

Dans les questions faisant intervenir des instructions en langage **Python** on prendra soin d'importer les bibliothèques nécessaires lors de leur première utilisation.

Pour traiter les questions d'informatique, les candidats sont invités à se référer aux annexes fournies en fin de sujet. Ils ne sont pas limités à l'utilisation des seules fonctions mentionnées dans ces annexes.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Un particulier souhaite assurer un nouveau bien. Il consulte un site internet qui diffuse un classement de n compagnies d'assurances, de la mieux classée (compagnie n°1) à la moins bien classée (compagnie n° n). Ce classement ne varie pas d'année en année.

La première année, le particulier choisit une compagnie d'assurances au hasard, avec équiprobabilité, parmi les n compagnies proposées.

On note X la variable aléatoire égale au numéro, dans le classement, de la compagnie choisie.

L'année suivante, le particulier choisit au hasard de manière équiprobable une compagnie parmi toutes celles qui sont au moins aussi bien classées que celle qu'il avait choisie l'année précédente (il peut éventuellement conserver la même compagnie). On note alors Y la variable aléatoire égale au numéro, dans le classement, de la compagnie choisie pour cette seconde année.

1. Identifier la loi de la variable aléatoire X . Donner son espérance et sa variance.

- ✓ L'expérience consiste en le choix équiprobable d'un numéro de compagnie dans $\llbracket 1; n \rrbracket$.
- ✓ La variable aléatoire X prend comme valeur le numéro choisi.

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. On a alors :

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket ; \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n} ; \quad \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

2. Montrer que la loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \frac{1}{nj} & \text{si } k \leq j, \\ 0 & \text{si } k \geq j+1. \end{cases}$$

Remarquons déjà que $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

Soit $(j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

- Si $k \geq j+1$:

Dans ce cas, $[X = j] \cap [Y = k] = \emptyset$, car pour la seconde année, le particulier choisit une assurance au moins aussi bien classée que celle de la première année.

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = 0$$

- Si $k \leq j$:

Puisque $\mathbb{P}([X = j]) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) &= \mathbb{P}([X = j]) \mathbb{P}_{[X=j]}([Y = k]) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{P}_{[X=j]}([Y = k]) \end{aligned}$$

) question précédente, licite car $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

Supposons donc l'évènement $[X = j]$ réalisé.

Sous cette condition, l'évènement $[Y = k]$ est réalisé si, et seulement si, le particulier choisit l'assurance n° k parmi les j assurances numérotées de 1 à j . Ainsi, par équiprobabilité du choix de l'assurance :

$$\mathbb{P}_{[X=j]}([Y = k]) = \frac{1}{j}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{1}{nj}$$

Conclusion : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\forall (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \frac{1}{nj} & \text{si } k \leq j, \\ 0 & \text{si } k \geq j+1. \end{cases}$

Attention !

$Y(\Omega)$ ne peut pas dépendre de j .

Remarque

On pourrait également dire que pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement $[X = j]$ réalisé est la loi uniforme sur $\llbracket 1; j \rrbracket$.

RETOUR SUR $Y(\Omega)$.

Même si ce n'était pas demandé, démontrons que $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.
Procédons par double inclusion.

\square Y prend comme valeur le numéro d'une compagnie d'assurance, qui est un entier entre 1 et n .
D'où :

$$Y(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$$

\square Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
Notons ω l'issue consistant à :

- * choisir la compagnie numéro k la première année,
- * choisir cette même compagnie la seconde année.

On a ainsi $Y(\omega) = k$. Par conséquent $k \in Y(\Omega)$ et on a ainsi établi :

$$\llbracket 1; n \rrbracket \subset Y(\Omega)$$

Conclusion : $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

♣ Méthode !

Il faut alors démontrer que $k \in Y(\Omega)$, autrement dit, qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $Y(\omega) = k$ (cela équivaut à démontrer que l'évènement $\{Y = k\}$ contient au moins une issue).

3. En déduire la valeur, en fonction de n , de la somme double suivante : $\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}$.

On sait que :

$$\sum_{(j,k) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = 1$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{(j,k) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) + \sum_{j=k}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \end{aligned}$$

relation de Chasles

question précédente

✍ Rédaction

Je détaille volontairement la relation de Chasles sur $\sum_{j=1}^n$, mais ce n'est probablement pas attendu.

Conclusion : $\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = n$.

SANS "EN DÉDUIRE".

L'énoncé précise "en déduire" et il est alors attendu de procéder ainsi.

On pourrait en revanche s'y prendre autrement en calculant directement cette double-somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j 1 \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times j \\ &= \sum_{j=1}^n 1 \\ &= n \end{aligned}$$

★ Dans le livre 1A ! ★

Une somme double assez classique, que l'on peut trouver dans EXERCICE 14

4. Pour tout entier naturel k de $\llbracket 1; n \rrbracket$, exprimer $\mathbb{P}(Y = k)$ sous la forme d'une somme.

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = j])_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ comme système complet d'évènements,

on a :

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k])$$

question 2.

→ Réflexe !

On connaît la loi jointe et on veut une loi marginale : FPT !

$$= \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj}$$

$$\text{Conclusion : } \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj}.$$

5. 5.a. Montrer que $\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{k}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{k}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j k \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1).$$

5.b. Justifier que Y admet une espérance et montrer que l'espérance de Y vaut $\frac{n+3}{4}$.

On sait que $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. Ainsi $Y(\Omega)$ est fini, donc Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([Y = k]) && \text{question 4.} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} && \text{question précédente} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (j+1) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{1}{2n} \frac{n(n+1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n+3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \mathbb{E}(Y) = \frac{n+3}{4}.$$

6. 6.a. Justifier que l'espérance de la variable aléatoire XY existe et vérifie :

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1).$$

On sait que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ Ainsi $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, donc la variable aléatoire XY admet une espérance, et, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(j,k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} jk \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k])$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n jk \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k]) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j jk \times \frac{1}{nj} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2}
\end{aligned}$$

question 2.

Conclusion : $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1)$.

6.b. En déduire l'expression de $\mathbb{E}(XY)$ en fonction de n .
En poursuivant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1) \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (j^2 + j) \\
&= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right) \\
&= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2n} \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1) + 3(n+1)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(2n+4)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(XY) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$.

6.c. Déterminer la covariance du couple (X, Y) en fonction de n .

Puisque X, Y et XY admettent une espérance, le couple (X, Y) admet une covariance et, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n+1)(n+3)}{8} \\
&= \frac{4(n+1)(n+2) - 3(n+1)(n+3)}{24} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{24}
\end{aligned}$$

questions 1., 5.b. et 6.b.

Conclusion : $\text{Cov}(X, Y) = \frac{(n-1)(n+1)}{24}$.

7. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Puisque $n \geq 2$, on a $\frac{(n-1)(n+1)}{24} \neq 0$.

Ainsi :

$$\text{Cov}(X, Y) \neq 0$$

Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

8. 8.a. Écrire une fonction Python normée `simulXY`, prenant en argument d'entrée l'entier n , et renvoyant une réalisation du couple de variables aléatoires (X, Y) .

Important !

Il faut traiter le début de cette question en énonçant la formule de Koenig-Huygens (même si la question précédente n'a pas été traitée) : une partie des points est allouée au fait d'écrire la formule.

Rappel...

Lien indépendance / covariance :
Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
Le réciproque est fautive (exemple dans le cours...); et on utilise ici la contraposée.

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def simulXY(n):
4     X=rd.randint(1,n+1)
5     Y=rd.randint(1,X+1)
6     return (X,Y)

```

- 8.b. On considère une série statistique à deux variables (x, y) .
Expliquer ce que renvoie la fonction **Myst** suivante qui prend en argument d'entrée la série statistique (x, y) sous forme de tableau **Numpy** à deux lignes.

```

1 import numpy as np
2
3 def Myst(Tab):
4     M=np.cov(Tab)
5     R=M[0,1]/np.sqrt(M[0,0]*M[1,1])
6     return(R)

```

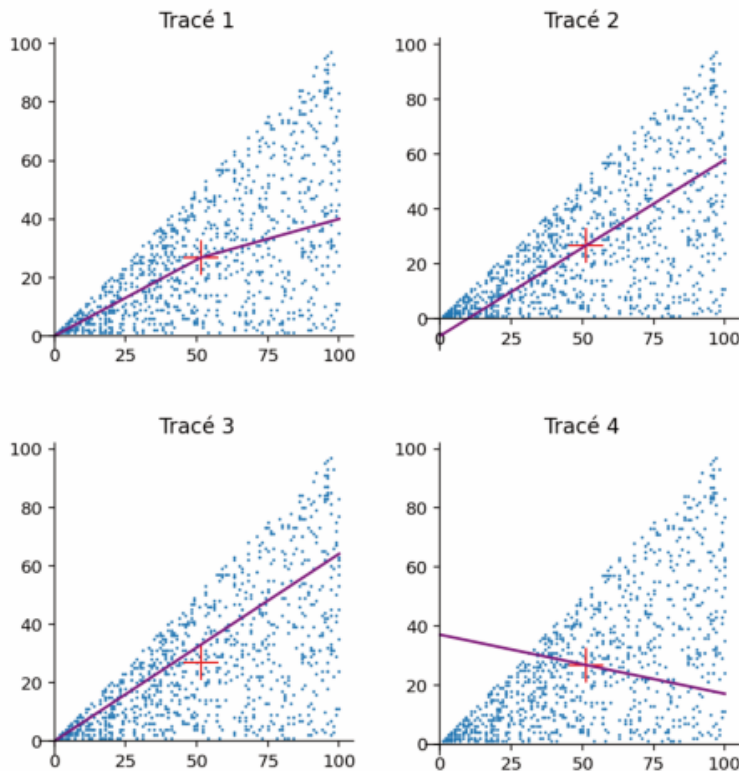
D'après les rappels en annexe, **M** est la matrice de covariance empirique de la série statistique (x, y) .
Ainsi :

- $M[0,0]$ est la variance de x
- $M[1,1]$ est la variance de y
- $M[0,1]$ est la covariance de (x, y)

Par conséquent, **R** prend la valeur $\frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{v_x v_y}}$, où v_x et v_y désignent respectivement les variances de x et y .

Conclusion : la fonction **Myst** renvoie le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (x, y) .

- 8.c. On a représenté ci-après plusieurs tracés figurant le nuage de points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 1; 1000 \rrbracket}$ correspondant à 1000 réalisations du couple (X, Y) pour $n = 100$ et le point moyen de la série statistique (i.e. le point de coordonnées (\bar{x}, \bar{y})) figuré par une croix rouge.
Parmi ces tracés figure celui de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
Déterminer lequel de ces tracés correspond à la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
Une réponse justifiée est attendue.



- Comme son nom l'indique, la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés est une droite : ce qui élimine le tracé 1.
- Ensuite, on sait que le point moyen appartient à la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés : ce qui élimine le tracé 3.

- Enfin, puisque $\text{Cov}(X, Y) = \frac{(n-1)(n+1)}{24}$, on a $\text{Cov}(X, Y) \geq 0$.
Par conséquent, le coefficient directeur de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés est positif : ce qui élimine le tracé 4.

Conclusion : c'est le tracé 2 qui convient.

Rappel...
Le coefficient directeur de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés d'une série statistique (x, y) est $\frac{\text{Cov}(x, y)}{v_x}$ où v_x désigne la variance de x .

9. On note A_n l'événement : "le particulier choisit la même compagnie d'assurances lors des deux années considérées".

9.a. Exprimer l'événement A_n à l'aide des variables aléatoires X et Y .

Conclusion : $A_n = [X = Y]$.

9.b. Montrer que : $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}([X = Y]) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{nj} \end{aligned}$$

formule des probabilités totales, avec $([X = j])_{j \in [1;n]}$ comme système complet d'événements question 2.

Réflexe !
Pour calculer $\mathbb{P}([X = Y])$, ou plus généralement pour avoir la loi de $X + Y$ ou $X - Y$ lorsqu'au moins une des deux variables aléatoires est discrète : FPT !

Conclusion : $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.

9.c. Montrer que, pour tout entier naturel j non nul, $\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}^{++} , donc sur $[j; j+1]$, on a :

$$\forall x \in [j; j+1], \frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{j}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $j \leq j+1$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[j; j+1]$:

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{j+1} dx \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{j} dx$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$$

Conclusion : pour tout entier naturel j non nul, $\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$.

9.d. En déduire que $\frac{\ln(n+1)}{n} \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$.

- D'après la question précédente :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$$

D'où, en sommant de 1 à n , licite car $n \geq 1$ et par télescopage :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

Ainsi, d'après la question 8.b. :

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \leq \mathbb{P}(A_n)$$

- D'après la question précédente :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j)$$

D'où, en sommant de 1 à $n-1$, licite car $n-1 \geq 1$ ($n \geq 2$) et par télescopage :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \leq \ln(n)$$

Autrement dit, en effectuant le changement d'indice $k = j + 1$ dans la somme :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

Ainsi, d'après la question 8.b. :

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

Conclusion : $\frac{\ln(n+1)}{n} \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$.

9.e. Montrer que $\mathbb{P}(A_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

Puisque $n \geq 2$, on a $\ln(n) > 0$ et ainsi, d'après la question précédente :

$$\frac{\frac{\ln(n+1)}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \frac{\frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}}$$

Autrement dit :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

Or :

- par opérations : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} + 1 = 1$
- et

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &= \frac{\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \\ &= \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \end{aligned}$$

Ainsi, par composition et opérations, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$$

Conclusion : $\mathbb{P}(A_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

10. Pour répondre aux questions suivantes, on pourra se référer aux commandes SQL rappelées en annexe.

Dans une base de données, on dispose d'une table **adherent** dont chaque enregistrement correspond à un individu assuré, et qui recense les compagnies d'assurances choisies en 2025 et en 2026 par chaque assuré. Ses attributs sont les suivants :

- **assure** (de type **INTEGER**) : un numéro permettant d'identifier l'assuré.
- **id_2025** (de type **INTEGER**) : un code permettant d'identifier la compagnie d'assurances à laquelle l'assuré a souscrit en 2025.
- **id_2026** (de type **INTEGER**) : un code permettant d'identifier la compagnie d'assurances à laquelle l'assuré a souscrit en 2026.

On dispose également d'une table **compagnie** dont chaque enregistrement correspond à une compagnie et qui associe pour chaque compagnie son nom et son identifiant. Ses attributs sont les suivants :

- **id** (de type **INTEGER**) : un code permettant d'identifier la compagnie d'assurances.
- **nom** (de type **TEXT**) : le nom de la compagnie d'assurances.

Le format de la table **adherent** est illustré dans le tableau ci-dessous.

assure	id_2025	id_2026
1003	3	3
1004	4	2
1005	1	1
1006	3	4
1007	2	4

Le format de la table **compagnie** est illustré dans le tableau ci-dessous.

id	nom
1	Assurplus
2	Garantia
3	SecurVie
4	MutuelPro

10.a. Écrire une requête SQL permettant d'afficher le nombre d'assurés ayant conservé la même compagnie d'assurances entre 2025 et 2026.

```
SELECT COUNT(*) FROM adherent
WHERE id_2025=id_2026;
```

10.b. Expliquer ce que réalise la commande SQL suivante :

```
SELECT assure, nom
FROM adherent INNER JOIN compagnie
ON adherent.id_2026 = compagnie.id;
```

Cette requête effectue une jointure.

Le tableau renvoyé sera constitué des numéros des assurés ainsi que du nom de leur assurance souscrite pour l'année 2026.

10.c. Dans sa base de données, le site internet qui diffuse les avis sur les compagnies d'assurances dispose d'une table **avis**, dans laquelle chaque enregistrement correspond à un avis déposé par un utilisateur concernant une compagnie. La table **avis** est composée des attributs suivants :

- **id** (de type **INTEGER**) : un numéro permettant d'identifier l'avis.
- **usr** (de type **TEXT**) : le nom d'utilisateur de la personne ayant déposé l'avis.
- **compagnie** (de type **INTEGER**) : un code permettant d'identifier la compagnie d'assurances évaluée dans l'avis.
- **note** (de type **INTEGER**) : la note sur 10 attribuée par l'utilisateur à la compagnie évaluée.
- **commentaire** (de type **TEXT**) : l'appréciation déposée par l'utilisateur sur la compagnie.

Le format de la table **avis** est illustré dans le tableau ci-dessous.

id	usr	compagnie	note	commentaire
5001	alice92	1	8	Très bon service !
5002	karimBoss	2	6	Service correct.
5004	david123	3	7	Bon rapport qualité-prix.
5005	emma_p	2	5	Déçu par le service.
5007	alice92	3	8	Très professionnels.
5008	david123	4	9	Service impeccable.

Écrire une requête SQL permettant d'obtenir, pour chaque compagnie d'assurances évaluée, la note moyenne que les utilisateurs lui ont attribuée. On affichera pour chaque enregistrement l'attribut **compagnie**, ainsi que l'attribut **note** correspondant désormais à la moyenne de toutes les notes obtenues par la compagnie.

```
SELECT compagnie, AVG(note) AS note
FROM avis
GROUP BY compagnie;
```

10.d. On appelle **moyenne** la table issue de la requête décrite à la question précédente.

Écrire une requête SQL permettant de classer les compagnies d'assurances, de la mieux notée à la moins bien notée.

```
SELECT *
FROM moyenne
ORDER BY note DESC;
```

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

PARTIE I

1. Déterminer le domaine de définition de f .

Notons \mathcal{D}_f le domaine de définition de f . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff \frac{1}{1-x} > 0 \\ &\iff 1-x > 0 \\ &\iff x \in]-\infty; 1[\end{aligned}$$

Conclusion : le domaine de définition de f est $]-\infty; 1[$.

Dans les questions qui suivent, on note I le domaine de définition de f .

2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Remarquons déjà que :

$$\forall x \in I, f(x) = -\ln(1-x)$$

• En $-\infty$:

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty$. Ainsi, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = +\infty$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

• En 1 :

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} = 0$. Ainsi, par composition :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(1-x) = -\infty$$

D'où :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur I .

La fonction $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et à valeurs dans \mathbb{R}^{++} , donc la fonction f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et pour tout $x \in]-\infty; 1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-1}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} \\ &> 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} x < 1$$

D'où :

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

4. 4.a. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

$$\checkmark \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0.$$

Ainsi :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Conclusion : $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Rappel...

L'ensemble de définition de la fonction \ln est \mathbb{R}^{++} .

Remarque

La courbe de f possède donc une asymptote d'équation $x = 1$ au voisinage de 1 par la gauche.

Remarque

Il n'est pas nécessaire de dériver...
 ✓ La fonction $x \mapsto 1-x$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et à valeurs dans \mathbb{R}^{++} ;
 ✓ La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}^{++} .
 Ainsi, la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$; donc f également.

4.b. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.

- D'après la question précédente, l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = x$.
- Ensuite, on a :

$$f(x) - x = \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

D'où :

$$f(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{2} \geq 0$, on en déduit qu'au voisinage de 0, on a :

$$f(x) - x \geq 0$$

Conclusion : la courbe de f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

Rappel...

Si f est dérivable en a , alors :
 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_{x \rightarrow a}((x-a))$
 La partie affine du DL fournit donc l'équation de la tangente à la courbe de f en a .

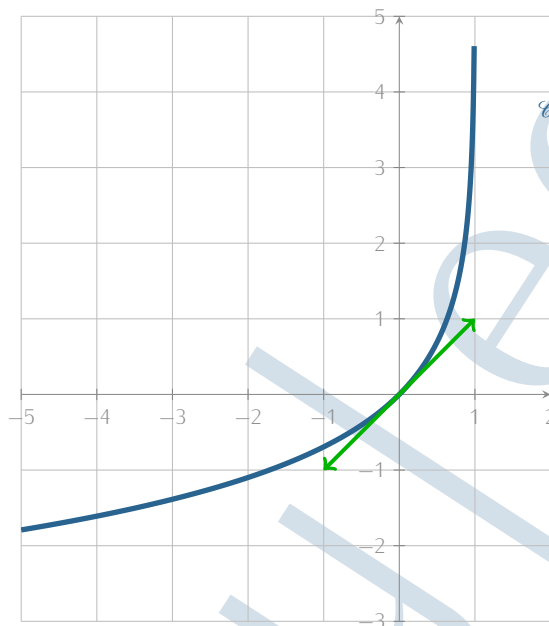
Rappel...

Si deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point, alors elles ont même signe au voisinage de ce point.

Remarque

La fonction f est en fait convexe sur $] -\infty; 1[$.

5. Représenter, dans un même repère orthonormé, l'allure de la courbe représentative de f et sa tangente au point d'abscisse 0.



PARTIE II

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x , on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

6. 6.a. Donner la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$.

Conclusion : la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente (série harmonique).

Remarque

L'exercice 1 (en question 9) a même permis d'avoir :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

6.b. Étudier la monotonie de la suite $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{n+1}(1) - S_n(1) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est (strictement) croissante.

6.c. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = +\infty$.

La suite $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est :

✓ croissante d'après la question précédente ;

✓ divergente, car c'est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ qui est divergente.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = +\infty$.

♥ L'avis du chef ! ♥
Ce résultat aurait pu ne pas être donné... Ni être guidé d'ailleurs !

7. Montrer que, pour tout réel x de $] -1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge absolument.

Soit $x \in] -1, 1[$.

✓ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k} \leq 1$$

D'où, puisque $|x^k| \geq 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{|x^k|}{k} \leq |x^k|$$

Autrement dit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \left| \frac{x^k}{k} \right| \leq |x|^k$$

✓ $|x| < 1$, donc la série $\sum_{k \geq 1} |x|^k$ est une (troncature d'une) série géométrique convergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{k \geq 1} \left| \frac{x^k}{k} \right|$ est convergente.

Conclusion : pour tout réel x de $] -1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge absolument.

8. 8.a. Montrer que les suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} S_{2n+2}(-1) - S_{2n}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Réponse !

Conclusion : la suite $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De même, on a :

$$\begin{aligned} S_{2n+3}(-1) - S_{2n+1}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Réponse !

Conclusion : la suite $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

✓ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{-1}{2n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1) = 0$.

Conclusion : les suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

✗ Attention !
C'est bien u_{2n+2} le terme qui succède à u_{2n} dans la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$

✗ Attention !
C'est bien u_{2n+3} le terme qui succède à u_{2n+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$

8.b. En déduire que la suite $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

D'après la question précédente, les suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent et ont même limite.

Conclusion : par théorème de recouvrement, la suite $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également vers cette limite commune.

★ Classique ! ★

L'étude de la série harmonique alternée est un grand classique des concours en ECG.

8.c. En utilisant la monotonie des suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1).$$

- Déjà, puisque la suite $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $-\ln(2)$, il en est de même des suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Par conséquent, la suite $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers $-\ln(2)$; et la suite $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers $-\ln(2)$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n+1}(-1) \leq -\ln(2) \leq S_{2n}(-1) \quad (*)$$

- Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1) &\iff |\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq \frac{1}{2n+1} \\ &\iff \frac{-1}{2n+1} \leq \ln(2) + S_{2n}(-1) \leq \frac{1}{2n+1} \\ &\iff -S_{2n}(-1) - \frac{1}{2n+1} \leq \ln(2) \leq -S_{2n}(-1) + \frac{1}{2n+1} \\ &\iff S_{2n}(-1) + \frac{1}{2n+1} \geq -\ln(2) \geq S_{2n}(-1) - \frac{1}{2n+1} \\ &\iff S_{2n}(-1) + \frac{1}{2n+1} \geq -\ln(2) \geq S_{2n+1}(-1) \end{aligned}$$

Enfin :

- * l'inégalité de droite est immédiate d'après (*).
- * d'après (*), on a $S_{2n}(-1) \geq \ln(2)$. Or $\frac{1}{2n+1} \geq 0$; d'où l'inégalité de gauche.

L'encadrement final est donc vrai. Par équivalences, l'encadrement initial l'est également.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)$.

♣ Méthode !

Je fais le choix d'un raisonnement par équivalences qui se prête bien aux questions pour lesquelles on manque un peu d'inspiration, quand on ne sait pas trop comment partir. En travaillant par équivalences à partir du résultat, on arrive parfois à mieux s'en sortir.

Remarque

Question plus difficile qui demande davantage de recul et d'aisance dans les méthodes et les calculs.

8.d. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $|\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si n est pair :

Alors il existe un entier k naturel non nul, que l'on considère ensuite, tel que $n = 2k$.

Et, d'après la question précédente : $|\ln(2) + S_{2k}(-1)| \leq S_{2k}(-1) - S_{2k+1}(-1)$. Autrement dit :

$$|\ln(2) + S_{2k}(-1)| \leq \frac{1}{2k+1}$$

Or $\frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2k}$. D'où :

$$|\ln(2) + S_{2k}(-1)| \leq \frac{1}{2k}$$

Conclusion : $|\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n}$.

- Si n est impair :

En procédant comme en question précédente, on obtient :

$$|\ln(2) + S_{2k+1}(-1)| \leq \frac{1}{2k+2}$$

Or $\frac{1}{2k+2} \leq \frac{1}{2k+1}$. D'où :

$$|\ln(2) + S_{2k+1}(-1)| \leq \frac{1}{2k+1}$$

Conclusion : $|\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, $|\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n}$.

Remarque

En fait, on a même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n+1}$. En demandant une majoration moins précise, la difficulté est en fait accrue, car cela allonge le raisonnement; et majorer $\frac{1}{n+1}$ par $\frac{1}{n}$ est toujours un peu surprenant : tellement évident que l'on se demande s'il n'y a pas une erreur quelque-part. Était-ce volontaire ?

9. Dans cette question uniquement, x est un réel strictement supérieur à 1.

9.a. Déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$.

Puisque $x > 1$, par croissances comparées, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{k} = +\infty$$

Conclusion : la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ diverge grossièrement.

9.b. En déduire la limite de la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Comme en question 6.c., la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est :

- ✓ croissante (immédiat, comme en question 6.b.),
- ✓ divergente, car c'est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ qui est divergente.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = +\infty$.

Pour tout $x \in [-1; 1[$, on pose $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

PARTIE III

Dans toute cette partie, a désigne un réel fixé dans l'intervalle $] -1, 1[$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'intégrale notée $R_n(a)$ définie par :

$$R_n(a) = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt.$$

On considère à nouveau la fonction f définie à la partie I ainsi que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la fonction S définies à la partie II.

10.10.a. Déterminer en fonction de a les valeurs de $\int_0^a \frac{1}{1-t} dt$ et $\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{1-t} dt &= [-\ln(1-t)]_0^a \\ &= -\ln(1-a) + \ln(1) \\ &= -\ln(1-a) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt &= \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{1-a} - 1 \end{aligned}$$

Rappel...

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = \frac{-u'}{u^2}.$$

10.b. Montrer que $f(a) = a + R_1(a)$.

Indication : on pourra écrire $a-t = (a-1) + (1-t)$.

$$\begin{aligned} R_1(a) &= \int_0^a \frac{a-t}{(1-t)^2} dt \\ &= \int_0^a \frac{a-1+1-t}{(1-t)^2} dt \\ &= (a-1) \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt + \int_0^a \frac{1}{1-t} dt \\ &= (a-1) \left(\frac{1}{1-a} - 1 \right) - \ln(1-a) \\ &= -1 - (a-1) - \ln(1-a) \\ &= -a + f(a) \end{aligned}$$

↳ linéarité de l'intégrale

↳ question précédente

Conclusion : $f(a) = a + R_1(a)$.

11. Montrer par intégration par parties que, pour tout entier naturel n non nul,

$$R_n(a) = \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$R_n(a) = \int_0^a (a-t)^n \frac{1}{(1-t)^{n+1}} dt$$

Posons : $\begin{cases} u : t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \\ v : t \mapsto \frac{-1}{n+1}(a-t)^{n+1} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur le segment $[0; a]$ et pour tout $t \in [0; a]$:

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{(n+1)}{(1-t)^{n+2}} \\ v'(t) = (a-t)^n \end{cases}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} R_n(a) &= \left[\frac{1}{(1-t)^{n+1}} \times \frac{-1}{n+1}(a-t)^{n+1} \right]_0^a - \int_0^a \frac{-1}{n+1}(a-t)^{n+1} \times \frac{(n+1)}{(1-t)^{n+2}} dt \\ &= \frac{-0^{n+1}}{n+1} + \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a) \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a) \end{aligned}$$

$\curvearrowright n+1 \neq 0$, donc $0^{n+1} = 0$

Rappel...
 $(u^m)' = mu'u^{m-1}$

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, $R_n(a) = \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$.

12. En utilisant les résultats des questions 10.b. et 11., montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$f(a) = S_n(a) + R_n(a).$$

Indication : on pourra procéder par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:

On a :

$$\begin{aligned} S_1(a) + R_1(a) &= \sum_{k=1}^1 \frac{a^k}{k} + R_1(a) \\ &= a + R_1(a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

\curvearrowright question 10.b.

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$. Démontrons que $f(a) = S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a)$. On a, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} f(a) &= S_n(a) + R_n(a) \\ &= S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k} + \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a) \\ &= S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a) \end{aligned}$$

\curvearrowright question précédente

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$.

Pour info...
On vient de démontrer, dans un cas particulier, la formule de Taylor avec reste intégral. Pour s'entraîner sur le cas général : QUESTION CLASSIQUE 3.

13. Dans cette question uniquement, on suppose que $a \in [0, 1[$.

13.a. Montrer que pour tout réel t de $[0, a]$, $0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$.

Soit $t \in [0; a]$.

- Puisque $t \in [0; a]$, on a $a-t \geq 0$. Et puisque $a \in [0; 1[$, on a $t \in [0; 1[$ et donc $1-t > 0$. D'où :

$$\frac{a-t}{1-t} \geq 0$$

- Ensuite, puisque $1-t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{a-t}{1-t} \leq a &\iff a-t \leq a-at \\ &\iff -t \leq -at \\ &\iff at - t \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t(a-1) \leq 0$$

Et cette dernière inégalité est vraie, car $t \geq 0$ et $a \in [0; 1[$.
D'où, par équivalences, on a

$$\frac{a-t}{1-t} \leq a$$

Conclusion : pour tout réel t de $[0, a]$, $0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$.

13.b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq R_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall t \in [0; a], 0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$$

Ainsi, par croissance de la fonction $.^n$ sur \mathbb{R}^+ :

$$\forall t \in [0; a], 0 \leq \left(\frac{a-t}{1-t}\right)^n \leq a^n$$

Or, pour tout $t \in [0; a]$, $1-t \geq 1-a > 0$, donc $0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-a}$. Ainsi :

$$\forall t \in [0; a], 0 \leq \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{a^n}{1-a}$$

D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $a \geq 0$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0; a]$, on a :

$$0 \leq R_n(a) \leq \int_0^a \frac{a^n}{1-a} dt$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq R_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

Rappel...

$\left. \begin{array}{l} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq ac \leq bd$
Et on pense bien à l'hypothèse de positivité ! Chercher un contre-exemple sinon.

13.c. En déduire que $f(a) = S(a)$.

• On a :

- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq R_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$;
- ✓ $a \in [0; 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1} = 0$.

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(a) = 0$$

• Et, d'après la question 12. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(a) = S_n(a) + R_n(a)$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(a) = S(a) ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(a) = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a) = S(a)$$

Conclusion : $f(a) = S(a)$.

14. 14.a. En utilisant les résultats des questions précédentes, justifier que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 12. avec $a = \frac{1}{2} \in [0; 1[$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = S_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

Autrement dit :

$$-\ln(2) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} + R_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

D'où :

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} \right| = \left| -R_n\left(\frac{1}{2}\right) \right|$$

$$\hookrightarrow R_n\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \text{ (question 13.b.)}$$

$$\begin{aligned}
 &= R_n \left(\frac{1}{2} \right) \\
 &\leq \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}}_{= \frac{1}{2^n}}
 \end{aligned}$$

question 13.b.

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

14.b. Écrire une fonction en langage **Python**, nommée **Val**, prenant en argument **eps** désignant le réel ε strictement positif, qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ à ε près.

D'après la question précédente, si $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$, alors $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$ fournit une valeur approchée de $\ln(2)$ à ε près.

On propose donc le programme suivant qui s'arrête dès que $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$.

```

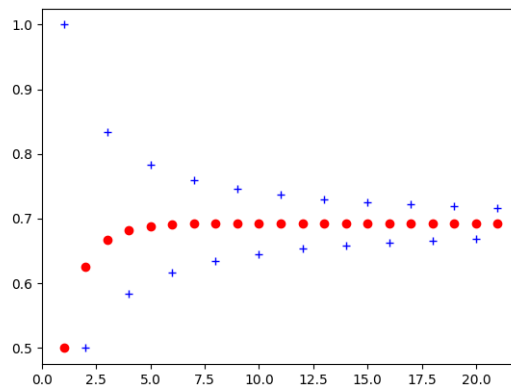
1 def Val(eps):
2     n=1
3     S=1/2
4     while 1/2**n>eps:
5         n=n+1
6         S=S+1/(n*2**n)
7     return S

```

Remarque

On pourrait également proposer un programme qui détermine d'abord le plus petit n tel que $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$, puis qui renvoie la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$ en sommant une liste en compréhension par exemple.

14.c. Dans la figure suivante sont représentés les tracés des premiers termes des suites $\left(S_n \left(\frac{1}{2} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(-S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Identifiez les suites dans cette figure.



D'après ce qui a été fait en question 8., la suite $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alternée...

Conclusion : la suite $(-S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est représentée par les croix bleues; et la suite $\left(S_n \left(\frac{1}{2} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par les disques rouges.

COMMENT OBTENIR CE GRAPHIQUE ?

Une bonne question serait d'écrire un programme **Python** permettant d'obtenir ce graphique... En voici un, utilisant la fonction **cumsum** :

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 def somme_S(n,x):
5     return np.cumsum([x**k/k for k in range(1,n+1)])
6
7 plt.plot(range(1,22),somme_S(21,1/2),'ro')
8 plt.plot(range(1,22),-somme_S(21,-1),'b+')
9 plt.show()

```


PARTIE II

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse.

La matrice P est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible ; et on trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que A possède une unique valeur propre que l'on déterminera.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 1 = 0 \\ &\iff -1 + \lambda^2 + 1 = 0 \\ &\iff \lambda^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

6. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Supposons que la matrice A est diagonalisable.

Dans ce cas, il existe $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A , telles que

$$A = QDQ^{-1}$$

Mais $\text{Sp}(A) = \{0\}$, donc $D = 0_2$ et ainsi :

$$A = 0_2 \quad : \quad \text{absurde !}$$

Conclusion : la matrice A n'est pas diagonalisable.

7. Montrer que $J = P^{-1}AP$.

On trouve :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $P^{-1}AP = J$.

Dans la suite de cette partie, on considère le système différentiel (S) défini par :

$$(S) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

Pour toutes fonctions x et y dérivables sur \mathbb{R} , on pose, pour tout réel t ,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

On pose également, pour tout réel t ,

$$Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}.$$

8. Déterminer les états d'équilibre du système (S) .

Le système (S) est un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants. Pour déterminer ses équilibres, déterminons $\ker(A)$.

On trouve immédiatement :

$$\ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Conclusion : l'ensemble des équilibres du système (S) est $\left\{ t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

♣ Méthode !

Au choix :

• Utiliser, si $ad - bc \neq 0$,

que l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est :

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

• Inverser "à la main", avec la méthode de Gauss (très rapide sur des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et évite de s'encombrer le cerveau avec une formule qui sert peu...).

♥ Astuce du chef ♥

On calcule AP plutôt que $P^{-1}A$: en effet, A et P sont données, alors que P^{-1} ne l'est pas. Il y a donc plus de risque que le calcul de $P^{-1}A$ soit faux. Autant maximiser les chances d'avoir le seul (probablement) point de la question !

📖 Rappel...

Un équilibre est une solution constante. On cherche donc toutes les applications X telles que $X' = 0$, autrement dit, telles que $AX = 0_2$.

9. Montrer que x et y sont solutions de (\mathcal{S}) si et seulement si, pour tout réel t , $Y'(t) = JY(t)$.

$$\begin{aligned}
 (x \text{ et } y \text{ sont solutions de } (\mathcal{S})) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = PJP^{-1}X(t) \quad \leftarrow \text{question 7. : } A = PJP^{-1} \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t) \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = JY(t) \quad \leftarrow P^{-1} \text{ est à coefficients constants, donc } (P^{-1}X)' = P^{-1}X'
 \end{aligned}$$

10. Déterminer l'ensemble des solutions $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel $Y'(t) = JY(t)$.

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = JY(t) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \exists a \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = a \\ v(t) = a \end{cases} \\
 &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u(t) = at + b \\ v(t) = a \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = JY$ est $\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} at + b \\ a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

11. En déduire les solutions du système différentiel (\mathcal{S}) .

D'après les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
 (x \text{ et } y \text{ sont solutions de } (\mathcal{S})) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = JY(t) \\
 &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ a \end{pmatrix} \quad \leftarrow P \text{ est inversible et } Y = P^{-1}X, \text{ donc } X = PY \\
 &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at + b \\ a \end{pmatrix} \\
 &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ -at + a - b \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions du système différentiel (\mathcal{S}) est $\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} at + b \\ -at + a - b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Remarque

Il s'agit du même système différentiel que celui de la partie I. On peut donc vérifier la cohérence en déterminant les réels a et b de sorte que $x(0) = y(0) = 1$. On trouverait alors $b = 1$ puis $a = 2$; ce qui confirme le résultat de la question 3.

PARTIE III

Soit n un entier naturel non nul. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente quand il existe un entier naturel k tel que $M^k = 0_n$, où 0_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On admet que, pour toute matrice M nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un entier naturel p non nul et inférieur ou égal à n tel que $M^{p-1} \neq 0_n$ et $\forall k \geq p, M^k = 0_n$. p est appelé l'indice de nilpotence de M .

On considère le système différentiel (\mathcal{E}) à n équations, d'inconnues x_1, x_2, \dots, x_n dérivables sur \mathbb{R} , défini par :

$$(\mathcal{E}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = NX(t), \quad \text{où } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix},$$

et N est une matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note p l'indice de nilpotence de N .

12. Écrire une fonction, en langage Python, nommée Nil, qui prend en entrée une matrice M et qui renvoie p lorsque la matrice M est nilpotente d'indice de nilpotence p et 0 sinon.

L'énoncé précise que l'on admet que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors son indice de nilpotence est majorée par n . D'où le programme :

```

1 import numpy as np
2
3 def Nil(M):
4     n=len(M) # ou (n,n)=np.shape(M)
5     puissM=np.eye(n)
6     Z=np.zeros([n,n])
7     for k in range(1,n+1):
8         puissM=np.dot(M,puissM)
9         if (puissM==Z).all():
10            return k
11
12    return 0
    
```

Remarque

Pour une démonstration de ce résultat : QUESTION CLASSIQUE 17.

Rappel...

`np.shape(M)` renvoie le couple (n, p) où n est le nombre de lignes et p le nombre de colonnes de la matrice M .

Explication rapide :

- pour k allant de 1 à n , on calcule M^k
- si $M^k = 0_n$, on renvoie k , qui est alors le plus petit exposant convenant, donc l'indice de nilpotence ;
- si à la fin, aucune des M^k n'est nulle, alors M n'est pas nilpotente et donc on renvoie 0 à la fin de la boucle `for` : ne sera renvoyé que si aucune valeur n'a déjà été renvoyée.

Remarque

Je fais le choix de le faire par itération pour économiser du calcul, mais on aurait pu utiliser `l.matrix_power(M,k)`.

13. Montrer que la matrice N possède une unique valeur propre que l'on déterminera.

- Par définition, la fonction polynomiale $x \mapsto x^p$ est annulatrice de la matrice N ; et 0 est la seule racine de cette fonction.

Conclusion : $\text{Sp}(N) \subset \{0\}$.

- Réciproquement, démontrons que 0 est valeur propre de N .

Raisonnons par l'absurde et supposons que 0 n'est pas valeur propre de N . Dans ce cas, la matrice N est inversible et, en multipliant l'égalité $N^p = 0_n$ par N^{-1} , on obtient :

$$N^{p-1} = 0_n \quad : \quad \text{absurde (contredit la définition de } p)$$

Par conséquent, 0 est valeur propre de N .

Conclusion : $\text{Sp}(N) = \{0\}$.

★ Classique ! ★

C'est une question assez classique, sur laquelle il est bon de s'entraîner pour avoir les bons raisonnements.

14. Justifier par l'absurde que la matrice N n'est pas diagonalisable.

Supposons que la matrice N est diagonalisable.

Dans ce cas, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de N , telles que

$$A = QDQ^{-1}$$

Mais $\text{Sp}(N) = \{0\}$, donc $D = 0_n$ et ainsi :

$$N = 0_n \quad : \quad \text{absurde !}$$

Conclusion : la matrice N n'est pas diagonalisable.

Remarque

On se répète, non ?

Pour tout réel t , on définit la matrice $B(t)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$B(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k,$$

et la matrice colonne $X(t)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$X(t) = B(t)X_0,$$

où X_0 est une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

15. Justifier que, pour tout réel t ,

$$X'(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0.$$

L'application B est dérivable sur \mathbb{R} , donc l'application X est également dérivable sur \mathbb{R} et, puisque X_0 est constante, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X'(t) = B'(t)X_0$$

Or, puisque N n'est pas la matrice nulle, on a $p \geq 2$, donc $p-1 \geq 1$ et ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, B(t) = I_n + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k$$

D'où, par linéarité de la dérivation :

$$\forall t \in \mathbb{R}, B'(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{k t^{k-1}}{k!} N^k$$

D'où le résultat.

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0.$

✓ Rigueur !

Pour lever toute ambiguïté dans l'écriture kt^{k-1} (cas où $k=0$ et $t=0$..), je préfère décomposer la somme pour faire apparaître le terme constant.

Remarque

Il faut avouer que la question est un peu à la limite du programme... et qu'il n'y a pas grand chose à faire !

16. En déduire que $X(t)$ est l'unique solution du problème de Cauchy défini par le système différentiel (\mathcal{E}) et la condition initiale $X(0) = X_0$.

Confusion d'objets !

Il faudrait plutôt dire 'X est l'unique solution', plutôt que $X(t)$. Pour lever toute ambiguïté, on peut dire 'l'application $t \mapsto X(t)$ est l'unique solution'.

✓ On a déjà, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 NX(t) &= NB(t)X_0 \\
 &= N \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k \right) X_0 \\
 &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^{k+1} X_0 && \left. \begin{array}{l} \curvearrowright j = k + 1 \\ \curvearrowright N^p = 0_n \end{array} \right. \\
 &= \sum_{j=1}^p \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} N^j X_0 \\
 &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} N^j X_0 && \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \text{question précédente} \end{array} \right. \\
 &= X'(t)
 \end{aligned}$$

Conclusion : X est solution du système différentiel (\mathcal{E}) .

✓ Ensuite :

$$\begin{aligned}
 X(0) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{0^k}{k!} N^k X_0 && \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \forall k \geq 1, 0^k = 0 \text{ et } 0^0 = 1, 0! = 1, N^0 = I_n \end{array} \right. \\
 &= I_n X_0 \\
 &= X_0
 \end{aligned}$$

Par conséquent, X est solution du problème de Cauchy donné ; or ce problème possède une unique solution.

Conclusion : X est l'unique solution du problème de Cauchy défini par le système différentiel (\mathcal{E}) et la condition initiale $X(0) = X_0$.

17. Recopier et compléter, en langage Python, la fonction suivante qui prend en entrée la matrice N et un réel t et qui renvoie $B(t)$:

```

1 def B(N,t):
2     if Nil(N)==...:
3         return("N n'est pas nilpotente")
4     else:
5         T=np.eye(len(N))
6         S=T
7         for k in range(...):
8             T=.../...*np.dot(T,...)
9             S=S+T
10        return S
    
```

```

1 def B(N,t):
2     if Nil(N)==0:
3         return("N n'est pas nilpotente")
4     else:
5         T=np.eye(len(N))
6         S=T
7         for k in range(1,Nil(N)):
8             T=t/k*np.dot(T,N)
9             S=S+T
10        return S
    
```

✗ Attention !

- On veut sommer jusqu'au terme $p-1$, d'où la boucle...
 - On calcule $\frac{t^k}{k!} N^k$ de manière itérative, en utilisant :

$$\frac{t^k}{k!} N^k = \frac{t}{k} N \times \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^{k-1}$$
- À chaque étape, il suffit donc de multiplier par $\frac{t}{k} N$.

ANNEXE A – FONCTIONS PYTHON UTILES

MANIPULATION DE LISTES

On suppose que L désigne une liste à n éléments.

- L'opérateur de concaténation $+$, appliqué entre deux listes, renvoie la liste obtenue en plaçant les éléments de la seconde liste à la suite de ceux de la première liste.
- L'opérateur $*$, appliqué entre une liste L et un entier n , renvoie la liste obtenue en concaténant n fois la liste L avec elle-même.
- La fonction `len` prend en argument d'entrée une liste et renvoie le nombre d'éléments dans cette liste.
- La commande `L.append(x)` permet d'inclure l'élément x à la fin de la liste L .
- Pour tout entier i entre 0 et $n - 1$, la commande `L.pop(i)` retire de la liste L l'élément situé à la position i , et renvoie sa valeur.

LA BIBLIOTHÈQUE NUMPY

- Exemple d'importation : `import numpy as np`.
- Les opérations $+$, $-$, $*$, $/$, $**$ agissent coefficient par coefficient sur les tableaux Numpy de tailles compatibles.
- La fonction `np.eye` prend en argument d'entrée un entier n et renvoie la matrice identité sous la forme d'un tableau Numpy.
- La fonction `np.zeros` prend en arguments d'entrée une liste d'entiers $[n, p]$ et renvoie la matrice de n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.
- La fonction `np.dot` prend en argument d'entrée deux tableaux Numpy de nombres M et N et renvoie le tableau Numpy correspondant au produit matriciel MN .
- La fonction `np.mean` renvoie la moyenne des éléments d'un tableau Numpy.
- La fonction `np.var` renvoie la variance des éléments d'un tableau Numpy.
- La fonction `np.std` renvoie l'écart-type des éléments d'un tableau Numpy.
- La fonction `np.cov` prend en argument une série statistique à deux variables (x, y) sous forme de tableau Numpy à deux lignes et renvoie la matrice de covariance empirique.

LA BIBLIOTHÈQUE MATPLOTLIB.PYPLLOT

- Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`.
- La fonction `plt.plot` prend en arguments d'entrée deux listes ou tableaux Numpy x et y et renvoie une figure constituée de la ligne brisée joignant les points (x_i, y_i) .
- La fonction `plt.show` permet l'affichage d'une figure préalablement tracée.

LE MODULE NUMPY.RANDOM

- Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`.
- La fonction `rd.randint` prend deux entiers n et p (avec $p > n$) en arguments d'entrée et renvoie une réalisation aléatoire de la loi uniforme discrète sur $[[n, p - 1]]$.

LE MODULE NUMPY.LINALG

- Exemple d'importation : `import numpy.linalg as al`.
- La fonction `al.inv` prend un tableau Numpy M en argument d'entrée et renvoie l'inverse de M (au sens matriciel).
- La fonction `al.matrix_power` prend un tableau Numpy M et un entier k en argument d'entrée et renvoie la matrice M^k .

ANNEXE B – COMMANDES SQL

LA COMMANDE ORDER BY

La commande `ORDER BY`, placée en fin de requête et suivie d'un nom de colonne, permet de trier les résultats demandés dans l'ordre croissant des valeurs de la colonne spécifiée, ou dans l'ordre alphabétique s'il s'agit de données de type `TEXT`.

On peut ajouter le mot-clé `DESC` à la fin de la commande pour trier les données dans l'ordre décroissant.

Exemple : Une table `etablissement` contient les données suivantes concernant plusieurs établissements scolaires, leur nombre d'élèves et la ville où ils se situent.

identifiant	nom	nombre_eleves	ville
1	Edouard Herriot	887	Livry-Gargan
2	Diderot	220	Lyon
3	Edouard Herriot	808	Lyon
4	Louise Michel	653	Champigny-sur-Marne
5	Diderot	1200	Paris

- Pour afficher les données en triant les noms d'établissement dans l'ordre alphabétique, on peut utiliser la requête suivante :

```
SELECT * FROM etablisement
ORDER BY nom;
```

- Pour afficher les noms des établissements dans l'ordre décroissant de nombre d'élèves, on peut utiliser la requête suivante :

```
SELECT nom FROM etablisement
ORDER BY nombre_eleves DESC;
```

LA FONCTION COUNT()

La fonction d'agrégation **COUNT()** permet de connaître le nombre d'enregistrements d'une table, vérifiant éventuellement une certaine condition.

Exemple : La requête suivante renvoie le nombre total d'enregistrements dans **ma_table** :

```
SELECT COUNT(*) FROM ma_table;
```

La requête suivante renvoie le nombre d'enregistrements de **ma_table** vérifiant la condition **cond** :

```
SELECT COUNT(*) FROM ma_table
WHERE cond;
```

LA FONCTION D'AGRÉGATION AVG()

La fonction **AVG()** permet de calculer la moyenne des valeurs d'une colonne dans une table.

Exemple : Si on considère la table nommée **table** contenant les enregistrements suivants :

colonne_1	colonne_2	colonne_3	colonne_4
1	69	Lyon	4
2	31	Toulouse	8
3	54	Nancy	5
4	64	Saint-Jean-de-Luz	17
5	44	Nantes	6

alors la requête suivante :

```
SELECT AVG(colonne_4)
FROM table
WHERE colonne_1 <= 3;
```

affiche la moyenne des valeurs de **colonne_4** des trois premiers enregistrements : 5.6667, c'est-à-dire $\frac{4 + 8 + 5}{3}$.

LA COMMANDE GROUP BY

La commande **GROUP BY** permet de regrouper tous les enregistrements dont la valeur d'un attribut donné est identique, en appliquant une fonction à chaque groupe d'enregistrements.

Exemple : Une table **etablisement** contient les données suivantes :

identifiant	nom	nombre_eleves	ville
1	Pierre-Gilles de Gennes	598	Paris
2	Diderot	220	Lyon
3	Edouard Herriot	808	Lyon
4	Paul Valéry	525	Paris
5	Edouard Herriot	887	Livry-Gargan
6	Diderot	1200	Paris

- On peut calculer le nombre d'établissements dans chaque ville à l'aide de la requête suivante :

```
SELECT ville, COUNT(*)
FROM etablissement
GROUP BY ville;
```

Résultat :

ville	COUNT(*)
Livry-Gargan	1
Lyon	2
Paris	3

- On peut de plus renommer les colonnes de cette nouvelle table :

```
SELECT ville, COUNT(*) AS nombre_etab
FROM etablissement
GROUP BY ville;
```

Résultat :

ville	nombre_etab
Livry-Gargan	1
Lyon	2
Paris	3

LA COMMANDE INNER JOIN

La commande **INNER JOIN** permet de réaliser la jointure de deux tables. Cette commande retourne les enregistrements lorsqu'il y a au moins une ligne dans chaque table qui correspond à la condition.

Exemple : Une table **etablissement** contient pour plusieurs établissements scolaires leur identifiant, leur nom et la ville où ils se situent.

ident	nom	ville
1	Pierre-Gilles de Gennes	Paris
2	Diderot	Lyon
3	Edouard Herriot	Lyon
4	Paul Valéry	Paris
5	Edouard Herriot	Livry-Gargan
6	Diderot	Paris

Une seconde table **effectifs** contient pour plusieurs établissements scolaires leur identifiant et leur nombre d'élèves.

ident	elevés
1	598
2	220
3	808
4	525
5	887
6	1200

On peut alors créer une table contenant pour chaque établissement son nom et son nombre d'élèves :

```
SELECT nom, eleves
FROM etablissement INNER JOIN effectifs
ON etablissement.ident = effectifs.ident;
```

Résultat :

nom	elevés
Pierre-Gilles de Gennes	598
Diderot	220
Edouard Herriot	808
Paul Valéry	525
Edouard Herriot	887
Diderot	1200

★★★★★★ FIN ★★★★★★