Dans les questions faisant intervenir des instructions en langage **Python** on prendra soin d'importer les bibliothèques nécessaires lors de leur première utilisation.
Pour traiter les questions d'informatique, les candidats sont invités à se référer aux annexes fournies en fin de sujet. Ils ne sont pas limités à l'utilisation des seules fonctions mentionnées dans ces annexes.

Exercice 1

> **♡ L'avis du chef ! ♡**
> Exercice très classique, relativement proche de la version fortement retouchée de **Ecricome 2008 E - Exercice 1** que l'on peut trouver ici par exemple.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = 0_3$.

1. Déterminer les ensembles E_{0_3} et E_{I_3}.
   - Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in E_{0_3} &\iff 0_3M + M0_3 = 0_3 \\ &\iff 0_3 = 0_3 \end{aligned}$$

Conclusion : $E_{0_3} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   - Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in E_{I_3} &\iff I_3M + MI_3 = 0_3 \\ &\iff 2M = 0_3 \\ &\iff M = 0_3 \end{aligned}$$

Conclusion : $E_{I_3} = \{0_3\}$.

2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

> **♣ Méthode !**
> On revient à la définition de sous-espace vectoriel puisqu'il s'agit ici de traiter un cas général et qu'on ne peut donc pas déterminer une famille génératrice de E_C... Sinon, on pourrait raisonner par équivalences pour obtenir $E_C = \text{Vect}(\ldots)$.

   ✓ Par définition $E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
   ✓ Puisque $C0_3 + 0_3C = 0_3$, on a $0_3 \in E_C$. Ainsi : $E_C \neq \varnothing$.
   ✓ Soient $M, N \in E_C$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que $aM + bN \in E_C$.
      ⋆ Puisque $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a déjà $aM + bN \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
      ⋆ Ensuite :

$$\begin{aligned} C(aM+bN) + (aM+bN)C &= aCM + bCN + aMC + bNC \\ &= a(CM+MC) + b(CN+NC) \\ &= a0_3 + b0_3 && M, N \in E_C \\ &= 0_3 \end{aligned}$$

   Par conséquent : $aM + bN \in E_C$.

Conclusion : pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit M une matrice de E_A. Montrer que ${}^tM$ appartient à E_A.
   ✓ La matrice ${}^tM$ appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   ✓ Puis, remarquons que A est diagonalisable, ainsi ${}^tA = A$. D'où :

> **☞ Rappel...**
> Pour toutes matrices A et B telles que le produit AB existe, le produit ${}^tB{}^tA$ existe et ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

$$\begin{aligned} A{}^tM + {}^tMA &= {}^tA{}^tM + {}^tM{}^tA \\ &= {}^t(MA) + {}^t(AM) \\ &= {}^t(MA + AM) && \text{linéarité de la transposition} \\ &= {}^t0_3 && M \in E_A \\ &= 0_3 \end{aligned}$$

Conclusion : si $M \in E_A$, alors ${}^tM \in E_A$.

4. 4.a. Justifier que A est diagonalisable.

Conclusion : la matrice A est symétrique (à coefficients réels), elle est donc diagonalisable.

4.b. Soit λ un réel.
Montrer que si λ est valeur propre de A, alors :

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

- Après calculs, on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$A^3 = 9A$$

- Le polynôme $X^3 - 9X$ est donc annulateur de la matrice A. Le spectre de A est alors inclus dans l'ensemble des racines de $X^3 - 9X$.

Conclusion : si λ est valeur propre de A, alors $\lambda^3 - 9\lambda = 0$.

Important !
Il est indispensable de donner A^2 pour obtenir les points de cette question... En effet, l'énoncé nous donne l'information que $A^3 = 9A$...

♣ Méthode !
Il est également possible de travailler sur le rang de $A - \lambda I_3$ pour obtenir l'équivalence $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \lambda^3 - 9\lambda = 0$. Mais c'est plus que ce qui est demandé... Cette méthode n'est donc pas vraiment attendue.

4.c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, telles que $D = P^{-1}AP$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 9\lambda = 0 &\iff \lambda(\lambda^2 - 9) = 0 \\ &\iff \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = 3 \\ \text{ou} \\ \lambda = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{-3; 0; 3\}$$

- Remarquons ensuite :
  - ⋆ $(A + 3I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, donc -3 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé ;
  - ⋆ $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, donc 0 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé ;
  - ⋆ $(A - 3I_3)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, donc 3 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

On en déduit que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :

✓ libre car constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes,
✓ de cardinal 3 égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

La famille $\mathscr{B}$ est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

♡ Astuce du chef ! ♡
On trouve des vecteurs propres en remarquant des combinaisons linéaires donnant le vecteur nulle sur les colonnes de la matrice $A - \lambda I_3$.
Par exemple, on remarque que les colonnes de A vérifient $2C_1 + C_2 + 2C_3 = 0_{3,1}$... donc $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$.
En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B, on a :
$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3$,
donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$...
Ici, il est bien évidemment possible de résoudre les équations matricielles $AX = 0_{3,1}$, $AX = -3X$ et $AX = 3X$ pour déterminer des vecteurs propres.

Conclusion : on retrouve ainsi que la matrice A est diagonalisable et, en posant

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = P_{bc,\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on a :

✓ D est diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant,
✓ P est inversible, comme matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base $\mathscr{B}$, à coefficients diagonaux égaux à 1,
✓ et par formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$, de sorte que $D = P^{-1}AP$.

5. Calculer P^2. En déduire une expression de P^{-1}.

On trouve $P^2 = 9I_3$. D'où : $P \times \dfrac{1}{9}P = I_3$.

Conclusion : $P^{-1} = \dfrac{1}{9}P = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. 6.a. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que N appartient à E_D si, et seulement si, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned}
N \in E_D &\iff DN + ND = 0_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = 0_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ h = 0 \\ i = 0 \end{cases} \\
&\iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6.b. En déduire une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
E_D &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est ainsi une famille :

✓ génératrice de E_D par définition,

✓ libre comme sous-famille d'une famille libre (sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

☞ **Rappels...**
- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Conclusion : la famille $\mathscr{B}$ est une base de E_D et donc $\dim(E_D) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3$.

7. 7.a. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.
Montrer que M appartient à E_A si, et seulement si, N appartient à E_D.
Puisque $N = P^{-1}MP$, on a $M = PNP^{-1}$. D'où :

$$\begin{aligned}
M \in E_A &\iff AM + MA = 0_3 \\
&\iff PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0_3 \\
&\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0_3 \\
&\iff P(DN + ND)P^{-1} = 0_3 \\
&\iff DN + ND = 0_3
\end{aligned}$$

en multipliant par P^{-1} par la gauche et P par la droite

$$\iff N \in E_D$$

7.b. En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathscr{B}$.

En notant pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont nuls exceptés celui situé en ligne i et colonne j, on sait que, d'après la question 6.b, la famille $(E_{1,3}, E_{2,2}, E_{3,1})$ est une base de E_D.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff N \in E_D \\ &\iff \exists!(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ N = aE_{1,3} + bE_{2,2} + cE_{3,1} \quad \text{question 6.b} \\ &\iff \exists!(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ P^{-1}MP = aE_{1,3} + bE_{2,2} + cE_{3,1} \\ &\iff \exists!(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ M = aPE_{1,3}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} + cPE_{3,1}P^{-1} \end{aligned}$$

> **Conclusion :** la famille $(PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1})$ est une base de E_A.

Important !
On revient ici à la définition de ce qu'est une base d'un espace vectoriel. Une famille est une base d'un espace vectoriel E lorsque tout vecteur de E se décompose en une unique combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Petite remarque
L'énoncé aurait pu demander de démontrer que φ est un endomorphisme : à savoir faire !

8. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $(A+M)^2 = A^2 + M^2$.
On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} (A+M)^2 = A^2 + M^2 &\iff (A+M)(A+M) = A^2 + M^2 \\ &\iff A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M^2 \\ &\iff AM + MA = 0_3 \\ &\iff M \in E_A \end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ (A+M)^2 = A^2 + M^2\} = E_A$.

✘ Attention !
Aucune raison que A et M commutent, donc on ne peut pas utiliser d'identité remarquable !

9. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \ \varphi(M) = AM + MA$.
En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ.

Par définition :

$$\ker(\varphi) = E_A$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \dim\big(\ker(\varphi)\big) &= \dim(E_A) \\ &= 3 \quad \text{question 7.b} \end{aligned}$$

Mais, d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\big) = \mathrm{rg}(\varphi) + \dim\big(\ker(\varphi)\big)$$

Or $\dim\big(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\big) = 9$...

> **Conclusion :** $\mathrm{rg}(\varphi) = 6$.

Important !
On prend le temps de bien chercher un lien entre φ et ce qui précède... Une fois cette égalité obtenue, on comprend ce qu'il faut faire puisque l'énoncé demande le rang de φ !

Exercice 2

> **♡ L'avis du chef ! ♡**
> Plutôt bon exercice d'analyse, bien qu'un peu répétitif. Classique dans les méthodes mises en place.

1. **1.a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.

> **Petite remarque**
> Il est toujours plaisant de reconnaître un bout d'une question classique !

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \longmapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est impropre en $+\infty$ seulement. De surcroît :

- ✓ $t^n\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (immédiat car $n+2$, donc par croissances comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t} = 0$) ;
- ✓ $\forall t \in [1;+\infty[,\ t^n\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0,\ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$;
- ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant $2>1$, elle est donc convergente.

Ainsi, par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente. Puisque $\displaystyle\int_0^{1} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$ n'est pas impropre (intégrande continue sur le segment d'intégration), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.

> **Conclusion :** pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.

> **★ Classique ! ★**
> $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt = n!$. Très classique aux écrits et aux oraux.

On note, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

1.b. Calculer I_0 et I_1.

- $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$: on reconnaît l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la densité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

> **Conclusion :** $I_0 = 1$.

> **Petite remarque**
> Sinon, on fait une IPP (sur un segment !). Mais il faut reconnaître ces deux intégrales... Tout comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\,dt$ qu'on donne rapidement en utilisant la formule de Koenig-Huygens et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

- $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,dt$: on reconnaît l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

> **Conclusion :** $I_1 = 1$.

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,dt$ est convergente.

> **➠Réflexe !**
> On pense à un critère puisqu'il semble bien irréaliste de vouloir calculer cette intégrale...

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

- Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a :
$$xt \geqslant 0$$
D'où :
$$1 + xt \geqslant 1$$
Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, licite car 1 et $1+xt$ sont dans $]0;+\infty[$:
$$\frac{1}{1+xt} \leqslant 1$$
Et donc, puisque $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$:
$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$
- On a ainsi :
  - ✓ $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$
  - ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ est une intégrale convergente (question 1.a).

Par critère de comparaison (par inégalité) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,dt$ est convergente.

> **Conclusion :** pour tout réel x positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,dt$ est convergente.

On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

3. Expliciter la valeur de $F(0)$.

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

question 1.b

4. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leqslant y$. Montrer que $F(y) \leqslant F(x)$.
Que peut-on en déduire sur la fonction F ?

- Puisque $x \leqslant y$, on a, en multipliant par $t \geqslant 0$:

$$\forall t \in [0;+\infty[,\ xt \leqslant yt$$

Et, en procédant comme en question 2 :

$$\forall t \in [0;+\infty[,\ \frac{e^{-t}}{1+xt} \geqslant \frac{e^{-t}}{1+yt}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $0 \leqslant +\infty$ et que les intégrales en jeu sont convergentes (question 2), on obtient :

$$F(x) \geqslant F(y)$$

- On a ainsi établi :

$$\forall (x,y) \in [0;+\infty[,\ \big(x \leqslant y \implies F(x) \geqslant F(y)\big)$$

Conclusion : la fonction F est décroissante sur $[0;+\infty[$.

➠Réflexe !
Pur comparer les intégrales, on commence par comparer les intégrandes !

Pourquoi ?
C'est la définition même de fonction décroissante sur $[0;+\infty[$...

5. 5.a. Pour tout réel x positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$. *On distinguera les cas $x = 0$ et $x > 0$.*

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

- Si $x = 0$:

$$\int_0^1 1\,dt = 1$$

- Si $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt &= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{1+xt}\,dt \\ &= \frac{1}{x}\Big[\ln(|1+xt|)\Big]_0^1 \\ &= \frac{\ln(1+x)}{x} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Petite remarque
On fait apparaître une intégrande de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

5.b. Montrer que, pour tout réel x positif :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\forall t \in [0;1],\ 0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$$

D'où, puisque, pour tout $t \in [0;1]$, $1 + xt > 0$:

$$0 \leqslant \frac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \frac{1}{1+xt}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $0 \leqslant 1$ et que les intégrandes en jeu sont continues sur le segment $[0;1]$:

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$.

Petite remarque
On considère que cet encadrement est suffisamment habituel pour ne pas le détailler...

5.c. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On a :

$$\forall t \in [1;+\infty[,\ 1 \leqslant t$$

D'où, puisque $x > 0$:

$$\forall t \in [1;+\infty[,\ x \leqslant xt$$

Et ainsi :

$$\forall t \in [1;+\infty[,\ 0 < x \leqslant 1+x \leqslant 1+xt$$

Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$:

$$\forall t \in [1;+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{1}{1+xt} \leqslant \frac{1}{x}$$

Puis, comme l'exponentielle est positive :

$$\forall t \in [1;+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \frac{e^{-t}}{x}$$

Et enfin, par croissance de l'intégrale, licite car $1 \leqslant +\infty$ et que les intégrales en jeu sont convergentes (questions 1.a et 2) :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,dt$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt.$

5.d. A l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lors x tend vers $+\infty$.

D'après la relation de Chasles :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

Ainsi, d'après les deux questions précédentes, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

Mais :

- D'après la question 5.a, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt &= \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} \\ &= \frac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} \quad x>0 \text{ et } 1+\frac{1}{x}>0 \\ &= \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}\end{aligned}$$

  Or, par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

  et par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$$

  D'où, par somme :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = 0$$

- Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}$ est une constante indépendante de x, on a par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = 0$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$

Petite remarque

Il n'est peut-être pas nécessaire de détailler de la sorte la limite de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ en $+\infty$; mais il est tout de même important de noter que ce n'est pas directement un résultat de croissances comparées !
On peut traiter autrement en disant que $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$ et donc $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ et là, c'est une CC avec une composition...

Petite remarque

On peut également dire que $0 \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$, puis diviser par x et conclure en utilisant le théorème d'encadrement.

Petite remarque
L'énoncé aurait pu faire le choix de demander d'établir la convergence. On aurait alors pu procéder comme en question 2.

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$ est convergente.

6.a. Montrer que :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$$

☞ Rappels...
- Regrouper des intégrales convergentes (par linéarité) est toujours possible.
- Découper une intégrale convergente (par linéarité) n'est possible que si toutes les intégrales en jeu à l'issue du découpage sont convergentes.

$$\begin{aligned}
F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt && \text{linéarité de l'intégrale}\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1+xt} - (1-xt)\right) dt\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1+xt} - \frac{1-(xt)^2}{1+xt}\right) dt\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{x^2t^2}{1+xt} dt && \text{linéarité de l'intégrale, licite même si } x\neq 0\text{, car } \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \text{ est convergente}\\
&= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt} dt
\end{aligned}$$

Conclusion : $F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$.

6.b. En déduire que :

$$0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2$$

$$\begin{aligned}
F(x) - I_0 + xI_1 &= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}dt + x\int_0^{+\infty} te^{-t}dt && \text{linéarité de l'intégrale}\\
&= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt && \text{question précédente}\\
&= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt
\end{aligned}$$

Or :

- la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^2e^{-t}}{1+xt}$ est positive sur $[0;+\infty[$, donc, par croissance de l'intégrale, licite car $0 \leqslant +\infty$, et puisque $x^2 \geqslant 0$, on obtient :
$$x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \geqslant 0$$
- en procédant comme en question 2 :
$$\forall t \in [0;+\infty[,\ \frac{t^2e^{-t}}{1+xt} \leqslant t^2e^{-t}$$
Ce qui permet d'obtenir :
$$x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \leqslant x^2 \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = x^2 I_2$$

Conclusion : $0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2$.

7. 7.a. En déduire que la fonction F admet le développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$$

D'après la question précédente et la question 1.b, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant F(x) - 1 + x \leqslant x^2 I_2$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant \frac{F(x)-1+x}{x} \leqslant xI_2$$

☞ Rappel...
Si f et g sont deux fonctions telles que g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f \underset{a}{=} o(g)$ si, et seulement si, $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 0$.

Or $\lim\limits_{x\to 0} xI_2 = 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-1+x}{x} = 0$.
Par conséquent :

$$F(x) - 1 + x \underset{x\to 0}{=} o(x)$$

Conclusion : $F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$.

7.b. Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.
Puisque la fonction F admet un développement limité d'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0 et $F'(0)$ vaut le coefficient en facteur du terme de degré 1 dans ce développement limité.

Conclusion : F est dérivable en 0 et $F'(0) = -1$.

Petites remarques

- Si on ne pense pas à ce résultat, on peut revenir au calcul du taux d'accroissement de F...

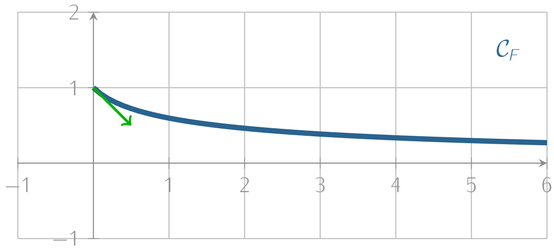
$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{1-x+\underset{x\to 0}{o}(x)-1}{x} = -1+\underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\to} -1$$

- Il se peut qu'une fonction admette un $\mathrm{DL}_2(a)$ sans pour autant qu'elle soit deux fois dérivable en a...

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0;+\infty[$.
En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F. On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0.
Informations à faire figurer :

- ✓ $F(0) = 1$
- ✓ F est décroissante sur $[0;+\infty[$
- ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$
- ✓ $F'(0) = -1$
- ✓ F est continue sur $[0;+\infty[$

Voici :



Exercice 3

> **♡ L'avis du chef ! ♡**
> Malgré quelques lourdeurs en partie II, c'est un bon exercice, dont les parties I et III sont très classiques. On retrouve un cas particulier de loi de Pareto, comme dans les exercices `Ecricome 2020 E - Exercice 3` et `EML 2020 E - Exercice 3`.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit n un entier naturel non nul.
La population active d'un territoire est divisée en n catégories socioprofessionnelles, numérotées de 1 à n.
Pour tout entier i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire égale au revenu mensuel, en milliers d'euros, d'un individu choisi au hasard avec équiprobabilité au sein de la catégorie socioprofessionnelle numéro i. On suppose que la variable aléatoire X_i admet pour densité la fonction f_i définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{i}{x^{i+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On note F_i la fonction de répartition de X_i.

Partie I.

1. Vérifier que, pour tout entier i compris entre 1 et n, la fonction f_i est une densité de probabilité.

Soit $i \in [\![1; n]\!]$.

✓ **Continuité.**

- ⋆ Sur $]-\infty; 1[$: la fonction f_i est continue sur $]-\infty; 1[$ car constante sur cet intervalle ;
- ⋆ Sur $[1; +\infty[$: la fonction f_i est continue sur $[1; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $[1; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

Conclusion : la fonction f_i est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

> **Petite remarque**
> f_i est continue à droite en 1, mais discontinue à gauche en 1.

✓ **Positivité.**

- ⋆ Sur $]-\infty; 1[$: $\forall x \in]-\infty; 1[,\ f_i(x) = 0 \geqslant 0$
- ⋆ Sur $[1; +\infty[$: pour tout $x \in [1; +\infty[$, $x^{i+1} > 0$ car $x > 0$. Donc : $\forall x \in [1; +\infty[,\ f_i(x) \geqslant 0$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_i(x) \geqslant 0$.

> **Petite remarque**
> On peut aller un peu plus vite...

✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)dx$?

- ⋆ L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f_i(x)dx$ est convergente et vaut 0.
- ⋆ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f_i(x)dx$?
Soit $B \in [1; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\int_1^B f_i(x)dx &= \int_1^B \frac{i}{x^{i+1}}dx \\ &= i\int_1^B x^{-i-1}dx \quad \text{↲ } i \neq 0\text{, donc } -i-1 \neq -1 \\ &= i\left[\frac{x^{-i}}{-i}\right]_1^B \\ &= -\frac{1}{B^i} + 1\end{aligned}$$

> **✓ Rigueur !**
> On vérifie que l'exposant de x^n est différent de -1 pour primitiver sous la forme $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

> **Important !**
> On passe par les puissances à exposants négatifs pour primitiver, mais on revient aux fractions avec puissances à exposants positifs pour passer à la limite !

Or, puisque $i \geqslant 1$, on a $\lim\limits_{B \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{B^i}$.
Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_i(x)dx$ est convergente et vaut 1.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)dx$ est convergente et, par relation de Chasles, vaut 1.

> **Conclusion :** pour tout entier i compris entre 1 et n, la fonction f_i est une densité de probabilité.

2. 2.a. Déterminer les entiers naturels, compris entre 1 et n, tels que X_i admet une espérance, et déterminer alors l'espérance de X_i.

Soit $i \in [\![1; n]\!]$. On peut considérer que $X_i(\Omega) = [1; +\infty[$.

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> On regarde l'ensemble image $X_i(\Omega)$. S'il avait été borné, on aurait pu directement dire que X_i admettait une espérance.

- On sait que :

X_i admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf_i(x)|dx$ est convergente
si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} xf_i(x)dx$ est convergente, car $x \longmapsto xf_i(x)$ est nulle sur $]-\infty; 1[$ et positive sur $[1; +\infty[$
si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{i}{x^i}dx$ est convergente
si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^i}dx$ est convergente, car $i \neq 0$

- Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i}dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, convergente si, et seulement si, $i > 1$.
- On en déduit que X_i admet une espérance si, et seulement si, $i \in [\![2;n]\!]$ et, le cas échéant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x)dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i}dx \\
&= i\int_1^{+\infty} x^{-i}dx \\
&= i\left[\frac{x^{-i+1}}{-i+1}\right]_1^{x\to+\infty} & -i \neq -1 \\
&= i\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{i-1}} - \frac{1}{-i+1}\right) \\
&= \frac{i}{i-1}
\end{aligned}$$

Rédaction
On tolère cette rédaction uniquement parce-que la convergence est assurée par ce qui précède (car $i \geqslant 2$). A utiliser avec parcimonie...

Conclusion : X_i admet une espérance si, et seulement si, $i \in [\![2;n]\!]$ et, dans ce cas, $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{i}{i-1}$.

2.b. En justifiant la réponse, classer les numéros de catégorie socioprofessionnelle dans l'ordre de leur revenu mensuel moyen, du moins élevé au plus élevé.
On ne considère que les entiers i pour lesquels l'espérance de X_i est bien définie.

- Pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{E}(X_i)$ représente le salaire mensuel moyen, en milliers d'euros, d'un individu de la catégorie socioprofessionnelle numéro i.
- La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[2;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[2;+\infty[$. Donc g est dérivable sur $[2;+\infty[$ et, pour tout $x \in [2;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{x-1-x}{(x-1)^2} \\
&= \frac{-1}{(x-1)^2} < 0
\end{aligned}$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.

Méthode !
Il était également possible de montrer que la suie $\left(\mathbb{E}(X_i)\right)_{i\in[\![2;n]\!]}$ est décroissante en étudiant le signe de $\mathbb{E}(X_{i+1}) - \mathbb{E}(X_i)$ (en mettant sous même dénominateur bien évidemment !).

Conclusion : on en déduit, d'après la question précédente $\mathbb{E}(X_2) > \mathbb{E}(X_3) > \ldots > \mathbb{E}(X_n)$.

3. Montrer que pour tout entier i compris entre 1 et n et pour tout réel x :

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

À retenir...
On distingue les mêmes cas que ceux définissant la fonction f_i.

Soient $i \in [\![1;n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas.

- Si $x < 1$:

$$\begin{aligned}
F_i(x) &= \mathbb{P}\left([X_i \leqslant x]\right) & X_i \text{ est de densité } f_i \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_i(t)dt & x < 1 \text{ et } f_i \text{ est nulle sur }]-\infty;1[\\
&= 0
\end{aligned}$$

Petite remarque
On peut également dire que, puisque $x < 1$ et que $X_i(\Omega) = [1;+\infty[$, alors $[X_i \leqslant x] = \varnothing$.

- Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
F_i(x) &= \mathbb{P}\left([X_i \leqslant x]\right) & X_i \text{ est de densité } f_i \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_i(t)dt & \text{relation de Chasles} \\
&= \int_{-\infty}^{1} f_i(t)dt + \int_1^x f_i(t)dt & f_i \text{ est nulle sur }]-\infty;1[\\
&= \int_1^x f_i(t)dt & x \geqslant 1 \text{ et calcul fait en question } 1 \\
&= 1 - \frac{1}{x^i}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

4. Soit U une variable aléatoire à densité de loi uniforme sur $]0;1[$.
Soit i un entier compris entre 1 et n. On pose $V_i = \dfrac{1}{U^{1/i}}$.

4.a. Montrer que V_i suit la même loi que X_i.

On sait déjà que $U(\Omega) =]0;1[$. Donc, puisque $\dfrac{1}{i} > 0$, on a également $U^{1/i}(\Omega) =]0;1[$.
Et ainsi :

$$V_i(\Omega) =]1;+\infty[$$

Pourquoi ?
En effet, l'image de l'intervalle $]0;1[$ par la fonction inverse est l'intervalle $]1;+\infty[$.

Notons F_{V_i} la fonction de de la variable aléatoire V_i.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas.

- Si $x \leqslant 1$:

$$\begin{aligned} F_{V_i}(x) &= \mathbb{P}\big([V_i \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x \leqslant 1$ et $V_i(\Omega) =]1;+\infty[$, donc $[V_i \leqslant x] = \varnothing$

- Si $x > 1$:

$$\begin{aligned} F_{V_i}(x) &= \mathbb{P}\big([V_i \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{U^{1/i}} \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[U^{1/i} \geqslant \frac{1}{x}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[U \geqslant \frac{1}{x^i}\right]\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{x^i}\right]\right) \\ &= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^i}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{x^i} \end{aligned}$$

stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, licite car $\dfrac{1}{U^{1/i}}$ est à valeurs strictement positives et $x > 0$

stricte croissance de la fonction $.^i$ sur $\mathbb{R}^+$, licite car $U^{1/i}$ est à valeurs strictement positives et $\dfrac{1}{x} > 0$

U est à densité (en notant F_U sa fonction de répartition)

$x > 1$, donc $x^i > 1$ et ainsi $\dfrac{1}{x^i} \in]0;1[$

✓ Rigueur !
La **stricte** décroissance est nécessaire pour garantir l'égalité des probabilités qui vient en fait de l'égalité des évènements en jeu. La stricte monotonie d'une fonction h permet de garantir l'implication réciproque dans l'équivalence $a \leqslant b \iff h(a) \leqslant h(b)$.

☞ Rappel...

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in]0;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{V_i}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} \\ &= F_i(x) \end{aligned}$$

question précédente

Or la fonction de répartition caractérise la loi...

> **Conclusion :** la variable aléatoire V_i suit la même loi que X_i.

4.b. Écrire une fonction en langage **Python** nommée **simulX**, prenant en argument d'entrée l'entier i, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire X_i.
D'après la question précédente, on simule une réalisation de V_i pour obtenir une réalisation de X_i.

```
import numpy.random as rd

def simulX(i):
    U=rd.random()
    X=1/U**(1/i)
    return X
```

Partie II.

Soit p un réel de $]0;1[$. On choisit un individu au hasard dans la population et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la catégorie socioprofessionnelle à laquelle cet individu appartient. On suppose que la variable aléatoire $Y-1$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n-1;p)$.

5. En utilisant uniquement la fonction **random** du module **numpy.random**, écrire une fonction en langage **Python** nommée **simulY**, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Y.
Une possibilité :

```python
import numpy.random as rd

def simulY(n,p):
    T=0 #T va suivre une B(n-1,p)
    for k in range(n-1):
        if rd.random()<p: #si succès
            T=T+1
    return T+1
```

6. Recopier et compléter la fonction, en langage **Python**, nommée **loiY**, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p, et renvoyant une liste $(p_1, \dots, p_n)$ où pour i compris entre 1 et n, p_i est une valeur approchée de $\mathbb{P}([Y = i])$.

```python
def loiY(n,p):
    N=10000
    loi=[0]*n
    for k in ......:
        y=simulY(n,p)
        loi[...] ...
    return loi
```

L'idée est de répéter un grand nombre, ici 10000, réalisations indépendantes de Y.
A chaque réalisation, on regarde sa valeur (notée `y` ici) : on incrémente alors de 1 la valeur correspondante dans la liste `loi` pour signifier qu'on vient d'obtenir une valeur supplémentaire de y.
Exemple : si Y prend la valeur 1, il faut incrémenter la première valeur de la liste `loi`. Attention : il s'agit de `loi[0]`...
Voici :

```python
def loiY(n,p):
    N=10000
    loi=[0]*n
    for k in range(N):
        y=simulY(n,p)
        loi[y-1]=loi[y-1]+1/N
    return loi
```

♣ L'idée !
Algorithme basé sur la LfGN qui permet d'obtenir une valeur approchée de $\mathbb{P}([Y = i])$ par la fréquence d'apparition de l'évènement $[Y = i]$ sur un grand nombre de réalisations indépendantes de Y (ici 10000).

7. Écrire une fonction **Python**, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p, permettant d'afficher un diagramme en bâtons représentant approximativement la loi de Y. On représentera les valeurs prises de Y en abscisses et les probabilités correspondantes en ordonnées. *On pourra utiliser les fonctions définies dans les questions précédentes, et l'annexe fournie en fin de sujet.*
Voici :

♡ L'avis du chef ! ♡
Cette question et la précédente auraient davantage d'intérêt dans le cas d'une variable aléatoire dont on ne peut pas obtenir facilement la loi. Ici, on connaît la loi de $Y - 1$, donc on connaît celle de Y.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def diagramme_loiY(n,p):
    x=range(1,n+1)
    y=loiY(n,p)
    plt.bar(x,y)
    plt.show()
```

8. Dans cette question, on suppose que chaque profession est identifiée de manière unique par un numéro appelé <u>code PCS</u>.
Par ailleurs, les différentes professions sont regroupées dans six grandes catégories socioprofessionnelles, que l'on identifie par un entier de à 6.
On dispose d'une base de données comportant trois tables nommées **individu**, **departement** et **profession**, décrites ci-dessous.
   - La table **individu** contient des informations sur tous les individus de la population active française. Chaque entrée correspond donc à un individu. La table comporte les attributs suivants.
     - ⋆ **i_nom** (de type **TEXT**) : le nom de l'individu.
     - ⋆ **i_prenom** (de type **TEXT**) : le prénom de l'individu.
     - ⋆ **i_departement** (de type **INTEGER**) : le numéro de département où réside l'individu.
     - ⋆ **i_insee** (de type **INTEGER**) : le numéro INSEE (ou numéro de sécurité sociale) de l'individu.
     - ⋆ **i_code_profession** (de type **INTEGER**) : le code PCS identifiant la profession actuelle de l'individu.
   - La table **departement** contient des informations sur les départements français. Chaque entrée correspond donc à un département. La table comporte les attributs suivants.
     - ⋆ **d_numero** (de type **INTEGER**) : le numéro du département.
     - ⋆ **d_nom** (de type **TEXT**) : le nom du département.

⋆ **d_population** (de type **INTEGER**) : le nombre d'habitants vivant dans le département.

- La table **profession** contient des informations sur toutes les professions recensées dans la base de données. Chaque entrée correspond donc à une profession différente. La table comporte les attributs suivants.
  - ⋆ **p_pcs** (de type **INTEGER**) : le code PCS permettant d'identifier la profession.
  - ⋆ **p_categorie** (de type **INTEGER**) : le numéro de la catégorie socioprofessionnelle (de 1 à 6) à laquelle la profession se trouve attachée.
  - ⋆ **p_intitule** (de type **TEXT**) : l'intitulé de la profession (par exemple, **chirurgien dentiste**).

8.a. Que doit vérifier la clé primaire d'une table dans une base de données ?

> **Conclusion :** la clé primaire doit être un attribut permettant d'identifier de façon unique chaque enregistrement (chaque ligne) de la table ; chaque table doit contenir une et une seule clé primaire.

8.b. Pour chacune des trois tables de la base de données de cet exemple, indiquer sans justifier un attribut pouvant jouer le rôle de clé primaire.

> **Conclusion :**
> table `individu` : `i_insee`
> table `departement` : `d_numero`
> table `profession` : `p_pcs`

☞ **Pour info...**
Le numéro des départements devrait être du type **TEXT** et non **INTEGER** : on n'oublie pas les corses !

8.c. Dresser le schéma relationnel de la base de données décrite ci-dessus, en mettant en évidence les relations qui existent entre les tables et les attributs permettant d'établir ces relations.
On s'assurera que chaque table est reliée à au moins l'une des deux autres tables.
On souligne la clé primaire pour chaque table et on met un # devant chaque clé étrangère :

- `individu(`<u>`i_insee`</u>`:INTEGER,#i_departement:INTEGER,#i_code_profession:INTEGER,i_nom:INTEGER,i_prenom:TEXT)`
- `departement(`<u>`d_numero`</u>`:INTEGER,d_nom:TEXT,d_population:INTEGER)`
- `profession(`<u>`p_pcs`</u>`:INTEGER,p_categorie:INTEGER,p_intitule:TEXT)`

Petite remarque
Question pas très claire... Qu'attendait-on réellement ? Sous quelle syntaxe ? Il aurait sans doute été préférable de demander d'identifier les clés étrangères présentes dans chaque table...

8.d. Écrire une requête SQL renvoyant tous les codes PCS des professions exercées dans le département de l'Eure-et-Loir (numéro 28). Chaque code PCS ne pourra apparaître qu'une seule fois.
On pourra utiliser la commande ***SELECT DISTINCT*** *décrite dans l'annexe fournie en fin de sujet.*
Voici :

```
SELECT DISTINCT i_code_profession
FROM individu
WHERE i_departement=28
```

8.e. Écrire une requête SQL permettant d'obtenir le numéro de catégorie socioprofessionnelle (entre 1 et 6) de chaque individu.
La requête devra renvoyer deux attributs pour chaque individu : son numéro INSEE et la catégorie socioprofessionnelle à laquelle est rattachée sa profession.
Voici, à l'aide d'une jointure :

```
SELECT i_insee, p_categorie
FROM individu
JOIN profession
ON individu.i_code_profession=profession.p_pcs
```

Petite remarque
La conditon **ON** **i_code_profession=.p_pcs** suffit.

Partie III.

Soit p un réel de $]0;1[$.
Un institut réalise un sondage selon le protocole suivant :

- On choisit une catégorie socioprofessionnelle de manière aléatoire (mais sans équiprobabilité), et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la catégorie choisie.
  Comme dans la partie II, on suppose que $Y-1$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n-1;p)$.
- On sélectionne alors un individu au hasard (avec équiprobabilité) dans la catégorie socioprofessionnelle choisie à l'étape précédente, et on note Z_n la variable aléatoire égale à son revenu mensuel, en milliers d'euros.

Enfin, on rappelle que, pour tout entier i compris entre 1 et n, la fonction de répartition F_i de la variable aléatoire X_i est donnée par l'égalité (1) montrée à la question 3.
On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Z_n.

9. Expliciter $G_n(x)$ pour tout réel x strictement inférieur à 1.
On avait :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ X_i(\Omega) = [1;+\infty[$$

Par conséquent :

$$Z_n(\Omega) \subset [1;+\infty[$$

D'où, pour tout $x \in]-\infty; 1[$:

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x < 1$ et $Z_n(\Omega) \subset [1; +\infty[$, donc $[Z_n \leqslant x] = \varnothing$

Conclusion : $\forall x \in]-\infty; 1[, \ G_n(x) = 0$.

10. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

10.a. Justifier que pour tout entier i compris entre 1 et n :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z_n \leqslant x]\big) = F_i(x)$$

Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Supposons l'évènement $[Y = i]$ réalisé. Autrement dit, la catégorie socioprofessionnelle choisie est la numéro i.

Dans ce cas, $[Z_n \leqslant x]$ est réalisé si, et seulement si, le revenu mensuel de l'individu choisi est inférieur ou égal à x
si, et seulement si, $[X_i \leqslant x]$ est réalisé (puisque l'individu appartient à la catégorie i)

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z_n \leqslant x]\big) &= \mathbb{P}\big([X_i \leqslant x]\big) \\ &= F_i(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall i \in [\![1; n]\!], \ \mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z_n \leqslant x]\big) = F_i(x)$.

10.b. Montrer que :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Y = i]\big)_{i \in [\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

➠Réflexe !
On connaît les $\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z_n \leqslant x]\big)$ et on cherche $\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big)$: FPT !

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([Y = i] \cap [Z_n \leqslant x]\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([Y = i]\big) \mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z_n \leqslant x]\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([Y - 1 = i - 1]\big) \mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z_n \leqslant x]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([Y - 1 = k]\big) \mathbb{P}_{[Y=k+1]}\big([Z_n \leqslant x]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([Y - 1 = k]\big) F_{k+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1} \end{aligned}$$

$\forall i \in [\![1; n]\!], \ \mathbb{P}\big([Y = i]\big) \neq 0$

$k = i - 1$

question précédente, licite car $k + 1 \in [\![1; n]\!]$

$Y - 1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n - 1; p)$ et on somme pour $k \in [\![0; n - 1]\!]$

Conclusion : $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$.

10.c. En déduire que :

$$G_n(x) = 1 - \frac{\big(p + (1-p)x\big)^{n-1}}{x^n}$$

En débutant avec la question précédente :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{x^{k+1}} p^k (1-p)^{n-1-k} \end{aligned}$$

question 3, avec $x \geqslant 1$

formule du binôme de Newton dans la première somme

$$= 1 - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{x}\right)^k (1-p)^{n-1-k}$$

formule du binôme de Newton dans la seconde somme

$$= 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{p}{x} + 1 - p\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{p + (1-p)x}{x}\right)^{n-1}$$

Conclusion : $G_n(x) = 1 - \dfrac{\big(p + (1-p)x\big)^{n-1}}{x^n}$.

11. Justifier que Z_n est une variable aléatoire à densité.

D'après les questions 9 et 10.c :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{\big(p + (1-p)x\big)^{n-1}}{x^n} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On sait déjà que G_n est une fonction de répartition...

✓ **Continuité.**

- ⋆ Sur $]-\infty; 1[$: G_n est continue sur $]-\infty; 1[$ car constante sur cet intervalle.
- ⋆ Sur $[1; +\infty[$: G_n est continue sur $[1; +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions continues sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
- ⋆ En 1 :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} G_n(x) = 0 = G_n(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} G_n(x)$$

La fonction G_n est donc continue en 1.

Petite remarque
En fait, on a déjà justifié que G_n est continue en 1 par la droite ; il ne manquait donc que la continuité en 1 par la gauche...

Conclusion : la fonction G_n est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.**

Par des arguments similaires à la continuité, la fonction G_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

Conclusion : la variable aléatoire Z_n est une variable aléatoire à densité.

12. En utilisant les fonctions **simulX** et **simulY** définies aux questions 4.b et 5, écrire une fonction en langage **Python** nommée **sondage**, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Z_n.

Voici :

```python
def simulZ(n,p):
    i=simulY(n,p)
    Z=simulX(i)
    return Z
```

♡ L'avis du chef ! ♡
La demande de la question 7 aurait été plus pertinente pour obtenir le diagramme en bâtons représentant approximativement la loi de Z_n...

13. Dans cette question uniquement, on suppose $p = \dfrac{1}{n}$.

13.a. Montrer que, pour tout x réel :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Traitons le cas $x \geqslant 1$... En débutant avec la question 10.c :

$$G_n(x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x\right)^{n-1}}{x^n}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x}{x}\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x + \frac{1}{n}(1-x)}{x}\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1-x}{nx}\right)^{n-1}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

13.b. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la fonction de répartition.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x < 1$:
    On a :
    $$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$$
  - ⋆ Si $x \geqslant 1$:
    On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment proche de $+\infty$:
    $$\begin{aligned} G_n(x) &= 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} \\ &= 1 - \frac{1}{x}\exp\left((n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)\right) \end{aligned}$$
    n suffisamment proche de $+\infty$, donc $1 - \dfrac{x-1}{nx} > 0$
    - ◇ Si $x = 1$:
      On a alors :
      $$\begin{aligned} G_n(x) &= 1 - \frac{1}{1}\exp\left((n-1)\ln\left(1 - \frac{1-1}{n}\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$
      D'où :
      $$\lim_{n\to+\infty} G_n(1) = 0$$
    - ◇ Si $x > 1$:
      On a :
      ✓ $-\dfrac{x-1}{nx} \neq 0$ (car $x \neq 1$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{x-1}{nx} = 0$;
      ✓ $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$
      D'où :
      $$\ln\left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x-1}{nx}$$
      Ainsi :
      $$\begin{aligned} (n-1)\ln\left(1 - \frac{1-1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} -(n-1)\frac{x-1}{nx} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n(x-1)}{nx} = -\frac{x-1}{x} \end{aligned}$$
      $n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$
      Par conséquent :
      $$\lim_{n\to+\infty} (n-1)\ln\left(1 - \frac{1-1}{n}\right) = -\frac{x-1}{x}$$
      Et par composition de limites :
      $$\lim_{n\to+\infty} \exp\left((n-1)\ln\left(1 - \frac{1-1}{n}\right)\right) = \exp\left(-\frac{x-1}{x}\right)$$
      Par conséquent :
      $$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 1 - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}-1}$$

✓ Rigueur !
On a exclu le cas $x = 1$ pour pouvoir écrire
$$\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x-1}{nx}$$
sans problème…

Petite remarque
Ou continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, donc en $-\dfrac{x-1}{x}$.

On a ainsi établi :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$$
où $G : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

- Pour conclure, il faut encore vérifier que G est une fonction de répartition !
  - ✓ **Continuité à droite en tout réel.**
    - ◇ Sur $]-\infty; 1[$: la fonction G est continue sur $]-\infty; 1[$ car constante sur cet intervalle.
    - ◇ Sur $]1; +\infty[$: la fonction G_n est continue sur $]1; +\infty[$ comme produit de deux fonctions continues sur cet intervalle.
    - ◇ En 1 :
      $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} G_n(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 1 - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}-1} = 0 = G(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} G(x)$$
      La fonction G est donc continue en 1.

    Conclusion : la fonction G est continue sur $\mathbb{R}$, donc est continue à droite en tout réel.
  - ✓ **Croissance.**
    - ◇ Sur $]-\infty; 1]$: G est croissante car constante sur cet intervalle.

Important !
Si G n'est pas une fonction de répartition, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en loi.

◇ Sur $]1;+\infty[$:
La fonction G est dérivable sur $]1;+\infty[$ et, pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1} - \frac{1}{x}\frac{-1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1}(x+1)}{x^3} \\ &> 0 \qquad x+1>0 \end{aligned}$$

La fonction G est donc croissante sur $]1;+\infty[$.

Conclusion : étant également continue en 1, la fonction G est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

✓ **Limites.**

◇ En $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$$

◇ En $+\infty$:
Par opération et composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1} = \mathrm{e}^{-1}$$

D'où, par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$.

Par conséquent, la fonction G est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire.

À retenir...
"Croissante sur $[a;b[$ et sur $]b;c]$" ne suffit pas pour dire "croissante sur $[a;c]$". En revanche, en rajoutant la continuité en b, c'est le cas !

Conclusion : la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont la fonction de répartition est la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

☞ Pour info...
On avait la continuité de G sur $\mathbb{R}$... Et elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.
Par conséquent, la variable aléatoire Z est une variable aléatoire à densité !

♡ L'avis du chef ! ♡
Question qui demande pas mal d'autonomie... comme souvent sur ce type de questions d'ailleurs ! Beaucoup de points à prendre sans doute ; mais il faut prendre le temps pour éviter les erreurs de calculs puisque l'énoncé ne fournit pas de résultat intermédiaire.

Hors programme ?

Il n'est pas très clair de savoir si la caractérisation des fonctions de répartition est au programme ou non.
Ici, on se retrouve tout de même dans un cas classique : Z est en fait à densité. Si on ne connaît pas le cas général, il était donc possible de traiter ce cas "à densité.
On peut retenir les deux résultats suivants :

(1) **Cas général.** Soit G une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si :
- ✓ G est continue à droite en tout réel,
- ✓ G est croissante sur $\mathbb{R}$,
- ✓ $\lim\limits_{-\infty} G = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} G = 1$

Alors : la fonction G est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire.

(2) **Cas à densité.** Soit G une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si :
- ✓ G est continue sur $\mathbb{R}$,
- ✓ G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- ✓ G est croissante sur $\mathbb{R}$,
- ✓ $\lim\limits_{-\infty} G = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} G = 1$

Alors : la fonction G est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire à densité.

Annexe A – Fonctions Python utiles

Manipulation de listes.

- L'opérateur de concaténation $+$, appliquée entre deux listes, renvoie la liste obtenue en plaçant les éléments de la seconde liste à la suite de ceux de la première liste.
  Par exemple, `[1,2,5]+[4,3]` renvoie la liste `[1,2,5,4,3]`.
- L'opérateur *, appliqué entre une liste `L` et un entier `n`, renvoie la liste obtenue en concaténant `n` fois la liste `L` avec elle-même.
  Par exemple, `[1,4,2]*3` renvoie la liste `[1,4,2,1,4,2,1,4,2]`.
- La fonction **`len`** prend en argument d'entrée une liste et renvoie le nombre d'éléments dans cette liste.
- La commande **`L.append(x)`** permet d'inclure l'élément `x` à la fin de la liste `L`.

La bibliothèque numpy.

- Exemple d'importation : **`import numpy as np`**.
- Les opérations $+$, **`-, *, /, **`**, lorsqu'elles sont possibles, peuvent être réalisées entre deux tableaux numpy de dimensions compatibles et agissent alors **coefficient par coefficient**.
- Les fonctions **`np.sqrt`** (racine carrée), **`np.abs`** (valeur absolue), **`np.log`** (logarithme népérien) et **`np.exp`** (exponentielle) s'appliquent à une quantité numérique ou à un tableau numpy de nombres. Dans ce dernier cas, les fonctions sont appliquées à chaque élément du tableau donné en argument d'entrée.
- La fonction **`np.linspace`**, prenant en arguments d'entrée deux flottants **`a`** et **`b`** et un entier **`n`**, renvoie un tableau **`numpy`** contenant **`n`** éléments régulièrement espacés entre **`a`** et **`b`** inclus.

La bibliothèque matplotlib.pyplot.

- Exemple d'importation : **`import matplotlib.pyplot as plt`**.
- La fonction **`plt.plot`** prend en arguments d'entrée deux listes **`x`** et **`y`** de même longueur ou deux tableaux **`numpy`** **`x`** et **`y`** à une ligne et de même longueur, et renvoie une figure constituée de la ligne brisée joignant les points du plan de coordonnées (x_i, y_i), où x_i et y_i sont respectivement les coefficients des tableaux **`x`** et **`y`**.
- La fonction **`plt.bar`** prend en arguments d'entrée deux listes **`x`** et **`y`** de même longueur ou deux tableaux **`numpy`** **`x`** et **`y`** à une ligne et de même longueur, et produit un diagramme en bâtons, les coefficients de **`x`** indiquant les abscisses auxquelles sont centrés les bâtons, et les coefficients de **`y`** déterminant la hauteur de chaque bâton en ordonnée.
- La fonction **`plt.show`**, employée sans argument d'entrée, permet l'affichage d'une figure préalablement tracée, par exemple avec les fonctions **`plt.plot`** ou **`plt.bar`**.

Le module numpy.random.

- Exemple d'importation : **`import numpy. random as rd`**.
- La fonction **`rd.random`**, appelée sans argument d'entrée, renvoie une simulation d'une variable aléatoire de la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1[$. Il est également possible de spécifier les dimensions d'un tableau **`numpy`** en argument d'entrée pour obtenir un tableau dont les coefficients sont des simulations de variables aléatoires indépendantes de la loi uniforme sur $[0;1[$.
- La fonction **`rd.randint`** prend deux entiers n et p (avec $p > n$) en arguments d'entrée et renvoie une simulation d'une variable aléatoire de la loi uniforme discrète sur $[\![n;p-1]\!]$.

Annexe B – Commande SQL utile

La commande `SELECT DISTINCT`. La commande SQL **`SELECT DISTINCT`**, utilisée à la place de la commande **`SELECT`**, permet de ne retenir qu'une occurrence de chaque valeur dans une colonne données, même si cette colonne comporte des valeurs qui se répètent.
Exemple. Une table **`etablissement`** contient les données suivantes concernant plusieurs établissements scolaires et la ville où ils se situent.

id	nom	ville
1	Edouard Herriot	Livry-Gargan
2	Diderot	Lyon
3	Edouard Herriot	Lyon
4	Louise Michel	Champigny-sur-Marne
5	Diderot	Paris

La requête

```
SELECT DISTINCT nom FROM etablissement;
```

permet d'obtenir les différents noms d'établissements, sans répétition :

```
Edouard Herriot
Diderot
Louise Michel
```

La commande **SELECT DISTINCT** peut éventuellement être combinée avec la commande **WHERE** pour filtrer une partie des données.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★