points.

10. *Un cas particulier* – On suppose dans cette question que tous les p_k sont égaux à $\frac{\lambda}{n}$ (avec λ un réel strictement positif). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a déjà :

$$\begin{aligned}\delta(S_n,T_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \mathbb{P}\left([T_n=k]\right)\right| \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \mathbb{P}\left([T_n=k]\right)\right| + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \mathbb{P}\left([T_n=k]\right)\right|}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{n} \left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \mathbb{P}\left([T_n=k]\right)\right|\end{aligned}$$

- Et, d'après la question précédente :

$$\delta(S_n,T_n) \leqslant 4 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k^2}_{=\frac{\lambda^2}{n}}$$

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \mathbb{P}\left([T_n=k]\right)\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}$$

D'où le résultat, d'après les lois de X_n et Y_n données en question **8.**, licite car pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $p_k = \dfrac{\lambda}{n}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}$.

11. *Une application* - Soit n un entier, $n \geqslant 2$, on réalise n expériences de Bernoulli indépendantes avec les probabilités de succès respectives $\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+2}, \dots, \dfrac{1}{2n}$. On note S_n le nombre de succès de l'expérience totale et $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

11.a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \dfrac{s_n^k}{k!}e^{-s_n}\right| \leqslant \dfrac{4}{n}$.

Notons, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $p_k = \dfrac{1}{n+k}$.

- ✓ Considérons que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $Y_k \hookrightarrow \mathscr{P}(p_k)$. Ainsi, comme en question **8.** : $T_n \hookrightarrow \mathscr{P}(s_n)$.
- ✓ En notant, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, X_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès à la k-ième épreuve de Bernoulli, 0 sinon, on a, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p_k)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Par conséquent, les hypothèses sur les lois de S_n et T_n sont présentes pour appliquer (LC) et ainsi :

$$\delta(S_n,T_n) \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} p_k^2$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \frac{s_n^k}{k!}e^{-s_n}\right| \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$$

Or :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\quad \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

D'où, en sommant pour $k \in [\![1;n]\!]$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

On a donc, par transitivité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \frac{s_n^k}{k!}e^{-s_n}\right| \leqslant \frac{4}{n}$$

Or chaque terme de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \frac{s_n^k}{k!}e^{-s_n}\right|$ est positif, donc, puisque la somme est inférieure ou égale à $\dfrac{4}{n}$, chacun des termes est également inférieur ou égal à $\dfrac{4}{n}$.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left|\mathbb{P}\left([S_n=k]\right) - \dfrac{s_n^k}{k!}e^{-s_n}\right| \leqslant \dfrac{4}{n}$.

Remarque

C'est une question assez difficile en fait, déroutante à plus d'un titre : • c'est une application de l'inégalité (LC) et pourtant, aucune somme n'entre en jeu ! Il faut toutefois appliquer ce qui précède, et voir comment conclure…
• il faut introduire des variables aléatoires qui ne sont pas comme les X_k et Y_k, mais qui en ont la même loi, ce qui suffit.

Pourquoi ?

Si ce n'était pas le cas, alors la somme serait strictement supérieure à $\dfrac{4}{n}$ puisque tous les termes sont positifs…

♥ L'avis du chef ! ♥

Une des difficultés, quand on doit établir des inégalités, réside dans le fait de savoir quelle information perdre. En effet, une inégalité est une perte d'information par rapport à une égalité. Ici, on utilise un résultat plus précis pour, à force de majorations "grossières", en déduire un résultats plus grossier.

11.b. Établir que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt$$

Soit $k \in [\![1;n]\!]$.

- On a :

$$\forall t \in [k;k+1],\ n+t \geqslant n+k$$

D'où, par décroissance de $\frac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, licite car pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $n+k \geqslant n > 0$:

$$\forall t \in [k;k+1],\ \frac{1}{n+t} \leqslant \frac{1}{n+k}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, licite car $k \leqslant k+1$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[k;k+1]$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{n+k}\,dt$$

Autrement dit :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leqslant \frac{1}{n+k}$$

- De la même façon :

$$\forall t \in [k-1;k],\ \frac{1}{n+t} \geqslant \frac{1}{n+k}$$

Et ainsi, en intégrant sur $[k-1;k]$:

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt \geqslant \frac{1}{n+k}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt.$

11.c. En déduire un encadrement de s_n puis que $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln(2)$.

- En sommant l'encadrement de la question précédente pour $k \in [\![1;n]\!]$, et par relation de Chasles :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \int_0^{n} \frac{1}{n+t}\,dt$$

Et ainsi :

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leqslant s_n \leqslant \ln(2n) - \ln(n)$$

C'est-à-dire :

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant s_n \leqslant \ln(2)$$

- Mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$, et donc, par composition, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln(2)$.

11.d. Conclure que $(S_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire S qui suit la loi de Poisson de paramètre $\ln(2)$.

Soit S une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{P}\big(\ln(2)\big)$. Puisque, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, S_n et S sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} S \iff \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) = \mathbb{P}\big([S = k]\big)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

✓ d'après la question **11.a.** et par théorème d'encadrement : $\lim_{n\to+\infty} \left|\mathbb{P}\big([S_n = k]\big) - \frac{s_n^k}{k!}e^{-s_n}\right| = 0.$

✓ d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n^k}{k!}e^{-s_n} = \frac{\ln(2)^k}{k!}e^{-\ln(2)}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([S_n = k]\big) &= \frac{\ln(2)^k}{k!}e^{-\ln(2)}\\ &= \mathbb{P}\big([S = k]\big)\end{aligned}$$

Conclusion : $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} S$, où $S \hookrightarrow \mathscr{P}\big(\ln(2)\big)$.

★Subtil...★

$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ n'implique pas $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$! Il se peut en effet que (u_n) et (v_n) n'aient pas de limite en ∞ ! Il suffit, pas exemple, de prendre $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$...

Partie 3 – Étude du maximum d'une fonction

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, on pose $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

12. Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et préciser la valeur de $h'(0)$.

- **Sur $\mathbb{R}^{+*}$:** la fonction h est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme quotient de deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- **En 0 :**
  - **Dérivabilité :**
    On sait que
    $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
    D'où :
    $$h(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
    Conclusion : h est dérivable en 0 et $h'(0) = \dfrac{1}{2}$.
  - **Continuité de h' :**
    On a, pour tout $x>0$:
    $$h'(x) = \frac{xe^x - (e^x-1)}{x^2}$$
    Or $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, d'où :
    $$xe^x = x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \quad ; \quad e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
    D'où :
    $$xe^x - (e^x-1) = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
    Ainsi :
    $$h'(x) = \frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)$$
    Part conséquent :
    $$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} h'(x) &= \frac{1}{2}\\ &= h'(0)\end{aligned}$$
    Conclusion : la fonction h' est continue en 0.

  Conclusion : h est $\mathscr{C}^1$ en 0.

> **Conclusion :** la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $h'(0) = \dfrac{1}{2}$.

♣ Méthode !
Sinon on étudie la limite du taux d'accroissement $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}$ lorsque $x \to 0$. On transforme un peu l'expression avant d'utiliser un $DL_2(0)$ de exp.

☞ Rappel...
h est dérivable en a ssi h admet un $DL_1(a)$; et, le cas échéant, $f'(a)$ est le coefficient devant le terme de degré 1 du DL.

★ Classique ! ★
Grand classique des concours, y compris sur les épreuves **Ecricome**, **EDHEC** et **emlyon**. À traiter parfaitement !

On définit alors la fonction g sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x h(t)dt$.

13. 13.a. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = e^{-x}\left(1 - \displaystyle\int_0^x \big(h(t)-h'(t)\big)dt\right)$.

Notons $H : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x h(t)dt$. Puisque h est continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction H est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ H'(x) = h(x)$$
Par conséquent, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:
$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x}H(x) + e^{-x}H'(x) \\ &= -e^{-x}\int_0^x h(t)dt + e^{-x}h(x) \\ &= -e^{-x}\int_0^x h(t)dt + e^{-x}\left(\int_0^x h'(t)dt + h(0)\right) \\ &= e^{-x}\left(1 - \int_0^x \big(h(t)-h'(t)\big)dt\right)\end{aligned}$$

h' est continue sur $[0;x]$, donc $\displaystyle\int_0^x h'(t)dt = h(x) - h(0)$

> **Conclusion :** pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = e^{-x}\left(1 - \displaystyle\int_0^x \big(h(t)-h'(t)\big)dt\right)$.

13.b. Montrer que pour tout $t > 0$, $h(t) - h'(t) = \dfrac{e^t - 1 - t}{t^2}$.

Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned} h(t) - h'(t) &= \frac{e^t - 1}{t} - \frac{te^t - e^t + 1}{t^2} \\ &= \frac{te^t - t - te^t + e^t - 1}{t^2} \\ &= \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $t > 0$, $h(t) - h'(t) = \dfrac{e^t - 1 - t}{t^2}$.

13.c. En déduire que pour tout $t \geqslant 0$, $h(t) - h'(t) > 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt = +\infty$.

- Soit $t \in \mathbb{R}^+$.
  - Si $t = 0$:
    On sait que $h(0) = 1$ et $h'(0) = \dfrac{1}{2}$; donc
    $$h(0) - h'(0) > 0$$
  - Si $t > 0$:
    On sait déjà que $e^t \geqslant t + 1$. Ensuite, par stricte convexité de exp sur $\mathbb{R}$, la courbe de exp est partout strictement au-dessus de sa tangente en 0, sauf au point de tangence.
    Par conséquent, puisque $t > 0$, on a $e^t > t + 1$, d'où :
    $$h(t) - h'(t) > 0$$

Remarque
On voit parfois dans les énoncés "Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t \geqslant t + 1$, avec égalité si, et seulement si, $t = 0$.

Conclusion : $\forall t \geqslant 0,\ h(t) - h'(t) > 0$.

-
  - Par conséquent, puisque $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt$ est une primitive de $h - h'$ sur $\mathbb{R}^+$, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.Ainsi, par théorème de limite monotone, la fonction F possède une limite en $+\infty$.
  - Or :
    ✓ par croissances comparées, on obtient rapidement $\dfrac{1}{t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{e^t - 1 - t}{t^2}\right)$;
    ✓ $\forall t \geqslant 1,\ \dfrac{1}{t} \geqslant 0 \quad ; \quad \dfrac{e^t - 1 - t}{t^2} \geqslant 0$
    ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente.

    Ainsi, par critère de comparaison (par négligeabilité), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^t - 1 - t}{t^2}\,dt$ est également divergente.
    Or $h - h'$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt$ est convergente (non impropre).

    Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt$ est divergente.

  Par conséquent :
  $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

Remarque
Le caractère strict n'est pas nécessaire...

Conclusion : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt = +\infty$.

Ou alors...

Par croissances comparées :
$$\lim_{t \to +\infty} \big(h(t) - h'(t)\big) = +\infty$$
Par conséquent, il existe un réel A, que l'on considère ensuite, tel que :
$$\forall t \geqslant A,\ \ h(t) - h'(t) \geqslant 1$$
Ainsi, par croissance de l'intégrale D'où, pour tout réel $x \geqslant A$, par croissance de l'intégrale
$$\int_A^x \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt \geqslant \int_A^x 1\,dt = x - A$$
et ainsi :
$$\int_0^x \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt = \int_0^A \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt + \int_A^x \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt \qquad \geqslant \int_0^A \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt + x - A$$

Or, par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^A \big(h(t)-h'(t)\big)\,dt + x - A = +\infty$$

Conclusion : par théorème de comparaison, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \big(h(t)-h'(t)\big)\,dt = +\infty$.

13.d. Dans un même tableau, représenter le signe de g' et les variations de g en justifiant que g possède un maximum qui est atteint en un unique réel noté $\gamma > 0$ que l'on fera apparaître dans ce tableau.

- En notant à nouveau $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \big(h(t)-h'(t)\big)\,dt$, on a :

$$\forall x \geqslant 0,\ \ g'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(1 - F(x)\big)$$

- Ensuite, la fonction F est :
  - ✓ continue sur $\mathbb{R}^+$, comme primitive de $h - h'$, continue sur $\mathbb{R}^+$;
  - ✓ strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, car pour tout $x \geqslant 0$, $F'(x) = h(x) - h'(x) > 0$ (question précédente).

  Ainsi, par théorème de bijection, la fonction F est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $F(\mathbb{R}^+)$, avec

$$\begin{aligned} F(\mathbb{R}^+) &= [F(0); \lim_{+\infty} F[\\ &\overset{\text{question précédente}}{=} \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

  Or $1 \in \mathbb{R}^+$, donc l'équation $F(x) = 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée γ. Et, puisque $F(0) = 0$, on a :

$$F(0) < F(\gamma)$$

  D'où, par stricte croissance de F sur $\mathbb{R}^+$:

$$\gamma > 0$$

  Enfin, comme F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\forall x \in [0;\gamma[,\ \ F(x) < 1 \quad ; \quad F(\gamma) = 1 \quad ; \quad \forall x \in]\gamma;+\infty[,\ \ F(x) > 1$$

On en déduit :

x	0		γ		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	

14. 14.a. Montrer que pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t$.

- Soit $t > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2} &\iff \frac{t^2}{2} \leqslant \mathrm{e}^t - 1 - t \\ &\iff \mathrm{e}^t - 1 - t - \frac{t^2}{2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

  Or :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^t &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \\ &\overset{t>0}{\geqslant} 1 + t + \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

♣ Méthode ! On peut également étudier la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t - 1 - t - \dfrac{t^2}{2}$...

  Conclusion : par équivalences, on a finalement $\forall t > 0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2}$.

- Soit $t > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2} \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^t &\iff \mathrm{e}^t - 1 - t \leqslant \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t \\ &\iff \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1 + t \geqslant 0 \end{aligned}$$

  Posons $\varphi : t \longmapsto \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1 + t$. La fonction φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\varphi'(t) = t\mathrm{e}^t + \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1$$

et

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= e^t + te^t + te^t + \frac{t^2}{2}e^t - e^t \\ &= e^t\left(\frac{t^2}{2} + 2t\right) \\ &\geqslant 0 \qquad t \geqslant 0\end{aligned}$$

Donc φ' est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Et comme $\varphi'(0) = 0$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi'(t) \geqslant 0$$

Donc φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Et comme $\varphi(0) = 0$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(t) \geqslant 0$$

Conclusion : par équivalences, on a finalement $\forall t > 0,\ \dfrac{e^t - 1 - t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}e^t$.

Conclusion : pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{e^t - 1 - t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}e^t$.

Remarque

Pas de difficulté particulière, si ce n'est l'autonomie demandée dans cette question. Il n'est en revanche pas rare de procéder ainsi...

14.b. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $e^{-x}\dfrac{3 - e^x}{2} \leqslant g'(x) \leqslant e^{-x}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$.

Soit $x \geqslant 0$. Puisque $h(0) = 1$ et $h'(0) = \dfrac{1}{2}$, l'encadrement de la question précédente est encore valable pour $t = 0$. D'où :

$$\forall t \geqslant 0,\ \frac{1}{2} \leqslant h(t) - h'(t) \leqslant \frac{1}{2}e^t$$

Ainsi, en intégrant sur $[0; x]$, licite car $x \geqslant 0$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0; x]$, on a, par croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{2}x \leqslant \int_0^x \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt \leqslant \frac{1}{2}(e^x - 1)$$

Ainsi :

$$1 - \frac{1}{2}x \geqslant 1 - \int_0^x \big(h(t) - h'(t)\big)\,dt \geqslant \frac{3 - e^x}{2}$$

D'où le résultat, puisque $e^{-x} > 0$ et d'après la question **13.a.**.

Conclusion : pour tout $x \geqslant 0$, $e^{-x}\dfrac{3 - e^x}{2} \leqslant g'(x) \leqslant e^{-x}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$.

14.c. En conclure que $\gamma \in [\ln(3); 2]$.

On rappelle que, d'après la question **13.d.**, pour tout $x \geqslant 0$:

$$g'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \gamma \quad ; \quad g'(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant \gamma$$

Or :

- d'après la question précédente, avec $x = \ln(3) \geqslant 0$:

$$g'\big(\ln(3)\big) \geqslant e^{-\ln(3)}\frac{3 - e^{\ln(3)}}{2} = 0$$

Ainsi :

$$\ln(3) \leqslant \gamma$$

- à nouveau d'après la question précédente, avec $x = 2$:

$$g'(2) \leqslant e^{-2}\left(1 - \frac{2}{2}\right) = 0$$

Ainsi :

$$2 \geqslant \gamma$$

Conclusion : $\gamma \in [\ln(3); 2]$.

15. 15.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; n]$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-n} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!}$$

et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} \leqslant h(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} + \frac{x^n}{n!}$.

- ✱ On a déjà :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Ensuite :

× puisque $x \geqslant 0$, on a $\forall k \in [\![n+1\,;+\infty[\![$, $\dfrac{x^k}{k!} \geqslant 0$; d'où

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \geqslant 0$$

et donc :

$$e^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

× et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{k-n}}{\frac{k!}{n!}}$$

Or, pour tout $k \in [\![n+1\,;+\infty[\![$:

$$\begin{aligned} \frac{k!}{n!} &= \prod_{i=n+1}^{k} i \\ &\geqslant \underbrace{\prod_{i=n+1}^{k} (n+1)}_{=(n+1)^{k-n}} \end{aligned}$$

$\forall i \geqslant n+1,\ i \geqslant n+1 > 0$

Par conséquent :

$$\forall k \in [\![n+1\,;+\infty[\![,\ \frac{1}{\frac{k!}{n!}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$$

D'où, puisque $x \geqslant 0$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{k-n}}{\frac{k!}{n!}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{k-n}}{(n+1)^{k-n}}$$

Et ainsi, puisque $\dfrac{x^n}{n!} \geqslant 0$:

$$e^x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-n}$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-n}$.

- ✱ Puis, par changement d'indice $i = k - n$:

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-n} &= \frac{x^n}{n!} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n+1}\right)^{i} \\ &= \frac{x^n}{n!} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{n+1}} - 1\right) \\ &= \frac{x^n}{n!} \frac{\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}} \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!} \frac{1}{n+1-x} \\ &\leqslant \frac{x^{n+1}}{n!} \end{aligned}$$

$x \leqslant n$, donc $n+1-x \geqslant 1$, et $\dfrac{x^{n+1}}{n!} \geqslant 0$

☞ Rappel...

Pour tout $q \in]-1\,;1[$, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=p}^{+\infty} q^i = q^p \frac{1}{1-q}$$

Mais il n'est pas clair que cette formule soit au programme. Je fais sans dans ce cas.

$$\boxed{\textbf{Conclusion : } \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-n} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!}.}$$

- Distinguons deux cas :

* Si $x = 0$:
  On rappelle que pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$0^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

  D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1$$

  et comme $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{x^n}{n!} = 0$$

  L'encadrement voulu est alors vrai, car $h(0) = 1$.
* Si $x > 0$:
  C'est immédiat, car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et que $x > 0$...

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} \leqslant h(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} + \frac{x^n}{n!}$.

15.b. En conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; n]$,

$$e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!k}\right) \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!k}\right) + e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = e^{-x}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!k}$.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; n]$. D'après la question précédente et en intégrant sur $[0; x]$, licite car les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0; x]$:

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k!} dt \leqslant \int_0^x h(t) dt \leqslant \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k!} + \frac{t^n}{n!}\right) dt$$

  D'où, puisque $e^{-x} \geqslant 0$ et par linéarité de l'intégrale :

$$e^{-x}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\int_0^x t^{k-1} dt \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\int_0^x t^{k-1} dt + e^{-x}\frac{1}{n!}\int_0^x t^n dt$$

  Autrement dit, puisque pour tout $k \geqslant 1$, $0^k = 0$:

$$e^{-x}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!k} \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!k} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Soit $x \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, on a alors $x \leqslant n$ et ainsi :

$$e^{-x}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!k} \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!k} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

  Or :
  * $\displaystyle\sum_{j \geqslant 0} \frac{x^j}{j!}$ est convergente, donc $\displaystyle\lim_{j \to +\infty} \frac{x^j}{j!} = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

  * et :
    ✓ puisque $x \geqslant 0$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{x^k}{k!k} \leqslant \frac{x^k}{k!}$$

    ✓ la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{x^k}{k!}$ est convergente.

    Ainsi, par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{x^k}{k!k}$ est convergente.

    Donc : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!k}$.

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!k} = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!k} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k}$$

Par théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} g(x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k}$.

16. Compléter le programme suivant pour qu'il trace la partie de la courbe de g comprise entre les abscisses $\ln(3)$ et 2, les valeurs de g étant calculées à 10^{-4} près :

```python
X = np.linspace(np.log(3),2,100)
Y = []
for x in X:
    n = 2; s = x + x**2/4; d = x**3/6
    while d * np.exp(-x) > 0.0001:
        n = n + 1
        s = s + ...
        d = d * x / ...
    Y.append(s * ...)
plt.plot(X,Y)
plt.grid()
plt.show()
```

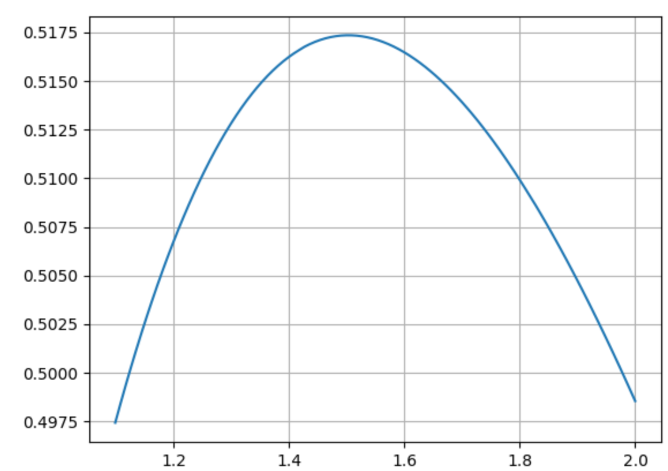
Voici :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X = np.linspace(np.log(3),2,100)
Y = []
for x in X:
    n = 2; s = x + x**2/4; d = x**3/6
    while d * np.exp(-x) > 0.0001:
        n = n + 1
        s = s + d/n
        d = d * x / (n+1)
    Y.append(s * np.exp(-x))
plt.plot(X,Y)
plt.grid()
plt.show()
```

✘ Attention !
Il faut faire attention à ne pas mélanger n et $n+1$...

On obtient le graphique suivant :



Partie 4 – Le problème du meilleur choix

On considère $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à densité.

Soit $s\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on définit des variables aléatoires, $a_{n,s}$, $Y_{n,s}$, Z_n et $K_{n,s}$ par, pour tout $\omega\in\Omega$:

$$a_{n,s}(\omega)=\min\Big(\{k\in[\![1;n]\!]\ /\ X_k(\omega)>s\}\cup\{n\}\Big)\quad;\quad Y_{n,s}(\omega)=X_{a_{n,s}(\omega)}(\omega)\quad;\quad Z_n(\omega)=\max_{k\in[\![1;n]\!]}\big(X_k(\omega)\big)$$

et $K_{n,s}(\omega)$ est égal au nombre d'indices $k\in[\![1;n]\!]$ tels que $X_k(\omega)>s$.
On cherche à choisir s pour maximiser $r_n=\mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\big)$.
On pose pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, $p_k=\mathbb{P}\big([X_k>s]\big)$ et on suppose que $p_k\neq 1$.

Important !
Pour comprendre : $Y_{n,s}$ prend la valeur du premier X_k pour lequel $X_k>s$; et s'il n'y en a pas, alors $Y_{n,s}$ prend la valeur de X_n.

17. *Une minoration dans le cas général.*

17.a. Montrer que $\mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\big)\geqslant\mathbb{P}\big([K_{n,s}=1]\big)$.

➟Réflexe !
Une inégalité de probabilité ? On regarde l'inclusion d'évènements qui l'impliquerait.

Démontrons que $[K_{n,s}=1]\subset[Y_{n,s}=Z_n]$.
Soit $\omega\in[K_{n,s}=1]$. Puisque $K_{n,s}(\omega)=1$, il existe un unique entier k_0, que l'on considère ensuite, tel que

$$\begin{cases}X_{k_0}(\omega)>s\\ \forall k\neq k_0,\ X_k(\omega)\leqslant s\end{cases}$$

Ainsi, nécessairement, $Z_n(\omega)=X_{k_0}(\omega)$ et $a_{n,s}(\omega)=k_0$. D'où :

$$\begin{aligned}Y_{n,s}(\omega)&=X_{k_0}(\omega)\\&=Z_n(\omega)\end{aligned}$$

Ainsi $\omega\in[Y_{n,s}=Z_n]$.

Conclusion : $[K_{n,s}=1]\subset[Y_{n,s}=Z_n]$ et donc, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\big)\geqslant\mathbb{P}\big([K_{n,s}=1]\big)$$

17.b. On pose $\theta=\mathbb{P}\big([Z_n\leqslant s]\big)$. Montrer que $\mathbb{P}\big([K_{n,s}=1]\big)=\theta\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1-p_k}$.

Par définition de $K_{n,s}$:

$$[K_{n,s}=1]=\bigcup_{k=1}^{n}\left([X_k>s]\cap\bigcap_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}[X_i\leqslant s]\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([K_{n,s}=1]\big)&=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left([X_k>s]\cap\bigcap_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}[X_i\leqslant s]\right)\right)\\
&\quad\text{incompatibilité des évènements en jeu car, pour tout } k\in[\![1;n]\!],\ [X_k\leqslant s] \text{ et } [X_k>s] \text{ sont incompatibles}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left([X_k>s]\cap\bigcap_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}[X_i\leqslant s]\right)\\
&\quad\text{indépendance de } X_1,\dots,X_n\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(p_k\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(1-p_i)\right)\\
&\quad\forall k\in[\![1;n]\!],\ p_k\neq 1\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{p_k}{1-p_k}\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)\\
&=\left(\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)\times\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1-p_k}\\
&\quad[Z_n\leqslant s]=\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\leqslant s] \text{ donc, par indépendance de } X_1,\dots,X_n : \theta=\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\\
&=\theta\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1-p_k}\end{aligned}$$

Astuce du chef
On fait apparaître $\dfrac{1}{1-p_k}$, que l'on compense... Puis on réfléchit !

Conclusion : $\mathbb{P}\big([K_{n,s}=1]\big)=\theta\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1-p_k}$.

17.c. En déduire que $\mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\big)\geqslant-\theta\ln(\theta)$.

Remarquons déjà que, puisque $\theta=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$ et que, pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, $p_k<1$, on a $\theta>0$ et ainsi :

$$-\theta\ln(\theta)=-\theta\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)\right)$$

$\forall k\in[\![1;n]\!],\ 1-p_k>0$ (car $\forall k\in[\![1;n]\!],\ p_k<1$)

$$\begin{aligned}
&= \theta \sum_{k=1}^{n} -\ln(1-p_k) \\
&= \theta \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{1-p_k}\right) \\
&= \theta \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{p_k}{1-p_k}\right) && \text{question } \mathbf{1.} \text{ avec } t = \frac{p_k}{1-p_k} \geqslant 0\,;\ \theta \geqslant 0 \\
&\leqslant \theta \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{1-p_k}
\end{aligned}$$

D'où le résultat, d'après les deux questions précédentes.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y_{n,s} = Z_n]\big) \geqslant -\theta \ln(\theta)$.

17.d. En déduire l'existence d'au moins une valeur de s, que l'on définira à l'aide de la fonction de répartition F_n de Z_n, pour laquelle $\mathbb{P}\big([Y_{n,s} = Z_n]\big) \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

D'après la question précédente, et par définition de θ, on a :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([Y_{n,s} = Z_n]\big) \geqslant -F_n(s) \ln\big(F_n(s)\big) \quad (\star)$$

Or, on remarque que $-\mathrm{e}^{-1} \ln(\mathrm{e}^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Pourquoi ?
Si besoin, on peut aussi rapidement étudier $x \longmapsto -x\ln(x)$ sur $]0;1[$ pour remarquer qu'elle admet un maximum égal à e^{-1}, atteint en e^{-1}.

Question : existe-t-il $s \in \mathbb{R}$ tel que $F_n(s) = \mathrm{e}^{-1}$?
On a :

✓ par indépendance de $X_1, \dots, X_n$:

$$\forall s \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \prod_{k=1}^{n} G_k(s)$$

en notant, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, G_k la fonction de répartition de X_k.
Or, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, X_k est à densité donc G_k est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction F_n est également continue sur $\mathbb{R}$.

✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 1$; donc $\mathrm{e}^{-1} \in \,]\lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x); \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $F_n(s) = \mathrm{e}^{-1}$ possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$.
En évaluant $(\star)$ en un tel réel, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([Y_{n,s} = Z_n]\big) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Conclusion : il existe au moins un réel s (tout antécédent de e^{-1} par F_n) tel que $\mathbb{P}\big([Y_{n,s} = Z_n]\big) \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Remarque
Même si les outils sont élémentaires, la question n'est pas si simple.

► **On suppose désormais que les X_k suivent la même loi donc que les p_k sont tous égaux, non nuls. On note p cette valeur commune, F la fonction de répartition et f une densité communes aux X_k.**

On admet que si X et Y sont deux variables à densité indépendantes, de fonction de répartition F_X pour X et de densité f_Y pour Y, on a alors $\mathbb{P}\big([X \leqslant Y]\big) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t) f_Y(t)\,dt$.

On rappelle que si A est un événement de probabilité non nulle, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$ est un espace probabilisé admettant les mêmes variables aléatoires et ayant les mêmes propriétés que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

18. *Une estimation* – On suppose dans cette question les X_k suivent la loi uniforme sur $[0;1[$.

18.a. Montrer que $s = 1 - p$.

Remarquons déjà que, dans ce cas :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Ainsi, tout réel s défini comme en question précédent est nécessairement dans l'intervalle $[0;1[$.
Ensuite, par définition, p est la valeur commune des $\mathbb{P}\big([X_k > s]\big)$.
D'où :

$$\begin{aligned}
p &= 1 - F(s) \\
&= 1 - s && s \in [0;1[
\end{aligned}$$

Conclusion : $s = 1 - p$.

18.b. Écrire une fonction **Python** **simulCouple(n,p)** qui renvoie une simulation du couple $(Z_n, Y_{n,s})$.

```python
import numpy.random as rd

def simuleCouple(n,p):
    L=[rd.random() for k in range(n)]
    Z=max(L)
    s=1-p
    for x in L:
        if x>s:
            Y=x
            return (Z,Y)
    return (Z,L[n-1]) #si les Xk<=s, alors Y est le dernier Xk
```

18.c. Écrire un programme **Python** qui réalise et affiche une estimation de r_{10} dans ces conditions lorsque $n = 10$ et $p = 0,15$.

D'après la question **18.a.**, on a alors $s = 0,85$. Dans ce cas, $r_{10} = \mathbb{P}\big([Y_{10;0,85} = Z_{10}]\big)$ et ainsi, pour estimer r_{10}, on détermine la fréquence d'apparition de l'évènement $[Y_{10;0,85} = Z_{10}]$ sur un grand nombre de répétitions indépendantes de l'expérience. Voici un programme :

```python
n=10
p=0.15
c=0
for k in range(100000):
    (Z,Y)=simulCouple(n,p)
    if Z==Y:
        c=c+1
print(c/100000)
```

✘ Attention !
Il ne faut exécuter **simulCouple(n,p)** qu'une seule fois ! Sinon, on change la réalisation des X_k...

19. *Une expression explicite de r_n* – Soit $k \in [\![1;n]\!]$, on note $I_1, \dots, I_{\binom{n}{k}}$ les parties à k éléments de $[\![1;n]\!]$. Pour tout $j \in \left[\!\!\left[1;\binom{n}{k}\right]\!\!\right]$, on définit A_j l'événement $\left(\bigcap_{i\in I_j}[X_i > s]\right) \cap \left(\bigcap_{i\notin I_j}[X_i \leqslant s]\right)$.

19.a. Montrer que pour tout x réel et $i \in I_j$,

$$\mathbb{P}_{A_j}\big([X_i \leqslant x]\big) = \begin{cases} \dfrac{F(x)-F(s)}{p} & \text{si } x > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et que les X_i pour $i \in I_j$ sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_j}$.

- Remarquons déjà que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_j) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{m\in I_j}[X_m > s]\right) \cap \left(\bigcap_{m\notin I_j}[X_m \leqslant s]\right)\right) && \text{indépendance de } X_1, \dots, X_n, \text{ et } p_1 = \dots = p_n = p \\ &= p^{\mathrm{Card}(I_j)}(1-p)^{n-\mathrm{Card}(I_j)} && I_j \text{ est une partie à } k \text{ éléments de } [\![1;n]\!] \\ &= p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

En particulier, $\mathbb{P}(A_j) \neq 0$.

- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $i \in I_j$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{A_j}\big([X_i \leqslant x]\big) &= \frac{\mathbb{P}\big(A_j \cap [X_i \leqslant x]\big)}{\mathbb{P}(A_j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{m\in I_j}[X_m > s]\right) \cap \left(\bigcap_{m\notin I_j}[X_m \leqslant s]\right) \cap [X_i \leqslant x]\right)}{\mathbb{P}(A_j)} && i \in I_j \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{\substack{m\in I_j\\ m\neq i}}[X_m > s]\right) \cap \left(\bigcap_{m\notin I_j}[X_m \leqslant s]\right) \cap [X_i > s] \cap [X_i \leqslant x]\right)}{\mathbb{P}(A_j)} && \text{si } x \leqslant s, \text{ alors } [X_i \leqslant x] \cap [X_i > s] = \varnothing \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant s \\ \dfrac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{\substack{m\in I_j\\ m\neq i}}[X_m > s]\right) \cap \left(\bigcap_{m\notin I_j}[X_m \leqslant s]\right) \cap [s < X_i \leqslant x]\right)}{\mathbb{P}(A_j)} & \text{si } x > s \end{cases} && \text{indépendance de } X_1, \dots, X_n\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant s \\ \dfrac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{\substack{m\in I_j \\ m\neq i}}[X_m > s]\right) \cap \left(\bigcap\limits_{m\notin I_j}[X_m \leqslant s]\right)\right) \times \mathbb{P}\left([s < X_i \leqslant x]\right)}{\mathbb{P}(A_j)} & \text{si } x > s \end{cases}$$

Or, de la même façon que pour $\mathbb{P}(A_j)$:

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{\substack{m\in I_j \\ m\neq i}}[X_m > s]\right) \cap \left(\bigcap\limits_{m\notin I_j}[X_m \leqslant s]\right)\right) = p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}_{A_j}\left([X_i \leqslant x]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant s \\ \dfrac{p^{k-1}(1-p)^{n-k} \times \mathbb{P}\left([s < X_i \leqslant x]\right)}{p^k(1-p)^{n-k}} & \text{si } x > s \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant s \\ \dfrac{\mathbb{P}\left([s < X_i \leqslant x]\right)}{p} & \text{si } x > s \end{cases}$$

Conclusion : pour tout x réel et $i \in I_j$, $\mathbb{P}_{A_j}\left([X_i \leqslant x]\right) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(s)}{p} & \text{si } x > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- Pour démontrer que les X_i pour $i \in I_j$ sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_j}$, démontrons :

$$\forall (x_i)_{i\in I_j} \in \mathbb{R}^k,\ \mathbb{P}_{A_j}\left(\bigcap_{i\in I_j}[X_i \leqslant x_i]\right) = \prod_{i\in I_j} \mathbb{P}_{A_j}\left([X_i \leqslant x_i]\right)$$

Soit $(x_i)_{i\in I_j} \in \mathbb{R}^k$.

$$\mathbb{P}_{A_j}\left(\bigcap_{i\in I_j}[X_i \leqslant x_i]\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{i\in I_j}[X_i > s]\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i\notin I_j}[X_i \leqslant s]\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i\in I_j}[X_i \leqslant x_i]\right)\right)}{\mathbb{P}(A_j)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{i\in I_j}[s < X_i \leqslant x_i]\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i\notin I_j}[X_i \leqslant s]\right)\right)}{\mathbb{P}(A_j)} & \text{si } \forall i \in I_j,\ x_i \geqslant s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

indépendance de $X_1, \ldots, X_n$ pour $\mathbb{P}$

$$= \begin{cases} \dfrac{\left(\prod\limits_{i\in I_j}\mathbb{P}\left([s < X_i \leqslant x_i]\right)\right) \times \left(\prod\limits_{i\notin I_j}\mathbb{P}\left([X_i \leqslant s]\right)\right)}{\mathbb{P}(A_j)} & \text{si } \forall i \in I_j,\ x_i \geqslant s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\left(\prod\limits_{i\in I_j}F(x_i) - F(s)\right) \times \left((1-p)^{n-k}\right)}{p^k(1-p)^{n-k}} & \text{si } \forall i \in I_j,\ x_i \geqslant s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \prod\limits_{i\in I_j} \dfrac{F(x_i) - F(s)}{p} & \text{si } \forall i \in I_j,\ x_i \geqslant s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

point précédent

$$= \prod_{i\in I_j} \mathbb{P}_{A_j}\left([X_i \leqslant x]\right)$$

Conclusion : les X_i pour $i \in I_j$ sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_j}$.

Remarque

C'est un peu lourd à écrire, mais finalement pas si difficile dans les manipulations et les calculs.

19.b. En déduire que pour tout $r \in I_j$:

$$\mathbb{P}_{A_j}\left(\left[X_r = \max_{i\in I_j}(X_i)\right]\right) = \frac{1}{p^k}\int_s^{+\infty}\big(F(t)-F(s)\big)^{k-1} f(t)dt = \frac{1}{k}$$

Travaillons à présent dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{A_j})$.
Soit $r \in I_j$. Puisque $r \in I_j$, on a :

$$\left[X_r = \max_{i\in I_j}(X_i)\right] = \bigcap_{\substack{i\in I_j\\ i\neq r}}[X_i \leqslant X_r] = \left[\max_{i\in I_j\setminus\{r\}}(X_i) \leqslant X_r\right]$$

D'où :

$$\mathbb{P}_{A_j}\left(\left[X_r = \max_{i\in I_j}(X_i)\right]\right) = \mathbb{P}_{A_j}\left(\left[\max_{i\in I_j\setminus\{r\}}(X_i) \leqslant X_r\right]\right)$$

Or :

- ✓ Pour tout $i \in I_j$, dans cet espace probabilisé, la fonction de répartition de X_i, notée F_{A_j}, est, d'après la question précédente :

$$F_{A_j} : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{F(x)-F(s)}{p} & \text{si } x > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Cette fonction est :

  - ✓ continue sur $\mathbb{R}$ (immédiat sur $]-\infty; s[$ et en s ; et sur $]s; +\infty[$ car F l'est)
  - ✓ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points (immédiat sur $]-\infty; s[$; et sur $]s; +\infty[$ car F l'est).

  Par conséquent, dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{A_j})$, la variable aléatoire X_i est à densité et admet pour densité la fonction (obtenue en dérivant sur les intervalles ouverts et en posant une valeur arbitraire positive ailleurs) :

$$f_{A_j} : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)}{p} & \text{si } x > s \\ 0 & \text{si } x \leqslant x \end{cases}$$

- ✓ Par indépendance des X_i, pour $i \in I_j$, pour $\mathbb{P}_{A_j}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}_{A_j}\left(\left[\max_{i\in I_j\setminus\{r\}}(X_i) \leqslant x\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant s \\ \dfrac{\big(F(x)-F(s)\big)^{k-1}}{p^{k-1}} & \text{si } x > s \end{cases}$$

  Il s'agit de la fonction de répartition de $\max\limits_{i\in I_j\setminus\{r\}}(X_i)$ dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{A_j})$.

- ✓ les X_i, pour $i \in I_j$ sont indépendantes pour $\mathbb{P}_{A_j}$, donc par lemme des coalitions (puisque $r \in I_j$), $\max\limits_{i\in I_j\setminus\{r\}}(X_i)$ et X_r sont indépendantes pour $\mathbb{P}_{A_j}$.

Ainsi, d'après le résultat donné avant la question **18.** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{A_j}\left(\left[\max_{i\in I_j\setminus\{r\}}(X_i) \leqslant X_r\right]\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{P}_{A_j}\left(\left[\max_{i\in I_j\setminus\{r\}}(X_i) \leqslant x\right)\right) f_{A_j}(x)dx \\
&= \int_s^{+\infty}\frac{\big(F(x)-F(s)\big)^{k-1}}{p^{k-1}}\frac{f(x)}{p}dx \\
&= \frac{1}{p^k}\int_s^{+\infty}\big(F(x)-F(s)\big)^{k-1}f(x)dx && k-1 \neq -1 \\
&= \frac{1}{p^k}\left[\frac{\big(F(x)-F(s)\big)^k}{k}\right]_s^{x\to+\infty} && k \geqslant 1, \text{ donc } 0^k = 0 \\
&= \frac{1}{p^k}\frac{\big(1-F(s)\big)^k}{k} \\
&= \frac{1}{p^k}\frac{p^k}{k} \\
&= \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $r \in I_j$, $\mathbb{P}_{A_j}\left(\left[X_r = \max\limits_{i\in I_j}(X_i)\right]\right) = \dfrac{1}{k}$.

Pourquoi ?
On ne fait que généraliser le fait que pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}$:
$\max(a, b) = a \iff b \leqslant a$

À retenir…
$\max(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \iff \max(x_2, \ldots, x_n) \leqslant x_1$

Remarque
L'intuition est bonne : puisque les lois conditionnelles des X_i sachant A_j sont identiques et que les variables aléatoires X_i, pour tout $i \in I_j$, sont indépendantes pour $\mathbb{P}_{A_j}$, ces k variables aléatoires ont bien toutes la même probabilité d'être $\max\limits_{i\in I_j}(X_i)$…

COMMENTAIRES...

1# Évidemment, la fin du calcul est simple, et il est bon d'aller prendre les points en question. En revanche, le reste de la question demande une intuition et une autonomie qu'il est honteux d'attendre des candidates et candidats. On manipule en fait ici des lois conditionnelles à densité : notion évidemment hors programme, mais si j'ai fait le choix de présenter les choses un peu différemment.

2# En fait, il y a un autre problème ici, que l'énoncé ne soulève pas du tout : puisque la fonction f n'est pas nécessairement continue en tout réel, l'intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty} \big(F(x)-F(s)\big)^{k-1} f(x)dx$ peut être impropre en des bornes réelles, ce qui sort du cadre du programme... En pratique, il n'y a aucun souci de convergence, puisque :

- ✓ $\forall x \in [s;+\infty[,\ 0 \leqslant \big(F(x)-F(s)\big)^{k-1} f(x) \leqslant f(x)$
- ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty} f(x)dx$ est convergente (car f est une densité).

Ainsi, par critère de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty} \big(F(x)-F(s)\big)^{k-1} f(x)dx$ est convergente.

3# Le calcul même de l'intégrale pose également souci, puisque F n'est pas nécessairement dérivable en tout réel, et donc il faudrait primitiver $x \longmapsto \big(F(x)-F(s)\big)^{k-1} f(x)$ sur les intervalles ouverts...

19.c. Montrer que :

$$\mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\cap[K_{n,s}=k]\big) = \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\cap A_j\big) \text{ et que } \mathbb{P}_{A_j}\big([Y_{n,s}=Z_n]\big) = \frac{1}{k}$$

- Par définition des évènements A_j, on a :

$$[K_{n,s}=k] = \bigcup_{j=1}^{\binom{n}{k}} A_j$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\cap[K_{n,s}=k]\big) &= \mathbb{P}\left([Y_{n,s}=Z_n]\cap \bigcup_{j=1}^{\binom{n}{k}} A_j\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\binom{n}{k}} [Y_{n,s}=Z_n]\cap A_j\right) \\
&\quad \text{incompatibilité des } A_j \text{ (justifiée ci-dessous)} \\
&= \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\cap A_j\big)
\end{aligned}$$

Soient $j, j' \in \left[\!\left[1;\binom{n}{k}\right]\!\right]$ tels que $j \neq j'$. Dans ce cas, $I_j \neq I'_{j'}$ et donc, puisque I_j et $I_{j'}$ sont tous deux de cardinaux k, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$, que l'on considère ensuite, tel que $i_0 \in I_j$ et $i_0 \notin I_{j'}$.
Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
A_j \cap A_{j'} &= \left(\bigcap_{i\in I_j}[X_i>s]\right)\cap\left(\bigcap_{i\notin I_j}[X_i\leqslant s]\right)\cap\left(\bigcap_{i\in I_{j'}}[X_i>s]\right)\cap\left(\bigcap_{i\notin I_{j'}}[X_i\leqslant s]\right) \\
&= \left(\bigcap_{\substack{i\in I_j\\ i\neq i_0}}[X_i>s]\right)\cap\left(\bigcap_{i\notin I_j}[X_i\leqslant s]\right)\cap[X_{i_0}>s]\cap\left(\bigcap_{i\in I_{j'}}[X_i>s]\right)\cap\left(\bigcap_{\substack{i\notin I_j\\ i\neq i_0}}[X_i\leqslant s]\right)\cap[X_{i_0}\leqslant s] \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

D'où l'incompatibilité de A_j et $A_{j'}$.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\cap[K_{n,s}=k]\big) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P}\big([Y_{n,s}=Z_n]\cap A_j\big)$.

- Supposons A_j réalisé.
Dans ce cas :

$[Y_{n,s} = Z_n]$ est réalisé si, et seulement si, $Y_{n,s}$ prend comme valeur $\max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}(X_i)$

si, et seulement si, $Y_{n,s}$ prend comme valeur $\max\limits_{i\in I_j}(X_i)$, pour tout $i \notin I_j$, $X_i \leqslant s$ et que $\max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}(X_i) > s$ puisque A_j est réalisé

si, et seulement si, le premier des X_i, avec $i \in [\![1;n]\!]$, tel que $X_i > s$ est $\max\limits_{i\in I_j}(X_i)$

si, et seulement si, le premier des X_i, avec $i \in I_j$, tel que $X_i > s$ est $\max\limits_{i\in I_j}(X_i)$, car les autres X_i sont inférieurs ou égaux à s

si, et seulement si, $\left[X_r = \max\limits_{i\in I_j}(X_i)\right]$ est réalisé, en notant r le premier indice pour lequel $X_i > s$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{A_j}\big([Y_{n,s} = Z_n]\big) &= \mathbb{P}_{A_j}\left(\left[X_r = \max_{i\in I_j}(X_i)\right]\right) && \text{question précédente}\\ &= \frac{1}{k}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}_{A_j}\big([Y_{n,s} = Z_n]\big) = \dfrac{1}{k}$.

19.d. Montrer de même que $\mathbb{P}\big([Y_{n,s} = Z_n] \cap [K_{n,s} = 0]\big) = \dfrac{1}{n}(1-p)^n$.

- On a

$$[K_{n,s} = 0] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant s]$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([K_{n,s} = 0]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leqslant s]\right) && \text{indépendance de } X_1, \ldots, X_n \text{ et } p_1 = \ldots = p_n = p\\ &= (1-p)^n\end{aligned}$$

- Ainsi $\mathbb{P}\big([K_{n,s} = 0]\big) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_{n,s} = Z_n] \cap [K_{n,s} = 0]\big) = \frac{1}{n}(1-p)^n &= \mathbb{P}\big([K_{n,s} = 0]\big) \times \mathbb{P}_{[K_{n,s}=0]}\big([Y_{n,s} = Z_n]\big) && \text{si } K_{n,s}(\omega) = 0, \text{ alors } a_{n,s}(\omega) = n\\ &= (1-p)^n \mathbb{P}_{[K_{n,s}=0]}\big([X_n = Z_n]\big)\\ &= (1-p)^n \mathbb{P}_{[K_{n,s}=0]}\left(\left[X_n = \max_{i\in[\![1;n]\!]}(X_i)\right]\right)\\ &= (1-p)^n \mathbb{P}_{[K_{n,s}=0]}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}[X_i \leqslant X_n]\right)\\ &= (1-p)^n \mathbb{P}_{[K_{n,s}=0]}\left(\left[\max_{i\in[\![1;n-1]\!]}(X_i) \leqslant X_n\right]\right) && \text{en procédant comme en 19.b., en vérifiant toutes les hypothèses et en adaptant les probabilités et lois conditionnelles...}\\ &= (1-p)^n \int_{-\infty}^{s} \frac{\big(F(x)\big)^{n-1}}{(1-p)^{n-1}} \frac{f(x)}{1-p}\, dx\\ &= \int_{-\infty}^{s} \big(F(x)\big)^{n-1} f(x)\, dx\\ &= \left[\frac{\big(F(x)\big)^n}{n}\right]_{x\to-\infty}^{s}\\ &= \frac{\big(F(s)\big)^n}{n}\\ &= \frac{(1-p)^n}{n}\end{aligned}$$

Remarque

Je ne détaille pas tous les calculs : la difficulté de la question 19.b. est déjà bien suffisante et il est peu probable que ces questions aient été réussies. Se contenter de faire les calculs auraient certainement suffi à obtenir tous les points.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y_{n,s} = Z_n] \cap [K_{n,s} = 0]\big) = \dfrac{1}{n}(1-p)^n$.

COMMENTAIRE...

Là encore, la difficulté de la question et sa longueur (s'il fallait tout détailler) sont démesurées. D'ailleurs, les commentaires faits à la question 19.b. sont encore valables.

19.e. En conclure que $r_n = \frac{1}{n}(1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Par définition de $K_{n,s}$, on a $K_{n,s}(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales avec $\left([K_{n,s} = k]\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

Important ! Il faut arriver à repérer que cette question est facile et faisable puisque les résultats précédents sont donnés.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([Y_{n,s} = Z_n]\right) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([Y_{n,s} = Z_n] \cap [K_{n,s} = k]\right)\\
&= \mathbb{P}\left([Y_{n,s} = Z_n] \cap [K_{n,s} = 0]\right) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([Y_{n,s} = Z_n] \cap [K_{n,s} = k]\right) && \text{questions 19.c. et 19.d.}\\
&= \frac{1}{n}(1-p)^n + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P}\left([Y_{n,s} = Z_n] \cap A_j\right) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ \forall j \in \left[\!\left[1;\binom{n}{k}\right]\!\right],\ \mathbb{P}(A_j) \neq 0\\
&= \frac{1}{n}(1-p)^n + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}\left([Y_{n,s} = Z_n]\right) && \text{quetion 19.c. et } \forall k \in [\![1;n]\!],\ \forall j \in \left[\!\left[1;\binom{n}{k}\right]\!\right],\ \mathbb{P}(A_j) = p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \frac{1}{n}(1-p)^n + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} \frac{1}{k} p^k (1-p)^{n-k}\\
&= \frac{1}{n}(1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

Conclusion : $r_n = \frac{1}{n}(1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

20. *Comportement asymptotique* - On suppose que $p = \frac{\lambda}{n}$, λ étant un réel strictement positif ne dépendant pas de n.

20.a. En utilisant un résultat de la partie 2, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **10.** :

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}$$

Or :

- $$\sum_{k=0}^{n} \left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}$$
- et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$:
$$\frac{1}{k} \leqslant 1$$

d'où :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n} \leqslant \left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}$$

Ainsi, en sommant pour $k \in [\![1;n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}$$

D'où le résultat.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}$.

20.b. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} r_n = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!k}\right)\mathrm{e}^{-\lambda}$.

- Par inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left| \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \right|$$

D'où, d'après la question précédente et par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!k} \right) = 0$$

Or, on sait que $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{\lambda^k}{k!k}$ est convergente (justifié en question **15.b.**), ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!k} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!k} \end{aligned}$$

Remarque

On pourrait même obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-p)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\lambda}$ et j'ose espérer que ce calcul ne pose aucun souci...

- Ensuite, puisque $p \in [0;1]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{1}{n}(1-p)^n \leqslant \frac{1}{n}$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(1-p)^n = 0$$

On conclut en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la relation de la question **19.e.**.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!k} \right) \mathrm{e}^{-\lambda}$.

21. On suppose que n est assez grand pour pouvoir considérer que r_n vaut $\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!k} \right) \mathrm{e}^{-\lambda}$. Comment choisir s pour que cette probabilité soit maximale ?

D'après les questions **13.b.** et **15.b.**, la quantité $\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!k} \right) \mathrm{e}^{-\lambda}$ est maximale lorsque $\lambda = \gamma$.

Ainsi, cette quantité est maximale lorsque

$$p = \frac{\gamma}{n}$$

Or $p = 1 - F(s)$. Il faut donc choisir s tel que :

$$F(s) = 1 - \frac{\gamma}{n}$$

Conclusion : r_n est maximal lorsque s est un antécédent de $1 - \frac{\gamma}{n}$ par F, où $\gamma \simeq 1,5$ (question **16.**).

Remarque

Quand $n = 10$, si on prend $\gamma = 0,15$, la probabilité r_n est maximale lorsque s est un antécédent de $0,85$ par F.
Et, dans le cas de la question 18., on retrouve bien $s = 0,85$, ce qui avait été choisi dans l'énoncé.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★