Travail estival
Consignes et exercices de révisions

Ce document est là pour vous expliquer l'ensemble du travail demandé pour l'entrée en ECG 2A - Mathématiques appliquées. Il faut commencer par distinguer le travail demandé du travail nécessaire qui est propre à chacun et dépend des acquis précédents. Le document

Dans tous les cas, la remise en forme (parce-qu'il s'agit bien d'être en pleine forme, avec un esprit vif et des mécanismes solides) pour septembre nécessite de mettre l'accent sur quatre pôles essentiels :

1. le travail du cours (encore et toujours) : apprendre parfaitement les définitions, propriétés et théorèmes (avec leurs hypothèses) et méthodes ;
2. le travail des techniques et d'assimilations des méthodes (sur des petits exercices),
3. le travail d'exercices "type concours" (qui contiennent naturellement des questions `Python`, point à ne pas négliger dans les révisions) pour ancrer les automatismes et s'imprégner de l'articulation entre les questions,
4. le travail de certaines démonstrations de cours et de résultats classiques aux écrits et/ou aux oraux.

Pour le point 1 : il faut bien reprendre le cours de 1A... Pas très original. La forme est propre à chacun : fiches, utilisation de l'application `Anki` (l'été est l'occasion de mettre à jour le `Anki` de 1A), autres... Du moment que cela fonctionne. Le document **Questions de cours** peut fournir une bonne base et sera, de toute façon, un document indispensable en 2A.

Pour le point 2 : il faut reprendre le cours de 1A, les exemples traités ainsi que les petits exercices de techniques (études de fonctions, calculs de limites, calculs de sommes, résolutions de systèmes,...).

Pour le point 3 : ce document contient, classés par thème, des exercices "type concours" ou d'annales de concours qui permettent de se tester sur des sujets plus complets.
Ces exercices doivent être **intensément** travaillés, avec le corrigé (qui sera publié sur mon site début août). Travailler un exercice, c'est le faire, le refaire, le re^{k}faire, avec k un entier suffisamment proche de $+\infty$... La lecture approfondie des corrigés est l'occasion de **s'imprégner de la rédaction**. Un devoir surveillé est prévu soit le jour de la rentrée, soit le premier samedi qui suivra, et sera composé d'exercices parmi ceux qui suivent.

Pour le point 4 : le document **Recueil de questions** regroupe 43 "questions classiques" (résultats de cours ou questions classiques aux écrits et/ou oraux) dont le travail de la démonstration est utile. Les 17 premières questions sont à maitriser pour la rentrée. Les suivantes seront "débloquées" au fur et à mesure de l'année.

> Le travail de cette fiche est naturellement insuffisant pour aborder sereinement la 2A. En effet, un point est fondamental avant de s'atteler à ces exercices : **LE COURS, LE COURS, LE COURS** ! Définitions, théorèmes et propriétés (avec leurs hypothèses), méthodes doivent être parfaitement connus pour espérer réussir l'année et les concours. Un travail régulier et précis du cours de 1A est indispensable durant l'été mais également durant toute l'année de 2A.

Pour terminer, il serait bon de connaître les lettres grecques ci-dessous...

Alpha	α
Bêta	β
Gamma	γ et Γ
Delta	δ et Δ
Epsilon	ε
Thêta	θ
Lambda	λ

Mu	μ
Pi	π et Π
Rho	ρ
Sigma	σ et Σ
Tau	τ
Phi	φ et Φ
Omega	ω et Ω

N'hésitez pas à me contacter si besoin. Bel été !

Plan du document

I Analyse . . . 3
Exercice 1 - Inspiré d'exercices de concours . . . 3
Exercice 2 - Inspiré d'exercices de concours . . . 8
Exercice 3 - Inspiré d'exercices de concours . . . 13
Exercice 4 - EDHEC 2013 E . . . 20
Exercice 5 - EDHEC 2020 E . . . 22
Exercice 6 - Ecricome 2005 E . . . 27
Exercice 7 - EDHEC 2022 E . . . 30
Exercice 8 - Inspiré de EML 2018 E . . . 34
Exercice 9 - EML 2023 Appli . . . 42
Exercice 10 - Inspiré d'exercices de concours . . . 46
II Algèbre linéaire . . . 50
Exercice 11 - Fait maison . . . 50
III Probabilités . . . 54
Exercice 12 - EML 2009 E . . . 54
Exercice 13 - Ecricome 2014 E . . . 58
Exercice 14 - EDHEC 2018 E . . . 61
Exercice 15 - EDHEC 2009 E . . . 67
Exercice 16 - Inspiré de EML 2010 E et EDHEC 2007 E . . . 70
Exercice 17 - EDHEC 2019 E . . . 77
Exercice 18 - EDHEC 2018 S . . . 81

I Analyse

Exercice 1 - Inspiré d'exercices de concours

On considère la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de **suite_h(n)** renvoie la valeur de h_n.
   Deux possibilités :

```python
def suite_h(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k
    return S

def suite_h_bis(n):
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    return sum(L)
```

Petite remarque
Dans le premier programme, il est aussi possible d'initialiser avec `S=1` et, dans ce cas, la ligne suivante est
`for k in range(2,n+1):`

2. **Étude de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

   2.a. Déterminer le sens de variation de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} h_{n+1} - h_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

   Par conséquent : $h_{n+1} > h_n$.

   Conclusion : la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

   2.b. Démontrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   On sait que la fonction ln est concave ; donc sa courbe représentative est partout au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier celle en $(1;0)$ d'équation réduite $y = x - 1$.
   D'où :

$$\forall z > 0,\ \ln(z) \leqslant z - 1$$

   Conclusion : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

   Autre méthode...

   Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $]-1;+\infty[$. La fonction f est une somme de deux fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$, elle l'est donc également et, pour tout $x \in]-1;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$

   Réflexe !

   D'où :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	0	↘	

   Par conséquent : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ f(x) \leqslant 0$.
   Conclusion : pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Petite remarque
Les limites ne sont pas demandées, et ne sont pas nécessaires...

   2.c. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geqslant \ln(n+1)$. Déterminer alors la limite de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question précédente, licite car $\frac{1}{k} \geqslant 0$, on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$$

✓ Rigueur !
On pense à mentionner l'hypothèse donnant le droit d'utiliser la question précédente !

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a établi :
  $$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$$
  En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à n, on obtient :
  $$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
  Autrement dit :
  $$h_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
  Or, on a :
  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \quad \text{RÉFLEXE !} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1)-\ln(k)\big) \quad \text{RÉFLEXE !} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$
  $k, k+1 > 0$

  télescopage

  Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geqslant \ln(n+1)$.

- On sait que :
  ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geqslant \ln(n+1)$,
  ✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

  Conclusion : par théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$.

✍ Rédaction
Je quantifie le k avec "$\forall k \in \ldots$" : c'est une quantification qui n'est valable que sur la ligne en cours. C'est approprié ici, puisque le k devient muet à la ligne suivante.

3. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = h_n - \ln(n) \ \ ; \ \ v_n = h_n - \ln(n+1)$$

3.a. A l'aide du résultat de la question 2.b., établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Inégalité de gauche.**
  Remarquons déjà que :
  $$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
  Or, d'après le résultat de la question 2.b., avec $x = \frac{1}{n+1}$, licite car $\frac{1}{n+1} > -1$ (puisque $n > 0$), on obtient :
  $$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$
  Conclusion :
  $$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

- **Inégalité de droite.**
  Transformons le résultat à obtenir... On a :
  $$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &\iff -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1} \\ &\iff \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

♡ Astuce du chef ! ♡
Je fais ce choix car il n'est pas évident de voir comment utiliser la question 2.b. sinon, quand on ne l'a jamais fait ainsi. C'est une bonne utilisation du raisonnement par équivalences.

Or, d'après le résultat de la question 2.b., avec $x = \dfrac{-1}{n+1}$, licite car $\dfrac{-1}{n+1} > -1$ (puisque $n > 0$), on obtient :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{-1}{n+1}$$

Autrement dit :

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geqslant \frac{-1}{n+1}$$

Par équivalences, on obtient le résultat voulu.
Conclusion :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Petite remarque
On pourrait poursuivre le travail par équivalences en remplaçant $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ par $\ln\left(\dfrac{n+1-1}{n+1}\right)$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

3.b. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers la même limite, notée γ.
Pour cela, démontrons qu'elles sont adjacentes.

Réflexe !
L'énoncé est clair !

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - (h_n - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

question précédente

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= h_{n+1} - \ln(n+2) - (h_n - \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

question précédente

Conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= h_n - \ln(n) - h_n + \ln(n+1) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad \text{Réflexe !} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$$

On a ainsi :

✓ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante
✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

Par conséquent, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Conclusion : les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite, notée γ.

Pour info...
γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.
On a ainsi, pour n suffisamment grand : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \simeq \ln(n) + \gamma$.

3.c. Établir :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = u_n + \ln(n)$$

D'où, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$ (ainsi $\ln(n) \neq 0$) :

$$\frac{h_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1$$

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie, d'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 0$$

Et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} + 1 = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} = 1$.

3.d. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.

- Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et qu'elle converge vers γ, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma$.
- De même, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge vers ℓ, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \gamma$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.

☞ Rappels...

- Une suite croissante et convergente est majorée par sa limite.
- Une suite décroissante et convergente est minorée par sa limite.

3.e. Écrire une fonction `Python` prenant en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoyant en sortie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p (cette fonction pourra utiliser la fonction de la question 1.).

Là encore, deux possibilités.

La première utilise la fonction de la question 1., la seconde non.

```python
import numpy as np

def gamma(p):
    n=1
    u=1
    v=1-np.log(2)
    while abs(u-v)>p:
        n=n+1
        h=suite_h(n)
        u=h-np.log(n)
        v=h-np.log(n+1)
    return v,u

def gamma_bis(p):
    k=1
    S=1
    u=1
    v=1-np.log(2)
    while abs(u-v)>p:
        k=k+1
        S=S+1/k
        u=S-np.log(k)
        v=S-np.log(k+1)
    return v,u
```

Petite remarque

L'avantage de la seconde : moins de calculs pour l'ordinateur... Dans la première, on pourrait aussi avoir `u=suite_h(n)-np.log(n)` et `v=suite_h(n)-np.log(n)`, mais cela ferait calculer deux fois h_n...

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

4.a. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = h_{2n} - h_n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  On a :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Et :

$$h_2 - h_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} - 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

D'où :

$$S_1 = h_2 - h_1$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n = h_{2n} - h_n$ et montrons que $S_{n+1} = h_{2n+2} - h_{n+1}$.
  On a :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= h_{2n} - h_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} && h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1} \\
&= h_{2n} - \left(h_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= h_{2n} - h_{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{2-1}{2n+2} \\
&= h_{2n} - h_{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= h_{2n+2} - h_{n+1}
\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = h_{2n} - h_n$.

4.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
S_n &= h_{2n} - h_n \\
&= u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) && u_n = h_n - \ln(n) \\
&= u_{2n} - u_n + \ln(2n) - \ln(n) \\
&= u_{2n} - u_n + \ln(2)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

4.c. Conclure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.
On a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

Or on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ, c'est donc également le cas de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ (suite extraite). Et ainsi, par opérations sur les limites ($\gamma \neq \infty$, car convergence...) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n = \gamma - \gamma = 0$$

D'où, d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$$

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

☞ **Pour info...**
En fait, c'est également le cas de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, autrement dit de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$...

Exercice 2 - Inspiré d'exercices de concours

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \dfrac{x^2}{2} + x$.

1. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def f(x)` qui prend un réel x en argument d'entrée et renvoie $f(x)$ en sortie.

```python
import numpy as np

def f(x):
    y=np.exp(-x)-x**2/2+x
    return y
```

2. **Étude de f.**

2.a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- En $-\infty$:
  Pour x suffisamment proche de $-\infty$:
  $$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - \frac{x^2}{2\mathrm{e}^{-x}} + \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}\right)$$
  Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2\mathrm{e}^{-x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$.
  D'où, par opérations :
  $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$
- En $+\infty$:
  On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{2} + x = -\infty$... D'où, par opérations :
  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2.b. Dresser le tableau de variations complet de f et étudier sa convexité.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - x + 1 \quad ; \quad f''(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$$
Et :
$$\begin{aligned} f''(x) \geqslant 0 &\iff \mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \\ &\iff -x \geqslant 0 \\ &\iff x \leqslant 0 \end{aligned}$$
stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$

Important !
La **stricte** croissance est nécessaire pour remonter l'équivalence !

D'où le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, puisque le maximum de f' sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en 0, on en déduit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Petite remarque
On aurait aussi pu avoir le signe de $f'(x)$ en utilisant : $\forall y \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^y \geqslant 1 + y$, avec $y = -x$...

Convexité.
On vient d'obtenir le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$...

> **Conclusion :** f est convexe sur $\mathbb{R}^-$, concave sur $\mathbb{R}^+$, et $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion en $(0;1)$.

2.c. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α, dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.

On pose $g : x \longmapsto f(x) - x = \mathrm{e}^{-x} - \dfrac{x^2}{2}$. On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x \iff g(x) = 0$.

✘ Attention !
Ce n'est pas sur f qu'il faut appliquer le théorème de bijection... C'est sur g !

- On sait que :
  - ✓ g est continue sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$,
  - ✓ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto -x$ également. Ainsi, g est une somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$; elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

  Par conséquent, d'après le théorème de bijection, g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Petite remarque
Sinon, on dérive, et on remarque que $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$...

- De plus, puisque $0 \in g(\mathbb{R})$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$; ce qui est donc le cas de l'équation $f(x) = x$. Notons α cette solution.
- Enfin :
  - ∗ $g(0) = 1$, donc $g(0) > 0$.
  - ∗ $g(1) = \mathrm{e}^{-1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$. Mais $\mathrm{e} > 2$, donc $g(1) < 0$.
  - ∗ $g(\alpha) = 0$.

  Ainsi :
  $$g(0) > g(\alpha) > g(1)$$
  Et, par stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}$, on obtient :
  $$0 < \alpha < 1$$

Petite remarque
On a le choix : "désappliquer" la fonction g ; ou appliquer la fonction g^{-1}...

> **Conclusion :** l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution réelle α, et $\alpha \in [0;1]$.

3. **Étude d'une première suite.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
Procédons par récurrence.
- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  Immédiat, car $u_0 = 0$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$
  D'où, puisque f est décroissante sur $[0;1]$:
  $$f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(1)$$
  Or $f(0) = 1$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} + \dfrac{1}{2}$. Ainsi $f(1) \geqslant 0$, et donc, par transitivité :
  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
  L'hérédité est ainsi établie.

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

3.b. Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

➠Réflexe !
$\forall X \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+,$
$|X| \leqslant a \iff -a \leqslant X \leqslant a$

Soit $x \in [0;1]$. Puisque f' est décroissante sur $[0;1]$, on a :
$$f'(0) \geqslant f'(x) \geqslant f'(1)$$
Autrement dit :
$$0 \geqslant f'(x) \geqslant \frac{-1}{\mathrm{e}}$$
Par conséquent :
$$\frac{1}{\mathrm{e}} > 0 \geqslant f'(x) \geqslant \frac{-1}{\mathrm{e}}$$

> **Conclusion :** pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3.c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.
- On sait que :
  - ✓ f est dérivable sur $[0;1]$,
  - ✓ $\forall x \in [0;1],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (question précédente).

  Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :
  $$\forall (x,y) \in [0;1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}|x - y|$$
  Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $x = u_n$ et $y = \alpha$, licite car $u_n \in [0;1]$ (question 3.a.) et $\alpha \in [0;1]$ (question 2.c.), on obtient :
  $$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$$
  Et, d'après la question 2.c., $f(\alpha) = \alpha$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$.

- Procédons ensuite par récurrence.
  - **Initialisation.** Pour $n = 0$:

    On a : $|u_0 - \alpha| = \alpha$. Or, on a vu que $\alpha \in [0;1]$. On a donc bien : $|u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^0$. L'initialisation est vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$ et montrons $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.

    Par hypothèse de récurrence, on a :
    $$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$$
    D'où, en multipliant par $\frac{1}{e} > 0$:
    $$\frac{1}{e}|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$
    Et ainsi d'après le point précédent et par transitivité :
    $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$
    L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

3.d. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

✓ D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

✓ De plus, $\frac{1}{e} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$. Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \alpha = 0$.

✘ Attention !
Tout serait différent si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| \neq 0$: on ne pourrait même pas conclure que (u_n) converge...

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

3.e. Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée à 10^{-10} près de α. *Donnée :* $\ln(10) \simeq 2,303$.

★Subtil...★
On ne demande pas le premier rang à partir duquel c'est le cas...

D'après le résultat de la question 3.c., il suffit de trouver un n à partir duquel $\left(\frac{1}{e}\right)^n < 10^{-10}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{e}\right)^n \leqslant 10^{-10} &\iff n\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leqslant -10\ln(10) && \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\
&\iff -n \leqslant -10\ln(10) \\
&\iff n \geqslant 10\ln(10)
\end{aligned}$$

Conclusion : pour $n \geqslant 24$, on peut affirmer que $|u_n - \alpha| < 10^{-10}$; ce qui répond à la question.

3.f. Créer une fonction `Python` d'en-tête `def u(n):` qui prend n en valeur d'entrée et renvoie u_n en sortie.

```python
def u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=f(u) #où f est la fonction de la question 1
    return u
```

4. Étude d'une seconde suite.

4.a. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1}.

On sait que :

✓ f est continue sur $\mathbb{R}$,

✓ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (question 2.b.)

Ainsi, d'après le théorème de bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
On a également :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations de f^{-1}	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

4.b. Écrire une fonction `Python` nommée `dicho` qui prend la valeur d'un réel strictement positif p en argument d'entrée et renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à p près, à l'aide de l'algorithme de dichotomie.
L'exécution de `dicho(0.01)` *renvoie* $2,11$.

On sait que $f(0) = 1$ et on remarque que $f(3) = \mathrm{e}^{-3} - \dfrac{3}{2} < 0$... D'où :

$$f(0) > 0 > f(3)$$

Et ainsi, par stricte décroissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$0 < f^{-1}(0) < 3$$

Ceci nous permet d'obtenir un premier intervalle sur lequel débuter !

Petite remarque
L'intervalle $[2; 3]$ convenait également...

```python
def dicho(p):
    a=0
    b=3
    while b-a>p:
        m=(a+b)/2
        if f(m)==0: #où f est la fonction de la question 1
            a,b=m,m
        elif f(m)*f(a)<0:
            b=m
        elif f(m)*f(a)>0:
            a=m
    return (a+b)/2
```

4.c. Déduire de la question 4.a. que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre, noté x_n, tel que $f(x_n) = \dfrac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $\dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}$ et que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique antécédent à $\dfrac{1}{n}$ par f, noté x_n.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel x_n tel que $f(x_n) = \dfrac{1}{n}$.

4.d. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0; 3]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $f(x_n) = \dfrac{1}{n}$, donc $f(x_n) \in]0; 1]$,
- $f(0) = 1$,
- $f(3) < 0$.

D'où par transitivité :

$$f(0) > f(x_n) > f(3)$$

Et par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$0 < x_n < 3$$

Petite remarque
Autre argument possible : "stricte décroissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$".

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0; 3]$.

4.e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer x_n en fonction de n et f^{-1}.

On a $f(x_n) = \dfrac{1}{n}$, et comme f est bijective : $x_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

4.f. En déduire les variations et la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$n \leqslant n+1$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, licite car $n, n+1 > 0$:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$$

Puis, par décroissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Autrement dit :

$$x_n \leqslant x_{n+1}$$

Conclusion : la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et que f^{-1} est continue en 0, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = f^{-1}(0)$.

Important !

La continuité de f garantit que l'on peut "faire rentrer la limite à l'intérieur de f".

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = f^{-1}(0) \simeq 2,11$.

Pourquoi ?

`dicho(0.01)` renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à 10^{-2} près.

Exercice 3 - Inspiré d'exercices de concours

On considère la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Partie A. Étude de f.

1. Étudier la parité de f.
   $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$ et $f(-1) = -\mathrm{e}^{1}$. Par conséquent :
   - $f(-1) \neq f(1)$: f n'est pas paire ;
   - $f(-1) \neq -f(1)$: f n'est pas impaire.

   Conclusion : f n'est ni paire ni impaire.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.

   - En $-\infty$:
     On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-1/x} = 1$.
     D'où, par opérations :
     $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$
   - En 0, à gauche :
     ✓ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{-1}{x} = +\infty$,
     ✓ par croissances comparées : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{-X} = -\infty$.
     Ainsi, par composition :
     $$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x\mathrm{e}^{-1/x} = -\infty}$$
   - En 0, à droite :
     On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{-1}{x} = -\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \mathrm{e}^{-1/x} = 0$.
     D'où par opérations :
     $$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0}$$
   - En $+\infty$:
     On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-1/x} = 1$.
     D'où, par opérations :
     $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

   Conclusion : $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote "verticale" d'équation $x = 0$, en 0 à gauche.

3. 3.a. Rappeler $\lim\limits_{X\to0} \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X}$.
   $\lim\limits_{X\to0} \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X} = 1$.

   3.b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x)$
   - En $+\infty$:
     Soit x suffisamment proche de $+\infty$. On a :
     $$\begin{aligned} f(x) - x &= x\mathrm{e}^{-1/x} - x \\ &= x\left(\mathrm{e}^{-1/x} - 1\right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-1/x} - 1}{\frac{-1}{x}} \end{aligned}$$
     Or :
     ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$,
     ✓ $\lim\limits_{X\to0} \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X} = 1$.
     Donc, par composition :
     $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/x} - 1}{\frac{-1}{x}} = 1$$

✍ Rédaction
On veillera à bien soigner la rédaction des compositions de limites faisant apparaître des limites usuelles de ce type ou des croissances comparées.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=-1$.

- En $-\infty$:
  On procède de la même façon, pour obtenir le même résultat.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-x\big)=-1$.

3.c. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une droite asymptote aux voisinages de $\pm\infty$.
De la question précédente, on déduit :

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-1)\big)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x-1)\big)=0$$

Conclusion : la droite d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe de f aux voisinages de $\pm\infty$.

4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^*$.
Posons $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \dfrac{-1}{x}$ de sorte que $f = u \times \exp\circ v$.
v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc $\exp\circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, f, étant un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, est également dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-1/x} + x\times\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x} \\ &= \mathrm{e}^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-1/x}\frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

Réflexe !

On obtient ainsi directement :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
variations de f	$-\infty$	↗	$-\mathrm{e}$	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

Réflexe !
On vérifie la cohérence du tableau...

5. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x)$.
Soit $x>0$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1+\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{1/x}} \end{aligned}$$

Or :

✓ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$,

✓ $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1+X}{\mathrm{e}^X} == \lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^X}+\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}\right)=0$ par croissances comparées et opérations.

Par composition :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1+\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{1/x}}=0$$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x)=0$.

Interprétation
Graphiquement, la courbe de f admet en quelque sorte une demi-tangente horizontale en 0, à droite (en quelque sorte, car f n'est pas définie en 0...).

6. 6.a. Établir : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x)<1$.
On a : $f' : x \longmapsto e^{-1/x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}e^{-1/x} \\ &= \mathrm{e}^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^3} \end{aligned}$$

On en déduit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	‖	$+$	
variations de f'	1	↘	$\dots$ ‖ 0	↗	1

Les limites étant obtenues par opérations...
Ce tableau de variations permet bien d'obtenir le résultat voulu.

Petite remarque
La limite en 0 à gauche n'est pas utile pour conclure... Tout comme celle en 0 à droite, mais on l'avait déjà obtenue à la question 5.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 1$.

6.b. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.
Pour cela, posons $g : x \longmapsto f(x) - (x-1)$ et étudions son signe.
Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, g l'est également et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = f'(x) - 1$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) < 0$$

Et comme la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ aux voisinages de $\pm\infty$, on a :

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$$

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	‖	$-$	
variations de g	0	↘	$\dots$ ‖ $\dots$	↘	0

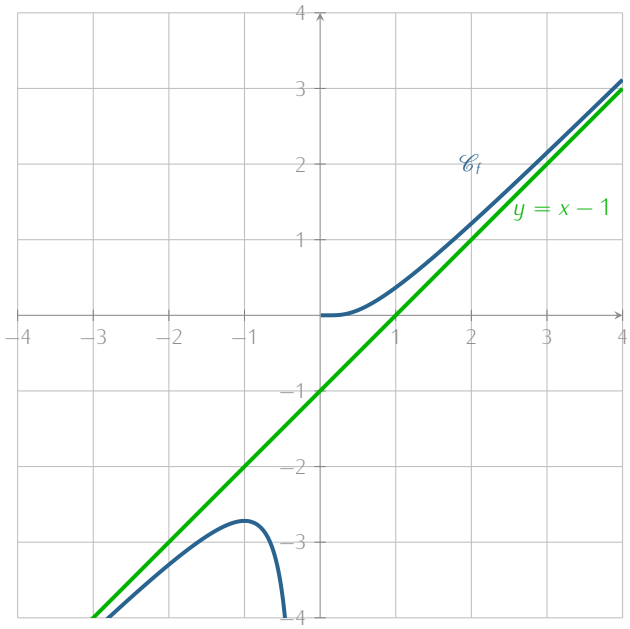
Petite remarque
Là encore, les limites de g en 0 à gauche et droite ne sont pas nécessaires ; mais puisqu'on a celles de f, on aurait facilement : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = 1$.

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[,\ g(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in]0; +\infty[,\ g(x) > 0$$

Conclusion : $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x - 1$ sur $]0; +\infty[$;
$\mathscr{C}_f$ est au-dessous de la droite d'équation $y = x - 1$ sur $]-\infty; 0[$;
$\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x - 1$ n'ont aucun point d'intersection.

7. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *On veillera à faire figurer toutes les informations établies précédemment permettant d'obtenir la courbe la plus précise possible.*



Petite remarque
Sont visibles :
- Tangente horizontale en $x = -1$.
- "demi-tangente horizontale" en $x = 0$, à droite.
- Asymptote en $x = 0$, à gauche.
- Asymptote en $\pm\infty$.

Partie B. Étude d'une suite.

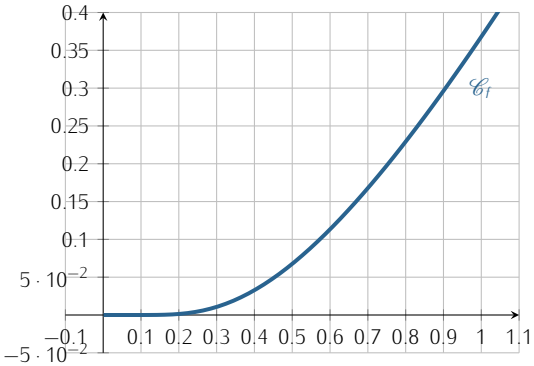
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

8. Écrire une fonction **Python**, nommée u, qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.

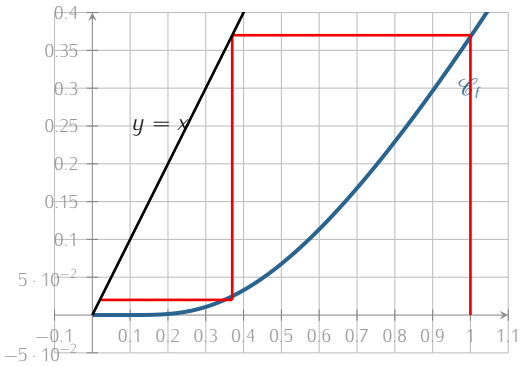
```python
import numpy as np
def u(n):
    U=1
    for k in range(1,n+1):
        U=U*np.exp(-1/U)
    return U
```

☞ Pour info...
`u(3)` renvoie environ 3×10^{-20}...

9. Représenter les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphique ci-dessous, sur lequel la courbe de la fonction f est représentée. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?



Le graphique :



✘ Attention !
Le repère n'est pas normé !

On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle.

10. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.
Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  u_0 existe et $u_0 = 1 \in]0;1]$. L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n \in]0;1]$" et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in]0;1]$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$; donc $f(u_n)$ existe puisque f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
    Autrement dit : u_{n+1} existe.
  - Également : $u_{n+1} = u_n e^{-1/u_n}$; et comme, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, on a aussi $u_{n+1} > 0$.
  - Enfin, par hypothèse de récurrence :
    $$0 < u_n \leqslant 1$$
    Puis, par croissance de f est $\mathbb{R}_*^+$, on a :
    $$f(u_n) \leqslant f(1)$$
    Autrement dit :
    $$u_{n+1} \leqslant e^{-1}$$
    Puisque $e^{-1} \leqslant 1$, on obtient par transitivité :
    $$u_{n+1} \leqslant 1$$

✘ Attention !
$f(0)$ n'existe pas !
On écrit $0 < u_n \leqslant 1$ pour rappeler que l'on utilise les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$ (et même $]0;1]$) seulement.

Finalement : "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in]0;1]$". L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.

11. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(\mathrm{e}^{-1/u_n} - 1\right)$$

Or, d'après la question précédente $u_n > 0$. On a ainsi :

$$-\frac{1}{u_n} < 0$$

Et par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-1/u_n} < 1$$

Par conséquent :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

12. 12.a. Établir : $\forall x \in]0;1],\ f(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$.

Transformons le résultat à établir... Soit $x \in]0;1]$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x &\iff x\mathrm{e}^{-1/x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x \\ &\iff \mathrm{e}^{-1/x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &\iff \mathrm{e}^{-1/x} \leqslant \mathrm{e}^{-1} \\ &\iff -\frac{1}{x} \leqslant -1 \\ &\iff \frac{1}{x} \geqslant 1 \end{aligned}$$

car x>0

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$

Or $x \in]0;1]$, donc la dernière inégalité est vraie (décroissance de la fonction inverse sur $]0;1]$) ; par équivalence, l'inégalité initiale est ainsi également vraie.

Petite remarque

On aurait aussi pu travailler sur $f(x) - \frac{1}{\mathrm{e}}x$ (et c'est d'ailleurs très proche de ce qui a été fait en question précédente...), mais il est important de rédiger de cette façon parfois afin de comprendre quand et comment le faire.

Conclusion : $\forall x \in]0;1],\ f(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}x$.

12.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^0 = 1$; par conséquent, $u_0 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^0$. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$u_n \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$$
  D'où, puisque $\frac{1}{\mathrm{e}} > 0$:
  $$\frac{1}{\mathrm{e}}u_n \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$
  Mais $u_n \in]0;1]$ d'après la question 3, donc, d'après la question précédente :
  $$f(u_n) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}u_n$$
  Par transitivité, on a ainsi :
  $$f(u_n) \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$$
  Autrement dit :
  $$u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$$
  L'hérédité est établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.

12.c. Conclure sur l'existence et la valeur de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a :

✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$

✓ $\frac{1}{e} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

12.d. Résoudre l'inéquation $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leqslant 10^{-20}$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, puis interpréter le résultat obtenu. *Donnée :* $20\ln(10) \simeq 46,05$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{e}\right)^n \leqslant 10^{-20} &\iff n\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leqslant -20\ln(10) \qquad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+\\ &\iff -n \leqslant -20\ln(10)\\ &\iff n \geqslant 20\ln(10)\end{aligned}$$

Conclusion : $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leqslant 10^{-20}$ lorsque $n \geqslant 20\ln(10)$.

Petite remarque
Puisque $20\ln(10)$ n'est pas entier, on peut aussi dire "lorsque $n \geqslant \lfloor 20\ln(10)\rfloor + 1$".

- Interprétation :

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Ainsi, d'après ce qui précède (et par transitivité) :

$$\forall n \geqslant 20\ln(10),\ u_n \leqslant 10^{-20}$$

Conclusion : on peut affirmer que pour tout $n \geqslant 47$, $u_n \leqslant 10^{-20}$.

12.e. Le programme suivant (dans lequel `u` est la fonction `Python` définie à la question 8.) affiche la valeur 4. Interpréter cette valeur et la comparer avec celle obtenue à la question précédente.

```
n=0
while u(n)>10**(-20):
    n=n+1
print(n)
```

On peut déjà dire que le programme s'arrêtera forcément, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Il existe donc un rang à partir duquel u_n est toujours inférieur ou égal à 10^{-20}.
Ici, 4 est d'ailleurs le premier rang à partir duquel c'est vrai.
Comparaison avec la valeur précédente : il est naturel de trouver une valeur inférieure à la question précédente ; puisque dans la question précédente, nous avions utilisé une majoration de u_n (établie à la question 12.b.) pour obtenir cette information.

☞ Pour info...
On peut cependant s'interroger sur l'écart important entre le résultat obtenu par majoration et le résultat réel...
En fait, la suite (u_n) converge très vite vers 0. En effet, au 4ème terme, l'écart avec 0 est déjà inférieur à 10^{-20}. Cela est dû au fait que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x) = 0$. On dit que le point fixe 0 (car on peut prolonger f par continuité à droite en 0 en posant $f(0) = 0$) est ici **super attractif**.

13. Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Petite remarque
On peut remplacer toute la question 13. par : "Démontrer que la série de terme général u_n est convergente."

13.a. Étudier les variations de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\\ &= u_{n+1}\end{aligned}$$

Or $u_{n+1} > 0$...

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

13.b. A l'aide du résultat établi à la question 12.b. démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On avait obtenu, à la question 12.b. :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \leqslant (e^{-1})^k$$

D'où, en sommant sur $[\![0;n]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} (e^{-1})^n$$

➠Réflexe !
Pour majorer une somme, on majore son terme général...

Or $e^{-1} \neq 1$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(e^{-1})^n &= \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}\\ &= \frac{e-e^{-n}}{e-1}\\ &= \frac{e}{e-1}-\frac{e^{-n}}{e-1}\end{aligned}$$

Or $\dfrac{e^{-n}}{e-1} > 0$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n}(e^{-1})^n \leqslant \frac{e}{e-1}$$

✘ Attention !
la quantité $\dfrac{e-e^{-n}}{e-1}$ ne peut pas être un majorant de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisqu'elle dépend de n...

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par $\dfrac{e}{e-1}$).

13.c. Que peut-on en déduire ?

Étant croissante et majorée, le théorème de convergence monotone permet d'obtenir que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

✘ Attention !
$\dfrac{e}{e-1}$ est un majorant de (S_n), mais n'est pas sa limite ! Il est d'ailleurs très probable qu'il nous soit impossible de déterminer explicitement sa limite...

Exercice 4 - EDHEC 2013 E

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. 1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Procédons par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 0$, donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
  Par hypothèse de récurrence :
  $$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$
  Ainsi, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ (nous sommes ici sur $[0;1]$) :
  $$0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1$$
  D'où :
  $$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
  Et par transitivité :
  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

1.b. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2+1}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n^2+1-2u_n}{2} \\ &= \frac{(u_n-1)^2}{2} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

RÉFLEXE !

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

1.c. Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

- D'après les questions précédentes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 1). Donc, par théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
  Et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 0 et 1, on a $\ell \in [0;1]$.
- Ensuite, on sait que :
  - ✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$,
  - ✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

  D'où, en passant à la limite dans la relation de récurrence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  $$\ell = \frac{\ell^2+1}{2}$$
  Or :
  $$\begin{aligned} \ell = \frac{\ell^2+1}{2} &\iff 2\ell = \ell^2+1 \\ &\iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \\ &\iff (\ell-1)^2 = 0 \\ &\iff \ell = 1 \end{aligned}$$
  Par conséquent : $\ell = 1$.

Rappel...
SI :
✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$
✓ (u_n) converge vers ℓ
✓ f est continue en ℓ
ALORS : $f(\ell) = \ell$.

Rédaction
On établit l'équation vérifiée par ℓ ; puis on résout cette équation.
La rédaction est en deux temps !

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

2. 2.a. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.

```python
def suite_u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=(u**2+1)/2
    return u
```

2.b. En déduire un programme, rédigé en `Python`, qui permet de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

```python
n=0
while 1-suite_u(n)>10**(-3):
    n=n+1
print(n)
```

Petite remarque

L'exécution de ce programme affiche 1991 : la convergence est lente !

Autre proposition

L'énoncé a guidé ainsi, mais on pourrait également écrire un programme permettant de répondre à cette question sans utiliser la précédente :

```python
u=0
n=0
while 1-u>10**(-3):
    u=(u**2+1)/2
    n=n+1
print(n)
```

Cette solution a l'avantage d'être moins coûteuse en calculs. En effet, avec les deux algorithmes précédents, pour tout $n \in [\![1; 1991]\!]$, le calcul de u_n nécessite de recalculer tous les u_k, pour $k \in [\![1; n]\!]$...

3. On définit maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - u_n$.

3.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1})$.

Simple télescopage...

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) &= v_0 - v_{n+1}\\ &= 1 - u_0 - (1 - u_{n+1})\\ &= u_{n+1} - u_0\\ &= u_{n+1}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = u_{n+1}$.

3.b. Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}v_k - v_{k+1} &= 1 - u_k - (1 - u_{k+1})\\ &= u_{k+1} - u_k\\ &= \frac{(u_k - 1)^2}{2}\\ &= \frac{v_k^2}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ v_k - v_{k+1} = \dfrac{v_k^2}{2}$.

3.c. Montrer alors que la série $\sum v_n^2$ est convergente et donner la valeur de sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

On a, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} v_k^2 &= 2\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1})\\ &= 2u_{n+1}\end{aligned}$$

d'après la question 3.a.

Or, d'après la question 1.c., la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} v_k^2 = 2$.

Conclusion : la série $\sum v_n^2$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2$.

Exercice 5 - EDHEC 2020 E

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Justifier, pour tout entier naturel n, l'existence de I_n et J_n.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ sont continues sur le segment $[0;1]$, comme quotient de fonctions continues sur $[0;1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales I_n et J_n existent.

2. Calculer I_0 et I_1.

   ✓ **Rigueur !** On veut voir le mot "**segment**".

   - $$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx \\ &= \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   - $$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x-1}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

     point précédent

     Petite remarque Plutôt que d'utiliser cette astuce, on aurait aussi pu effectuer le changement de variable $t = 1+x$; ou même procéder par IPP.

3. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

   $$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2}dx \end{aligned}$$

   linéarité de l'intégrale

   ✍ **Rédaction** Cette question doit être parfaitement justifiée !! En particulier, on mentionne la "linéarité de l'intégrale" et "la croissance de l'intégrale, avec bornes dans l'ordre croissant". C'est la première fois qu'elles apparaissent, on fait donc un effort !

   Or, pour tout $x \in [0;1]$:

   $$x^n \geqslant 0 \quad ; \quad ; x-1 \leqslant 0 \quad ; \quad (1+x)^2 > 0$$

   D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$:

   $$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2}dx \leqslant 0$$

   Conclusion : la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. 4.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

   $$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}dx + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 x^n \frac{x^2+2x+1}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   linéarité de l'intégrale

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   4.b. En déduire I_2.

   D'après le résultat précédent, on obtient $I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$. Puis on utilise les résultats de la question 2....

Conclusion : $I_2 = \dfrac{3}{2} - 2\ln(2)$.

5. 5.a. A l'aide de la relation établie à la question 4.a., écrire une fonction **Python** d'en-tête `def I(n):` qui renvoie la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

```
1  import numpy as np
2
3  def I(n):
4      if n==0:
5          return 1/2
6      if n==1:
7          return np.log(2)-1/2
8      else:
9          i=1/2
10         j=np.log(2)-1/2
11         for k in range(2,n+1):
12             i,j=j, 1/(k-1)-2*j-i
13         return j
```

♡ **Astuce du chef !** ♡

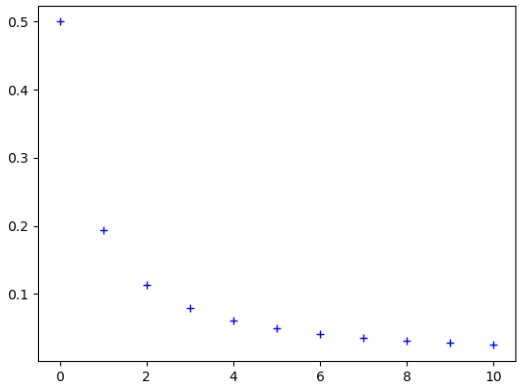
En ligne 11, `k` désigne le rang du terme calculé... Et la relation de récurrence de la question 4.a. fournit :

$\forall k \geqslant 2,\ I_k = 2I_{k-1} - I_{k-2} + \dfrac{1}{k-1}$

5.b. On considère le programme suivant :

```
Labs = ................
Lord = ................
plt.plot(Labs,Lord,'b+')
plt.show()
```

Recopier et compléter les lignes de ce programme, de sorte que son exécution permette d'obtenir le graphique suivant, sur lequel les termes d'indices 0 à 10 de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont représentés.




```
L1 : Labs=range(0,11)
L2 : Lord=[I(n) for n in Labs]
```

5.c. On considère la fonction **Python** suivante, dans laquelle on utilise la fonction créée à la question 5.a..

```
def seuil(p):
    n=0
    while I(n)>p:
        n=n+1
    return n
```

Que faudrait-il démontrer sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour toute valeur strictement positive de p ?

Le programme permet d'obtenir le premier rang à partir duquel u_n devient inférieur ou égale à p ; par conséquent, le programme s'arrête si I_n devient inférieur ou égal à p à un certain moment...

Conclusion : pour s'assurer que la boucle `while` s'arrête pour chaque valeur strictement positive de p, il faudrait démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

➠ **Réflexe !**

Pour encadrer une intégrale, on commence par encadrer l'intégrande...

* Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$1 + x \geqslant 1$$

D'où, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$$(1+x)^2 \geqslant 1$$

Et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1$$

Puis, du fait que $x^n \geqslant 0$:

$$\frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$$

Or, $x^n \geqslant 0$ et $(1+x)^2 > 0$, d'où :

$$0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$$

* On a ainsi établi :

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$$

Par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0;1]$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

- On a :
  - ✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
  - ✓ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

☞ **Rappel...**

La conclusion du théorème d'encadrement est "(I_n) converge et sa limite est 0" ; il n'est donc pas nécessaire de mentionner le théorème de convergence monotone (ça démontre un manque de recul, et plus généralement, le théorème d'encadrement permet justement parfois de conclure alors que la suite n'est pas monotone !).

7. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$; $J_{n-1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$.

Posons : $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto x^n \\ v : x \longmapsto \dfrac{-1}{1+x} \end{array} \right.$.

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left| \begin{array}{l} u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \end{array} \right.$.

Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[x^n \times \frac{-1}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} \times \frac{-1}{1+x}dx \\ &= \frac{-1}{2} + n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx \\ &= nJ_{n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

✓ **Rigueur !**

Ne pas oublier la seule hypothèse pour l'IPP : les fonctions doivent être de classe $\mathscr{C}^1$ sur le **segment** d'intégration.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

8. 8.a. Calculer J_0 puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} + J_n$ en fonction de n.

-

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \\ &= \big[\ln(1+x)\big]_0^1 \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} + J_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

linéarité de l'intégrale

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} + J_n = \dfrac{1}{n+1}$.

8.b. En déduire J_1.
D'après la question précédente :

$$J_1 + J_0 = 1$$

or $J_0 = \ln(2)$...

Conclusion : $J_1 = 1 - \ln(2)$.

9. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} (-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) &= (-1)^1 \left(\ln(2) - \frac{(-1)^0}{1}\right) \\ &= -(\ln(2) - 1) \\ &= 1 - \ln(2) \\ &= J_1 \end{aligned}$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $J_n = J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ et montrons que $J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.
On a, d'après la question 8.a. :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= -J_n + \frac{1}{n+1} \\ &= -(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n}}{n+1}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence

$(-1)^{n+1} \times (-1)^{n+1} = (-1)^{2n+2} = 1$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in N^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

10. 10.a. Utiliser les résultats des questions 6. et 7. pour justifier que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
De la question 7., on déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \dfrac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1}$.
Et d'après la question 6. : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Ainsi, par opération, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Conclusion : la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Petite remarque
On peut également justifier de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0$, puis conclure.

10.b. En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ puis donner la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

D'après ce qui précède et le résultat de la question **9.** :

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = 0$$

D'où, par continuité de la fonction valeur absolue en 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right| = 0$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right| &= \left|(-1)^n\right| \left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \\ &= \left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 0$$

☞ Rappel...
$\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$
Mais l'implication $\boxed{\Longrightarrow}$ est fausse si la limite est autre que 0...

Et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

Conclusion : la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

10.c. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$.

On a, d'après la question **7.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} nJ_n &= \frac{n(I_{n+1} + \frac{1}{2})}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}\left(I_{n+1} + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Or :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

D'où, par opération : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left(I_{n+1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$.

☞ Pour info...
On en déduit : $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Exercice 6 - Ecricome 2005 E

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto (1-x)^n e^{-2x}$ ainsi que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
Le but de l'exercice est de montrer l'existence de trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n)$ est une expression dépendant de n telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et donner son signe.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - La fonction f_n est continue sur le segment $[0;1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ est bien définie.
   - On a : $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) \geqslant 0$.
     D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$: $I_n \geqslant 0$.

   ✓ **Rigueur !** On veut voir le mot "**segment**".

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et $I_n \geqslant 0$.

2. Calculer I_0.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f_0(x)dx \\ &= \int_0^1 e^{-2x}dx \\ &= \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1-e^{-2}}{2} \end{aligned}$$

   ➠ **Réflexe !** On vérifie la cohérence du signe...

3. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)dx - \int_0^1 f_n(x)dx \\ &= \int_0^1 f_{n+1}(x) - f_n(x)dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}(1-x-1)dx \\ &= \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x}dx \end{aligned}$$

   linéarité de l'intégale

   Or, pour tout $x \in [0;1]$:

$$-x \leqslant 0 \quad ; \quad (1-x)^n \geqslant 0 \quad ; \quad e^{-2x} > 0$$

   D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0;1]$, on obtient :

$$\int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x}dx \leqslant 0$$

   Autrement dit :

$$I_{n+1} - I_n \leqslant 0$$

   Conclusion : la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Que peut-on en déduire ?
   D'après les questions précédentes, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.

   Conclusion : d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   ➠ **Réflexe !** Pour encadrer une intégrale, on commence par encadrer l'intégrande...

- Soit $x \in [0;1]$. On a :
$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$$
D'où, puisque $(1-x)^n \geqslant 0$:
$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-2x}(1-x)^n \leqslant (1-x)^n$$
- On a ainsi établi :
$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant (1-x)^n$$
Et par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$, on obtient :
$$I_n \leqslant \int_0^1 (1-x)^n dx$$

Or :
$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x)^n dx &= \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Petite remarque
On peut également effectuer le changement de variable $t = 1-x$ pour se rendre compte que $\int_0^1 (1-x)^n dx = \int_0^1 t^n dt$...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

6. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a :
✓ d'après les questions 1. et 5. : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

7. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1}\mathrm{e}^{-2x} dx$.
Posons : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto (1-x)^{n+1} \\ v : x \longmapsto \dfrac{-1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{array}\right.$.
Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left|\begin{array}{l} u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \end{array}\right.$.
Par intégration par parties, on a alors :
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{-1}{2}(1-x)^{n+1}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n \frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$.

8. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
D'après la question précédente, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - nI_n - I_n$$
Autrement dit :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n$$
Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ également.
Et ainsi, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$.

9. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(n(nI_n - 1)\big)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On reprend ce qui a été obtenu dans la question précédente :

$$nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n$$

Et donc :

$$nI_n - 1 = -2I_{n+1} - I_n$$

Ce qui donne :

$$n(nI_n - 1) = -2nI_{n+1} - nI_n$$

Or :

$$\begin{aligned} -2nI_{n+1} &= -2(n+1-1)I_{n+1} \\ &= -2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1} \end{aligned}$$

D'où :

$$n(nI_n - 1) = -2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1} - nI_n$$

On passe ensuite à la limite, en utilisant le résultat de la question précédente !

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(nI_n - 1) = -3$.

✘ Attention !

$\lim\limits_{N\to+\infty} NI_N = 1$; mais *a priori*, $\lim\limits_{N\to+\infty} NI_{N+1} \neq \lim\limits_{N\to+\infty} NI_N$...
Attention quand on compose des limites !
Dans le même genre, on sait que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} \neq 1$ (même si $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x}-1}{x} = 1$)...

10. Donner alors les valeurs de a, b, c.

D'après la question précédente, il existe donc une fonction ε_1 telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_1(n) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(nI_n - 1) = -3 + \varepsilon_1(n)$.
Ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{\varepsilon_1(n)}{n^2}$$

On reconnaît alors la forme donnée dans l'énoncé, avec $\varepsilon(n) = \varepsilon_1(n)$.

Conclusion : $a = 0$, $b = 1$ et $c = -3$.

☞ Pour info...

On dit que l'on a obtenu un développement asymptotique de (I_n).

Exercice 7 - EDHEC 2022 E

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}dx$.

1. Calculer u_1.

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx \\ &= \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}dx \\ &= \left[x - \ln(|x+1|)\right]_0^1 \\ &= 1 - \ln(2) \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0;1]$.
La fonction f_n est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[0;1]$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$ (car $n > 0$). Par conséquent, f_n est dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout $x \in [0;1]$:

$$f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2}$$

D'où :

x	0		1
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{n+1}$

3. 3.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Réflexe !
L'encadrement d'une intégrale vient toujours d'un encadrement de l'intégrande... Et avant de se lancer dans l'inconnu, on regarde sur les questions précédentes peuvent nous aider !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le tableau de la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'où, puisque $n > 0$:

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant \frac{x}{n(x+n)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 \geqslant 0$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0;1]$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)}dx$$

Autrement dit :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

- Or $n(n+1) = n^2 + n$, et comme $n > 0$, on a :

$$n(n+1) \geqslant n^2$$

Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, licite car $n^2, n(n+1) \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Par transitivité :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

3.b. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$. *On note* $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

On sait que :

✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$,

✓ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car d'exposant 2.

Conclusion : par critère de comparaison (par inégalités) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

✘ Attention !
ON NE SOMME PAS ! Le critère consiste à comparer les termes généraux.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

4.a. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leqslant \gamma$.

Pourquoi ?
On pense à procéder ainsi, puisque γ est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$...

- D'après la question précédente, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente de somme égale à γ ; autrement dit, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.
- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= u_{n+1} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

question 3.a.

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Par conséquent, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ.

☞ Rappels...
- Une suite croissante qui converge vers ℓ est majorée par ℓ.
- Une suite décroissante qui converge vers ℓ est minorée par ℓ.

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par γ. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leqslant \gamma$.

4.b. Déterminer les deux réels a, b tels que pour tout $x \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{x+k}$.

On remarque que : $\forall x \in [0;1],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x+k}$.

♡ Astuce du chef ! ♡
En fait, on l'a fait dans le cas où $k = 1$ à la question 1.... Et comme les réels a et b sont indépendants de k (d'après la formulation de la question)... Vous voyez où je veux en venir...

Conclusion : $a = 1$ et $b = -1$ et : $\forall x \in [0;1],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x+k}$

4.c. Établir alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k}\,dx \\ &= \frac{1}{k} - \big[\ln(|x+k|)\big]_0^1 \\ &= \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \end{aligned}$$

question précédente et linéarité de l'intégrale

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

4.d. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(1) \end{aligned}$$

question précédente

linéarité de la somme

télescopage

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

5.a. Justifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n+1) \\ &= S_n + \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= S_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or :

- $\lim_{n\to+\infty} S_n = \gamma$,
- $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et ln est continue en 1, donc : $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$.

Conclusion : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

5.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $[n; n+1]$ (car $[n; n+1] \subset \mathbb{R}_*^+$), on a :

$$\forall x \in [n; n+1],\ \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

  Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $n+1 \geqslant n$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$$

  Autrement dit :

$$\frac{n+1-1}{n+1} \leqslant \left[\ln(|x|)\right]_n^{n+1} \leqslant \frac{n+1-1}{n}$$

  D'où :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Petite remarque
Il est également possible de démontrer ce résultat en utilisant l'IAF appliquée à la fonction ln sur le segment $[n; n+1]$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) && \text{télescopage} \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &\leqslant 0 && \text{résultat précédent} \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n.

Puisque $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ, elle est minorée par γ. Puis, en utilisant le résultat de la question **4.a.**, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leqslant \gamma \leqslant T_n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leqslant \gamma \leqslant T_n$.

7. On considère la fonction `Python` définie ci-dessous :

```python
import numpy as np
def gamma(p):
    n=1
    while np.log(1+1/n)>p:
        n=n+1
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    S=sum(L)-np.log(n+1)
    T=sum(L)-np.log(n)
    return S,T
```

L'exécution de la commande `gamma(10**(-3))` renvoie : `(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)`. Interpréter ce résultat en justifiant soigneusement la réponse.

Le résultat de la question **4.d.** et la définition de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nous permettent d'affirmer que la fonction renvoie, pour un certain n, les valeurs S_n et T_n.

Par conséquent, d'après le résultat de la question **6.**, la fonction renvoie un encadrement de γ.

Ensuite, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} T_n - S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

La fonction renvoie donc les valeurs de S_n et T_n dès que $T_n - S_n$ devient inférieur ou égal à p.

Par conséquent : la fonction renvoie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p.

Conclusion : `(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)` est un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.

Petite remarque

On pourrait aussi dire que 0,5767160812351229 est une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de γ et 0,5777155815682065 en est une valeur approchée par excès.

Exercice 8 - Inspiré de EML 2018 E

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f.

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
   - Par opération :
   $$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$$
   - Pour tout x suffisamment proche de $+\infty$:
   $$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$
   Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
   D'où, par opération :
   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$
   - f est une somme de deux fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, elle l'est donc également et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$
   RÉFLEXE !
   - On obtient ainsi :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, notées a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
   - **Sur $]0;1[$:**
     - ✓ f est continue sur $]0;1[$ (car dérivable)
     - ✓ f est strictement décroissante sur $]0;1[$

     Par théorème de bijection, f est bijective de $]0;1[$ dans $f(]0;1[) =]1;+\infty[$.
     Or $2 \in]1;+\infty[$.
     Par conséquent, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur $]0;1[$, notée a.
   - **Sur $]1;+\infty[$:**
     De même, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur $]1;+\infty[$, notée b.

Conclusion : l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions, notées a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

✘ Attention !
Si le théorème de bijection a été appliqué sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, il ne faut pas oublier d'écrire que $f(1) \neq 2$ pour conclure sur "$a < 1 < b$"...

3. Établir : $b \in [3;4]$.
   On a :
   - $f(3) = 3 - \ln(3)$. Or $3 \geqslant e$, donc, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$: $\ln(3) \geqslant 1$. D'où : $3 - \ln(3) \leqslant 2$. Ainsi :
   $$f(3) \leqslant 2$$
   - $f(4) = 4 - \ln(4) = 2(2 - \ln(2))$. Or $2 \leqslant e$, donc $\ln(2) \leqslant 1$. D'où : $2 - \ln(2) \geqslant 1$, et ainsi :
   $$f(4) \geqslant 2$$

   Puisque $f(b) = 2$, on obtient :
   $$f(3) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$$
   Et f étant strictement croissante sur $[3;4]$:
   $$3 \leqslant b \leqslant 4$$

✓ Rigueur !
Attention aux bijections réciproques de f ici... Il y en a 2 : une sur $]0;1]$ et une autre sur $[1;+\infty[$. On préfère donc l'argument de stricte croissance portant sur f sur l'intervalle $[3;4]$ plutôt que sur la bijection réciproque de la restriction de f à $[1;+\infty[$...

Conclusion : $b \in [3;4]$.

4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de `approx_b(p):` renvoie une valeur approchée de b à p près, où p est un réel strictement positif, obtenue par la méthode de dichotomie.

```
import numpy as np

def f(x):
    return ......
def approx_b(p):
    x1,x2=3,4
    while ......:
        m=......
        if f(m)==2:
            ......
        elif f(m)<2:
            ......
        else:
            ......
    return ......
```

Le voici, complet :

```
import numpy as np

def f(x):
    return x-np.log(x)
def approx_b(p):
    x1,x2=3,4
    while x2-x1>p:
        m=(x1+x2)/2
        if f(m)==2:
            x1,x2=m,m
        elif f(m)<2:
            x1=m
        else:
            x2=m
    return (x1+x2)/2
```

Important !
A savoir compléter correctement sans hésiter !

Partie II : Étude d'une suite

On définit maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant b$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     u_0 existe et $u_0 = 4 \geqslant b$ d'après la question 3.. L'initialisation est ainsi vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n \geqslant b$", et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geqslant b$".
     * Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geqslant b$. Or, d'après la question 3., $b \geqslant 3$.
       Par conséquent $u_n > 0$ et ainsi, $\ln(u_n)$ existe. Autrement dit, u_{n+1} existe.
     * De plus, par hypothèse de récurrence :
       $$u_n \geqslant b$$
       D'où, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$ $(b > 0)$:
       $$\ln(u_n) \geqslant \ln(b)$$
       Et ainsi :
       $$u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2$$
       Or on sait que $f(b) = 2$, donc :
       $$b - \ln(b) = 2$$
       D'où :
       $$\ln(b) + 2 = b$$
       On obtient finalement :
       $$u_{n+1} \geqslant b$$
       L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant b$.

6. Déterminer alors la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$

Or on sait que $u_n \geqslant b$ et que f est croissante sur $[b; +\infty[$. D'où :

$$f(u_n) \geqslant f(b) = 2$$

Par conséquent :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par b). Par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geqslant b$.

Petite remarque
On a même $\ell \in [2; 4]$, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme.

- On a ensuite :
  - ✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$,
  - ✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ,
  - ✓ $x \longmapsto \ln(x) + 2$ est continue en ℓ, car $\ell > 0$.

D'où :

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

☞ Rappel...
SI :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$
- (u_n) converge vers ℓ
- g est continue en ℓ

ALORS : $g(\ell) = \ell$.

Or :

$$\begin{aligned} \ell = \ln(\ell) + 2 &\iff \ell - \ln(\ell) = 2 \\ &\iff f(\ell) = 2 \\ &\iff \ell = b \end{aligned}$$

$\ell > 1$ et b est l'unique solution de $f(x) = 2$ sur $]1; +\infty[$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

7. 7.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{3}(u_n - b)$.

➠Réflexe !
Ça empeste l'IAF !! Pour cela, définir la fonction g de sorte que $u_{n+1} = g(u_n)$ et établir : $\forall x \geqslant b,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$...

- Posons $g : x \longmapsto \ln(x) + 2$, définie sur $[b; +\infty[$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. D'après ce qui précède, on a également $g(b) = b$.
- La fonction g est dérivable sur $[b; +\infty[$ et : $\forall x \in [b; +\infty[,\ g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
  D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\forall x \in [b; +\infty[,\ 0 < g'(x) \leqslant \frac{1}{b}$$

Petite remarque
On pourrait également tout faire sur l'intervalle $[3; 4]$, puisque l'on sait que (b_n) est minorée par 3 et, comme elle est décroissante, elle est majorée par son premier terme, égal à 4.

Et comme $b \geqslant 3$, on a, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$: $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{3}$.
Ainsi, par transitivité :

$$\forall x \in [b; +\infty[,\ -\frac{1}{3} \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{3}$$

Conclusion : $\forall x \in [b; +\infty[,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$.

☞ Rappel...
$\forall X \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+$,
$|X| \leqslant a \iff -a \leqslant X \leqslant a$.

- On a :
  - ✓ g est dérivable sur $[b; +\infty[$
  - ✓ $\forall x \in [b; +\infty[,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$\forall (x, y) \in [b; +\infty[^2,\ |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{3}|x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $x = u_n$ et $y = b$, licite car $u_n \geqslant b$ (question 3.), on obtient :

$$|g(u_n) - g(b)| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - b|$$

Or, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(b) = b$, d'où :

$$|u_{n+1} - b| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - b|$$

Et comme on a vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par b, on a : $u_{n+1} - b \geqslant 0$ et $u_n - b \geqslant 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{3}(u_n - b)$.

7.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{3^n}$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  On sait que $u_0 = 4$ et $b \in [3;4]$, donc :
  $$0 \leqslant u_0 - b \leqslant 1$$
  Ainsi :
  $$0 \leqslant u_0 - b \leqslant \frac{1}{3^0}$$
  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{3^n}$ et montrons $0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{3^{n+1}}$.
  Par hypothèse de récurrence :
  $$0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{3^n}$$
  D'où, en multipliant par $\dfrac{1}{3}$ (positif) :
  $$0 \leqslant \frac{1}{3}(u_n - b) \leqslant \frac{1}{3^{n+1}}$$
  Or, d'après la question précédente :
  $$u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{3}(u_n - b)$$
  D'où, par transitivité :
  $$0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{3^{n+1}}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{3^n}$.

7.c. Retrouver alors le résultat obtenu à la question 6., puis déterminer un entier à partir duquel u_n est proche de b à 10^{-3} près.

- On a :
  ✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$
  ✓ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$

  Conclusion : par théorème d'encadrement, on retrouve : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$.

- Pour déterminer un entier à partir duquel u_n est proche de b à 10^{-3} près, il suffit de déterminer un entier n_0 tel que $\dfrac{1}{3^{n_0}} \leqslant 10^{-3}$.
  Or : $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$. On a ainsi :
  $$\forall n \in [\![7;+\infty[\![,\ \frac{1}{3^n} \leqslant 10^{-3}$$
  D'où, en utilisant le résultat de la question précédente et par transitivité :
  $$\forall n \in [\![7;+\infty[\![,\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant 10^{-3}$$

  Conclusion : à partir du terme d'indice 7, nous sommes certains que u_n est une valeur approchée de b à 10^{-3} près.

★Subtil...★
La question 7.b. fournit une majoration de l'écart entre u_n et b. Par conséquent, il est tout à fait possible que u_n sot une valeur approchée de b à 10^{-3} près avant le terme d'indice 7...

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Considérons la fonction :
$$\varphi : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

8. Montrer que φ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.
  Puisque f est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
  De plus, puisque $x \in \mathbb{R}_*^+$, on a $[x; 2x] \subset \mathbb{R}_*^+$. Ainsi, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur le segment $[x; 2x]$.
  Par conséquent : $\varphi(x)$ existe.

  Conclusion : φ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

> **♣ Méthode !**
> Pour montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$, on doit montrer : pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\varphi(x)$ existe.
> Ensuite, pour montrer que $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f}$ existe, on justifie que l'intégrande est continue sur le segment d'intégration.

- Puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, elle admet des primitives de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Notons F l'une d'elles.
  On a alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \varphi(x) = F(2x) - F(x)$$
- Or :
  ✓ les fonctions $x \longmapsto 2x$ et id sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$,
  ✓ la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
  D'où, par composition et somme, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

> **☞ Rappel...**
> Si :
> ✓ h est $\mathscr{C}^1$ sur I et **à valeurs dans J** ;
> ✓ g est $\mathscr{C}^1$ sur J,
> alors $g \circ h$ est $\mathscr{C}^1$ sur I et $(g \circ h)' = h' \times g' \circ h$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\
&= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \\
&= \frac{2(x - \ln(x) - (2x - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x) + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in]0; +\infty[,\ \varphi'(x) = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$.

9. En déduire les variations de φ sur $]0; +\infty[$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.
   - On a :
   $$\begin{aligned}
   \ln(2) - \ln(x) \geqslant 0 &\iff \ln(x) \leqslant \ln(2) \\
   &\iff x \leqslant 2
   \end{aligned}$$
   stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$
   - On sait, d'après la question 1., que pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$, $f(t) \geqslant 1$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$, $t > \ln(t)$.
     Par conséquent, puisque $x \in \mathbb{R}_*^+$ et $2x \in \mathbb{R}_*^+$:
     $$x - \ln(x) > 0 \quad ; \quad 2x - \ln(2x) > 0$$

   On en déduit :

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
φ	‖	↗	2	↘	

10. Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[,\ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant x$.
    Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.
    On a :
    $$\forall t \in [x; 2x],\ f(t) \geqslant 1$$
    D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $[1; +\infty[$:
    $$\forall t \in [x; 2x],\ \frac{1}{f(t)} \leqslant 1$$
    Et comme f est positive sur $\mathbb{R}_*^+$, on a même :
    $$\forall t \in [x; 2x],\ 0 \leqslant \frac{1}{f(t)} \leqslant 1$$

> **➠Réflexe !**
> On veut encadrer une intégrale : on encadre l'intégrande !!

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $2x \geqslant x$ (puisque $x > 0$) et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[x; 2x]$:

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \int_x^{2x} 1 dt$$

Conclusion : $\forall x \in]0; +\infty[,\ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant x$.

11. 11.a. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\varphi(0)$.

On a :

✓ $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant x$

✓ $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0$$

Conclusion : φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

Réflexe !
Cela revient à montrer que $\lim\limits_0 \varphi$ existe et est un réel.
A-t-on une expression explicite de $\varphi(x)$? NON, alors a-t-on autre chose ? Genre, un encadrement de $\varphi(x)$... ?

11.b. Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \varphi'(x) = 0$. On admet que la fonction φ est alors dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(x)\ln(2x)} \times \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)\left(\frac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)} \\ &= \frac{1}{\ln(2x)} \times \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)\left(\frac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)}\end{aligned}$$

✘ Attention !
La limite est en 0... et il y a une FI, due aux ln(...). D'où la factorisation choisie ! **On factorise par ce qui domine.**

On conclut par opérations...

✘ Attention !
Pas de CC !!

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0} \varphi'(x) = 0$.

12. 12.a. Démontrer que pour tout $t \in [4; +\infty[$: $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{f(t)} \leqslant \dfrac{1}{t - \sqrt{t}}$.

- Soit $t \in [4; +\infty[$. Puisque $\ln(t) \geqslant 0$, on a $t - \ln(t) \geqslant t$, c'est à dire $f(t) \geqslant t$.
  Puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient :

$$\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{f(t)}$$

- Pour tout $t \in [4; +\infty[$, on a :

$$f(t) \geqslant t - \sqrt{t} \iff \ln(t) \leqslant \sqrt{t}$$

  Posons alors $g : t \longmapsto \ln(t) - \sqrt{t}$.

  * La fonction g est dérivable sur $[4; +\infty[$ et, pour tout $t \in [4; +\infty[$:

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{t}}{2t\sqrt{t}}\end{aligned}$$

  D'où :

t	4		$+\infty$
$g'(t)$	0	$-$	
g	$-2 + \ln(4)$	$\searrow$	$-\infty$

  * Or $2 < \mathrm{e}$, donc $4 < \mathrm{e}^2$, et ainsi $-2 + \ln(4) < 0$.

  D'où :

$$\forall t \in [4; +\infty[,\ g(t) \leqslant 0$$

  Autrement dit :

$$\forall t \in [4; +\infty[,\ \ln(t) \leqslant \sqrt{t}$$

  Par conséquent :

$$\forall t \in [4; +\infty[,\ f(t) \geqslant t - \sqrt{t}$$

  Or, on sait que :

$$\forall t > 1,\ t - \sqrt{t} > 0$$

D'où :

$$\forall t \in [4;+\infty[,\ f(t) \geqslant t - \sqrt{t} > 0$$

Et ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\forall t \in [4;+\infty[,\ \frac{1}{f(t)} \leqslant \frac{1}{t-\sqrt{t}}$$

Conclusion : pour tout $t \in [4;+\infty[$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{f(t)} \leqslant \dfrac{1}{t-\sqrt{t}}$.

12.b. Considérons la fonction $h : t \longmapsto 2\ln\left(\sqrt{t}-1\right)$ définie sur $[4;+\infty[$. Dériver h.

h est dérivable sur $[4;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats et, pour tout $t \in [4;+\infty[$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}-1} \\ &= \frac{1}{t-\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall t \in [4;+\infty[,\ h'(t) = \dfrac{1}{t-\sqrt{t}}$.

Rédaction

On a déjà justifié proprement des dérivabilité de fonctions composées dans les questions précédentes, on peut donc aller plus vite sur la fin de l'exercice.

12.c. En déduire que pour tout $x \in [4;+\infty[$: $\ln(2) \leqslant \varphi(x) \leqslant 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

Soit $x \in [4;+\infty[$. Puisque $[x;2x] \subset [4;+\infty[$, on a, d'après la question **12.a.** :

$$\forall t \in [x;2x],\ \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{f(t)} \leqslant \frac{1}{t-\sqrt{t}}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $2x \geqslant x$ (car $x > 0$) et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[x;2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \varphi(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t-\sqrt{t}}\,dt$$

Or :

- $$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt &= \big[\ln(|t|)\big]_x^{2x} \\ &= \ln(2x) - \ln(x) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

- D'après la question **12.b.** :

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{1}{t-\sqrt{t}}\,dt &= \big[h(t)\big]_x^{2x} \\ &= h(2x) - h(x) \\ &= 2\big(\ln(\sqrt{2x}-1) - \ln(\sqrt{x}-1)\big) \\ &= 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $x \geqslant 4$, $\ln(2) \leqslant \varphi(x) \leqslant 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

12.d. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.

Soit x suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) &= 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}\,\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{2x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \\ &= 2\ln\left(\sqrt{2}\,\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{2x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{2\sqrt{2x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

D'où, par opérations et composition :

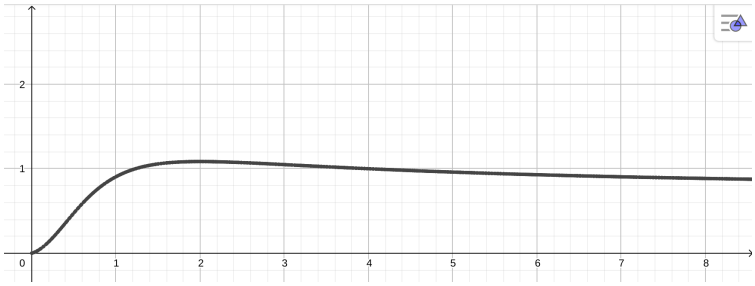
$$\lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(\sqrt{2}\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{2x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) = 2\ln(\sqrt{2})$$

Or $2\ln(\sqrt{2}) = \ln(2)$... On a ainsi :

- ✓ d'après la question précédente : pour tout $x \geqslant 4$, $\ln(2) \leqslant \varphi(x) \leqslant 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$;
- ✓ d'après ce qui précède : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) = \ln(2)$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ln(2)$.

13. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé du plan. On veillera à faire apparaître les différentes tangentes ou asymptotes connues.
Donnée : $\varphi(2) \simeq 1,1$.
Récapitulons quelques informations à faire apparaître :
   - φ est strictement croissante sur $]0;2]$, strictement décroissante sur $[2;+\infty[$
   - $\varphi'(0) = 0$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une demi-tangente horizontale au point de coordonnées $(0,0)$ (car $\varphi(0) = 0$)
   - $\varphi'(2) = 0$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(2, \varphi(2))$
   - $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \ln(2)$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une asymptote "horizontale" d'équation $y = \ln(2)$ au voisinage de $+\infty$



Petite remarque

Impossible de primitiver $\frac{1}{f}$ avec des fonctions usuelles. Dans ce cas, la seule façon de calculer des valeurs de $\varphi(x)$ est d'obtenir une valeur approchée de $\int_x^{2x} \frac{1}{f}$ par une méthode d'approximation d'intégrale... Typiquement la méthode des rectangles ou des trapèzes.

Exercice 9 - EML 2023 Appli

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

On considère également la suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. 1.a. Dresser le tableau de variations complet de f.

   - f est le quotient de deux fonctions usuelles dérivables sur $]0;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$; par conséquent, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} \\ &= \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

   Réflexe !

   - Limites :
     Par opérations, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

     et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   - D'où :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

   1.b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.
   Démontrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     u_0 existe et $u_0 > 0$: l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "u_n existe et $u_n > 0$" et montrons que "u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$".
     * Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$, donc $f(u_n)$ existe. Autrement dit, u_{n+1} existe.
     * Et, on a aussi : $u_{n+1} > 0$, comme quotient de deux réels strictement positifs.

     L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
   Autrement dit, chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. 2.a. Écrire une fonction `Python` telle que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de `EML_1(a)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > a$.

```python
import numpy as np

def CB_1(a):
    u=1
    n=0
    while u<a:
        u=np.exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

   2.b. On admet que l'on a également défini une fonction `Python` tel que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de `EML_2(a)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n < a$.
   Les appels `EML_1(10**6)` et `EML_2(10**(-6))` renvoient respectivement 6 et 5.
   Qu'en déduire sur u_5 et u_6 ? Commenter le résultat en une ligne.

   - On en déduit que $u_5 < 10^{-6}$ et $u_6 > 10^6$.
   - L'écart entre u_5 et u_6 est considérable... la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait-elle divergente ?

3. On définit maintenant la fonction g sur $[0;+\infty[$ par : $\forall x \in [0;+\infty[$, $g(x) = e^{-x} - x^2$.

   3.a. Démontrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$.

   - La fonction carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc la fonction $x \longmapsto -x^2$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
     La fonction g est donc la somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[0;+\infty[$. Par conséquent : g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

- Ensuite :
$$g(0) = 1$$
et, par opérations :
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$
- Pour finir :
  ✓ g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$,
  ✓ g est continue sur $[0; +\infty[$, comme somme de telles fonctions.

  Ainsi, par théorème de bijection, g est bijective de $[0; +\infty[$ dans $g([0; +\infty[) =]-\infty; 1]$.

Conclusion : g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $]-\infty; 1]$.

3.b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0; +\infty[$, que l'on notera α.
Commençons par remarquer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{e^{-x}}{x} - x = 0 \\ &\iff \frac{e^{-x} - x^2}{x} = 0 \qquad x \neq 0 \\ &\iff e^{-x} - x^2 = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, puisque g est bijective de $[0; +\infty[$ dans $]-\infty; 1]$ et que $0 \in]-\infty; 1]$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $[0; +\infty[$, notée α.
Mais, comme $g(0) \neq 0$, on a même $\alpha \in]0; +\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0; +\infty[$, que l'on notera α.

3.c. Justifier : $e^{-1} < \alpha < 1$.
On a :
- $g(1) = e^{-1} - 1$.
  Or $-1 < 0$, et donc, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
$$e^{-1} < 1$$
  Ainsi :
$$g(1) < 0$$
- $g(e^{-1}) = e^{-e^{-1}} - e^{-2}$.
  Or : $e^{-1} < 1 < 2$, d'où :
$$-e^{-1} > -2$$
  Et, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
$$e^{-e^{-1}} > e^{-2}$$
  Ainsi :
$$g(e^{-1}) > 0$$

Par conséquent :
$$g(e^{-1}) > g(\alpha) > g(1)$$
Et donc, par stricte décroissance de g sur $[0; +\infty[$:
$$e^{-1} < \alpha < 1$$

Petite remarque
On peut également raisonner par équivalences en partant de $g(e^{-1}) > 0$ pour arriver à une "trivialité".

Conclusion : $e^{-1} < \alpha < 1$.

4. 4.a. Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
On sait que $u_0 = 1$ et ainsi, $u_1 = e^{-1}$ puis : $u_2 = \dfrac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{1-e^{-1}}$.
Or : $e^{-1} < 1$, donc :
$$1 - e^{-1} > 0$$
Et, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
$$e^{1-e^{-1}} > 1$$
Autrement dit :
$$u_2 > u_0$$

Conclusion : $u_2 > u_0$.

4.b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Démontrons, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} < u_{2n+2}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  Fait dans la question précédente.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{2n} < u_{2n+2}$ et montrons que $u_{2n+2} < u_{2n+4}$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{2n} < u_{2n+2}$$

  Puis, en appliquant f, strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, licite car $u_n > 0$ et $u_{2n} > 0$ (question 1.b.) :

$$f(u_{2n}) > f(u_{2n+2})$$

  Autrement dit :

$$u_{2n+1} > u_{2n+3}$$

  Puis, en appliquant à nouveau f, toujours strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient finalement :

$$u_{2n+2} < u_{2n+4}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

> ☞ **Pour info...**
> On peut aller un peu plus vite en appliquant directement $f \circ f$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$... Au passage, puisque l'intervalle $]0;+\infty[$ est stable par f, la fonction $f \circ f$ est bien également définie sur $]0;+\infty[$.

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} < u_{2n+2}$.
> Autrement dit : la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4.c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un réel ℓ appartenant à $[0;\mathrm{e}^{-1}]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  D'après la question précédente :

$$u_{2n} < u_{2n+2}$$

  D'où, en appliquant f, strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on obtient :

$$u_{2n+1} > u_{2n+3}$$

  Conclusion : la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Or, d'après la question 1.b., la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 ; c'est donc également le cas de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
  Conclusion : par théorème de convergence monotone, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
  Et comme $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $\ell \leqslant u_1$.

> **Conclusion :** la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers un réel ℓ appartenant à $[0;\mathrm{e}^{-1}]$.

5. Pour $x \in]0;+\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

5.a. Justifier que la fonction h est continue sur $[0;+\infty[$.

- La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$; ainsi, par composition, la fonction h est continue sur $]0;+\infty[$.
- Ensuite :
  - ✓ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$
  - ✓ $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = 0$

  D'où, par composition :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\big(f(x)\big) = 0$$

  Ainsi :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = h(0)$$

  La fonction h est donc continue en 0.

> **Petites remarques**
> C'est un peu original cette composition de limite de f avec elle-même !

> **Conclusion :** la fonction h est continue sur $[0;+\infty[$.

5.b. Déterminer, pour tout $x \in]0;+\infty[$, une expression de $h(x)$ en fonction de $g(x)$.
Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} h(x) &= f \circ f(x) \\ &= f\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}}$$
$$= x\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x} + x\right)$$
$$= x\exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right)$$

Conclusion : $\forall x \in]0;+\infty[,\ h(x) = x\exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right)$.

5.c. Résoudre alors l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.

- Remarquons déjà que $h(0) = 0$, donc 0 est solution de cette équation.
- Soit ensuite $x \in]0;+\infty[$. On a, en commençant par la question précédente :

$$\begin{aligned}
h(x) = x &\iff x\exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) && \text{(} x \neq 0 \text{)}\\
&\iff \exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) = 1 && \text{(injectivité de exp sur } \mathbb{R}\text{)}\\
&\iff -\frac{g(x)}{x} = 0 && \text{(} x \neq 0 \text{)}\\
&\iff g(x) = 0 && \text{(} x \neq 0 \text{ et travail fait en question 3.b.)}\\
&\iff x = \alpha
\end{aligned}$$

Conclusion : les solutions de l'équation $h(x) = x$ sur $[0;+\infty[$ sont 0 et α.

5.d. En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 puis déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

- On sait que :
  - ✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$
  - ✓ d'après 4.c., la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0;e^{-1}]$;
  - ✓ h est continue en ℓ (car continue sur $[0;+\infty[$ et que $\ell \in [0;+\infty[$)

  D'où : $\ell = h(\ell)$.
  D'après la question précédente, on a donc :
  $$\ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = \alpha$$
  Mais on sait que $\ell \in [0;e^{-1}]$ et, d'après la question 3.c., $\alpha > e^{-1}$.
  Par conséquent $\ell \neq \alpha$ et donc :
  $$\ell = 0$$

  Conclusion : la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

- On a aussi :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1})$$
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$; donc par composition :
  $$\lim_{n\to+\infty} f(u_{2n+1}) = +\infty$$
  Autrement dit :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+2} = +\infty$$

  Conclusion : la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

> ☞ **Rappel...**
> SI :
> • $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n)$
> • (u_n) converge vers ℓ
> • h est continue en ℓ
> ALORS : $h(\ell) = \ell$.

6. Qu'en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
D'après la question précédente :
$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$$

Conclusion : par propriété de recouvrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sans avoir de limite.

> ☞ **Rappel...**
> La suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont toutes deux pour limite ℓ (où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

Exercice 10 – Inspiré d'exercices de concours

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Écrire une fonction **Python** de sorte que l'exécution de la commande `f(n,x)` renvoie la valeur de $f_n(x)$, où $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

```python
def f(n,x):
    return x**n-n*x+1
```

Petite remarque
Pas nécessaire de traiter les cas où $n \notin [\![2;+\infty[\![$ et $x < 0$ en fait...

2. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0;+\infty[$.
La fonction f_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ car c'est une fonction polynomiale, et, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1} - n \\ &= n(x^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

RÉFLEXE !

D'où (la limite en $+\infty$ étant obtenue en factorisant $f_n(x)$ par x^n) :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	$+\infty$

3. 3.a. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_2(x) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f_2(x) = 0 &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff (x-1)^2 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

3.b. Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions, notées α_n et β_n, vérifiant :

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$

- Sur $]0;1[$:
  - ✓ f_n est continue sur l'intervalle $]0;1[$,
  - ✓ f_n est strictement décroissante sur $]0;1[$.

  D'après le théorème de bijection f_n est bijective de $]0;1[$ dans $f_n(]0;1[) =]2-n;1[$.
  Or, puisque $n \geqslant 3$, on a $2 - n < 0$. Ainsi, $0 \in]2-n;1[$.
  Par conséquent, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $]0;1[$.
- De même sur $]1;+\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution β_n sur $]1;+\infty[$.

Rédaction
On rédige proprement un des deux cas, mais pas l'autre !

Conclusion : pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions, notées α_n et β_n, vérifiant : $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

♡ Astuce du chef ! ♡
Pour éviter d'avoir à justifier les inégalités strictes par un argument supplémentaire, on met en place le théorème de bijection sur les intervalles ouverts.

3.c. Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\beta_n < 2$.
Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On sait que $\beta_n > 1$, et ainsi, par stricte croissance de f_n sur $]1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \beta_n < 2 &\iff f_n(\beta_n) < f_n(2) \\ &\iff 0 < 2^n - 2n + 1 \\ &\iff 2n - 1 < 2^n \\ &\iff 2n \leqslant 2^n \end{aligned}$$

✓ Rigueur !
La phrase "par stricte croissance de f_n^{-1} sur $]1;+\infty[$" n'est pas rigoureuse. En fait, il n'y a pas qu'une bijection réciproque ici, il y en a 2.
La bijection réciproque de la restriction de f_n sur $]0;1[$ et celle de la restriction de f_n sur $]1;+\infty[$...
On préfère donc l'argument sur f_n ici (qui est équivalent, et plus simple à énoncer).

Hum... Lançons-nous dans une récurrence pour démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $2^n \geqslant 2n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 3$, c'est immédiat.
- **Hérédité.** Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Supposons que $2^n \geqslant 2n$ et montrons que $2^{n+1} \geqslant 2(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :

$$2^n \geqslant 2n$$

  D'où :

$$2^{n+1} \geqslant 4n$$

  Mais :

$$\begin{aligned} 4n - 2(n+1) &= 2n - 2 \\ &= 2(n-1) \\ &\geqslant \end{aligned}$$

$n \geqslant 3$

  D'où $4n \geqslant 2(n+1)$, et par transitivité :

$$2^{n+1} \geqslant 2(n+1)$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Par conséquent :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 2^n \geqslant 2n$$

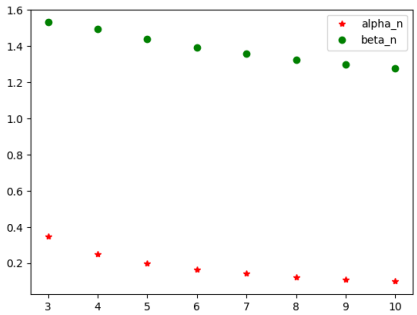
Conclusion : par équivalences, on a établi que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![,\ \beta_n < 2$.

4. 4.a. Recopier et compléter les lignes 4,7,8,10,11,12 de la fonction `Python` ci-dessous (où `f` est la fonction `Python` créée à la question 1. afin qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α_n, pour $n \in [\![3;+\infty[\![$.

```
1  def alpha(n):
2      a=0
3      b=1
4      while ......
5          m=(a+b)/2
6          if f(n,m)==0:
7              ......
8          elif ......
9              b=m
10         elif ......
11             ......
12     return ......
```

```
def alpha(n):
    a=0
    b=1
    while b-a>10**(-5):
        m=(a+b)/2
        if f(n,m)==0:
            a,b=m,m
        elif f(n,m)*f(n,a)<0:
            b=m
        elif f(n,m)*f(n,a)>0:
            a=m
    return (a+b)/2
```

4.b. On admet que l'on a écrit une fonction `beta(n)` qui renvoie une valeur approchée de β_n (pour $n \in [\![3;+\infty[\![$) à 10^{-5} près.
Proposer un programme dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous :




```
import matplotlib.pyplot as plt

N=range(3,11)
A=[alpha(n) for n in N]
B=[beta(n) for n in N]
plt.plot(N,A,'r*',label="alpha_n")
plt.plot(N,B,'go',label="beta_n")
plt.legend()
plt.show()
```

Important !
A savoir compléter correctement sans hésiter !

5. 5.a. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 3} \beta_n$ est divergente.

D'après la question 3., la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1, elle ne peut pas converger vers 0. Par conséquent, $\sum_{n\geqslant 3} \beta_n$ diverge grossièrement.

✓ Rigueur !
A ce stade, nous ne savons pas si la suite (β_n) a une limite en $+\infty$... Il ne serait donc pas rigoureux d'écrire $\lim_{n\to+\infty} \beta_n \neq 0$...

5.b. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 3} \alpha_n$ est divergente. *Indication : on pourra chercher à la comparer à la série harmonique.*

- Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On a : $f_n(\alpha_n) = 0$, ce qui donne :

$$\alpha_n = \frac{\alpha_n^n + 1}{n}$$

Or $\alpha_n \geqslant 0$, donc $\dfrac{\alpha^n + 1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ et ainsi :

$$\alpha_n \geqslant \frac{1}{n}$$

- On a ainsi :
  - ✓ $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \alpha_n \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$,
  - ✓ $\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{1}{n}$ est une troncature d'une série de Riemann divergente car d'exposant 1.

> **Conclusion :** par critère de comparaison (par inégalités) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 3} \alpha_n$ est divergente.

6. Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$.

6.a. Démontrer que : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

Soient $n \in [\![3;+\infty[\![$ et $x \in]0;1[$. On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} - (n+1)x + 1 - (x^n - nx + 1) \\ &= x^{n+1} - x^n - x \\ &= x^n(x-1) - x \end{aligned}$$

Or, $x \in]0;1[$, donc :

$$x^n \geqslant 0 \quad ; \quad x - 1 \leqslant 0$$

Et ainsi :

$$x^{n+1} - x^n \leqslant 0$$

Par conséquent, puisque $x \geqslant 0$:

$$x^{n+1} - x^n - x \leqslant 0$$

> **Conclusion :** $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

6.b. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. D'après le résultat de la question précédente appliqué à α, licite car $\alpha_n \in]0;1[$ (question 3.), on obtient :

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leqslant f_n(\alpha_n)$$

Or $f_n(\alpha_n) = 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. D'où

$$f_{n+1}(\alpha_n) \leqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

Et puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0;1[$, on en déduit :

$$\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$$

> **Conclusion :** la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

> **✓ Rigueur !**
> Ne pas oublier de mentionner que $\alpha_n \in]0;1[$ pour pouvoir utiliser la question précédente !

6.c. Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\alpha_n \leqslant \dfrac{2}{n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

- Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On sait que $f_n(\alpha_n) = 0$, et, de plus :

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{2}{n}\right) &= \left(\frac{2}{n}\right)^n - n\frac{2}{n} + 1 \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 \\ &< 0 \end{aligned}$$

car $n \geqslant 3$, donc $\dfrac{2}{n} < 1$

Ainsi :

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) < f_n(\alpha_n)$$

Et comme f_n est strictement décroissante sur $]0;1[$ (on a bien $\dfrac{2}{n}$ et α_n dans $]0;1[$).

Par conséquent :

$$\frac{2}{n} > \alpha_n$$

> **Petite remarque**
> On pouvait aussi faire ainsi : $\alpha_n = \dfrac{\alpha_n^n + 1}{n}$.
> Or $\alpha_n \in [0;1]$, donc $\alpha_n^n \in [0;1]$ et donc $\dfrac{\alpha_n^n + 1}{n} \leqslant \dfrac{2}{n}$. Par conséquent : $\alpha_n \leqslant \dfrac{2}{n}$.
> Ce sont des arguments plus élémentaires, mais j'ai plutôt vu la méthode exposée à gauche dans les copies.

- On a ainsi, puisque $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est minorée par 0 :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{2}{n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$. Le théorème d'encadrement permet finalement de conclure...

Réflexe !
On obtient une majoration et on veut une limite... Théorème d'encadrement ? Relisons l'énoncé à la recherche d'une minoration...

> **Conclusion :** la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 0.

6.d. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$.

On a, pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $f_n(\alpha_n) = 0$, d'où $n\alpha_n = \alpha_n^n + 1$.
Or : $\alpha_n^n = \exp\left(n\ln(\alpha_n)\right)$ et $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 0. Ainsi, par composition et opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$$

> **Conclusion :** $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$.

Pour info...
Pour n suffisamment grand, on a donc $n\alpha_n \simeq 1$, autrement dit $\alpha_n \simeq \frac{1}{n}$.
L'an prochain, on dira que $\frac{1}{n}$ **est un équivalent de α_n en $+\infty$.**

6.e. La série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{\alpha_n}{n}$ est-elle convergente ?

On a :

✓ d'après la question **6.c.** : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 0 < \frac{\alpha_n}{n} \leqslant \frac{2}{n^2}$;

✓ la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{2}{n^2}$ est une troncature d'une série de Riemann convergente car d'exposant 2.

> **Conclusion :** par critère de comparaison (par inégalités) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{\alpha_n}{n}$ est convergente.

7. Convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$.

7.a. Établir : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\quad \beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned} f_n\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right) &= n^{\frac{n}{n-1}} - n \times n^{\frac{1}{n-1}} + 1 \\ &= n^{\frac{n}{n-1}} - n^{1+\frac{1}{n-1}} + 1 \\ &= n^{\frac{n}{n-1}} - n^{\frac{n}{n-1}} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et comme $f_n(\beta_n) = 0$, on obtient :

$$f_n(\beta_n) < f_n\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right)$$

Puis, par stricte croissance de f_n sur $]1;+\infty[$, on obtient :

$$\beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$$

> **Conclusion :** $\forall n \geqslant 3,\ \beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$.

7.b. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 1.

- D'après ce qui précède et la question **3.b.** : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 1 < \beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$
- Or, pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$:

$$n^{\frac{1}{n-1}} = \exp\left(\frac{1}{n-1}\ln(n)\right)$$

Et, par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n-1} = 0$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n-1}} = 1$$

> **Conclusion :** par théorème d'encadrement, on obtient que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 1.

II Algèbre linéaire

Exercice 11 - Fait maison

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)^2(A + I_3)$.

Conclusion : $(A - I_3)^2(A + I_3) = 0_3$.

2. Résoudre les équations $AX = X$ et $AX = -X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{cases} y = x \\ z = y \\ -x + y + z = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \\
&\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $AX = X$ est $\left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

- On procède de la même façon...

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $AX = -X$ est $\left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

♣ Méthode !
Pour résoudre un système, on met TOUJOURS en place la méthode du pivot de Gauss : elle permet de s'assurer que la résolution est correcte. **En aucun cas on tentera des raccourcis foireux...**

3. Notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.a. Résoudre l'équation $AX = X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On notera W la solution dont la première composante est égale à -1.

- On procède de la même façon qu'en question précédente...

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $AX = X + V$ est $\left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

- Posons alors $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (obtenu avec $z = 0$ dans ce qui précède).

3.b. Pour les khûbes. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Montrons que la famille (U, V, W) est libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $aU + bV + cW = 0_{3,1}$. On a :

> ☞ **Rappel...**
> La famille (U, V, W) est libre lorsque :
> $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$,
> $(aU+bV+cW=0) \Rightarrow a=b=c=0$

$$aU + bV + cW = 0_{3,1} \iff \begin{cases} a+b-c=0 \\ -a+b \quad =0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+\ \ b-\ \ c=0 \\ \quad 2b-\ \ c=0 \\ \qquad\quad 2c=0 \end{cases}$$

par remontées successives

$$\iff \begin{cases} a \qquad\quad =0 \\ \quad b \quad =0 \\ \qquad c=0 \end{cases}$$

D'où $a = b = c = 0$.
Par conséquent, la famille (U, V, W) est :

- ✓ libre d'après ce qui précède,
- ✓ de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

> **Conclusion :** la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3.c. Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Mettons en place la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis, en effectuant $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

> ☞ **Pour info...**
> A partir de cette étape, on sait que P est inversible. En effet, grâce aux opérations élémentaires sur les lignes, on a réussi à la rendre triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. On dit que la matrice triangulaire obtenue est sa **réduite de Gauss**.

Ensuite, en effectuant $\begin{cases} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En effectuant $L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Reste à diviser chaque ligne par 4...

> **Conclusion :** P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.d. Calculer $P^{-1}AP$. On notera T la matrice obtenue.

On obtient :

$$P^{-1}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $T = P^{-1}AP$.

3.e. Posons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, la matrice N^k.
Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice T^n.

- Sans difficulté, on trouve $N^2 = 0_3$ et donc :

$$\forall k \in [\![2; +\infty[\![,\ N^k = 0_3$$

- Ensuite, on remarque que :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - Si $n \geqslant 2$:
    On a :

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} && \text{formule du binôme de Newton, licite car } D \text{ et } N \text{ commutent} \\ &= \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^k N^{n-k} && \text{relation de Chasles, licite car } n \geqslant 2 \\ &= D^n + nND^{n-1} && \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0 \end{aligned}$$

  - Si $n \in \{0; 1\}$:
    - Si $n = 0$:

$$\begin{aligned} D^0 + 0 \times ND^{-1} &= D^0 \\ &= I_3 \\ &= T^0 \end{aligned}$$

    - Si $n = 1$:

$$\begin{aligned} D^1 + ND^0 &= D + N \\ &= T^1 \end{aligned}$$

    L'expression obtenue est donc encore valable si $n \in \{0; 1\}$.

  Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = D^n + nND^{n-1}$$

♡ Astuce du chef ! ♡
On peut également faire la disjonction "$n \geqslant 1$" et "$n = 0$". Dans le premier cas, la somme "$\sum_{k=2}^{n} \ldots$" serait alors nulle si $n = 1$ puisqu'indexée sur un ensemble vide. Cependant, il est sans doute plus simple de se souvenir que la disjonction se fait au niveau de l'indice de nilpotence de la matrice N. Ici, puisque $N^2 = 0$, on distingue les cas "$n \geqslant 2$" et "$n \in \{0; 1\}$".

Conclusion : après calculs, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

♣ Méthode !
Pour une expression aussi simple, l'énoncé aurait également pu demander de conjecturer une expression de T^n (en calculant T^2, T^2, ...) puis de la démontrer (par récurrence).

3.f. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

- On sait que

$$T = P^{-1}AP$$

  D'où :

$$A = PTP^{-1}$$

- Démontrons alors, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.
  - **Initialisation.** Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} PT^0P^{-1} &= PI_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= I_3 \\ &= A^0 \end{aligned}$$

    L'initialisation est vérifiée.

Petite remarque
Elle pourrait passer en récurrence immédiate ici... Je la fais simplement pour que vous puissiez vous assurer qu'elle est bien immédiate pour vous !

* **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PT^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$.
On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} \\ &= PT^n \times TP^{-1} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

hypothèse de récurrence et point précédent

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.

- On calcule ensuite en utilisant le résultat de la question précédente...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n - 2n + 3 & 2(-1)^{n+1} + 2 & (-1)^n + 2n - 1 \\ (-1)^{n+1} - 2n + 1 & 2(-1)^n + 2 & (-1)^{n+1} + 2n + 1 \\ (-1)^n - 2n - 1 & 2(-1)^{n+1} + 2 & (-1)^n + 2n + 3 \end{pmatrix}$.

Vérification
On vérifie l'expression pour $n = 0$ (on doit trouver I_3, car A est inversible...) et pour $n = 1$.

4. Déduire des questions précédentes l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \ ;\ u_1 = 0 \ ;\ u_2 = 1 \ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. On a ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$

Puis, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$$

Avec la question précédente et puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 2n - 1 \\ (-1)^{n+1} + 2n + 1 \\ (-1)^n + 2n + 3 \end{pmatrix}$$

La première ligne nous fournit le résultat voulu...

Vérification
Les deux autres lignes servent de vérifications, puisqu'elles doivent correspondre à u_{n+1} et u_{n+2} si $u_n = (-1)^n + 2n - 1$... Ce qui est bien le cas ! Ouf !

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + 2n - 1$.

III Probabilités

Exercice 12 - EML 2009 E

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$ avec $p \in]0;1[$.

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1.a. Reconnaître la loi de T. Donner son espérance et sa variance.

- **Expérience.** L'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir une boule noire" a pour probabilité q.
- **Variable aléatoire.** La variable aléatoire T prend alors comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : T suit la loi géométrique de paramètre q et :

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \mathbb{P}\big([T = n]\big) = qp^{n-1} \quad ; \quad \mathbb{E}(T) = \frac{1}{q} \quad ; \quad \mathbb{V}(T) = \frac{p}{q^2}$$

1.b. Exprimer U en fonction de T. En déduire que U possède une espérance et une variance et les donner.

- Puisque U prend comme valeur le nombre de balles blanches obtenues, on a :

$$U = T - 1$$

- La variable aléatoire U admet alors une espérance et une variance, comme transformée affine d'une variable aléatoire admettant espérance et variance ; et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}(T-1) \\ &= \mathbb{E}(T) - 1 \\ &= \frac{1}{q} - 1 \\ &= \frac{p}{q}\end{aligned}$$

linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(U) &= \mathbb{V}(T-1) \\ &= \mathbb{V}(T) \\ &= \frac{p}{q^2}\end{aligned}$$

Conclusion : U admet une espérance et une variance, et : $\mathbb{E}(U) = \frac{p}{q}$, $\mathbb{V}(U) = \frac{p}{q^2}$.

2. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note :
   - X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués,
   - Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues,
   - Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues,
   - pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement "obtenir une boule blanche au i-ème tirage" et $N_i = \overline{B_i}$.

2.a. Écrire une fonction `Python` prenant en argument un réel $p \in]0;1[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X.

2.b. **Loi de X.**

2.b.i. Sans justifier, donner $X(\Omega)$.
On a $X(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$.

2.b.ii. Montrer que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X = k]\big) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.
Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$.

$[X = k]$ est réalisé	si, et seulement si,	on obtient la deuxième couleur de boule pour la première fois au k-ième tirage
	si, et seulement si,	les tirages 1 à $k-1$ ont donné la même couleur et le k-ième tirage l'autre couleur
	si, et seulement si,	(les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule blanche et le k-ième tirage une boule noire) ou (les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule noire et le k-ième tirage une boule blanche)

D'où :

$$[X = k] = \big(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k\big) \cup \big(N_1 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k\big)$$

★Subtil...★
L'issue consistant à n'obtenir que des boules noires et celle à n'obtenir que des boules blanches n'ont pas d'image par X. Ces deux issues forment un évènement quasi-impossible ; on peut donc sans problème omettre de les évoquer.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X=k]\big) &= \mathbb{P}\Big(\big(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap N_k\big)\cup\big(N_1\cap\ldots\cap N_{k-1}\cap B_k\big)\Big)\\ &= \mathbb{P}(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap N_k)\times\mathbb{P}(N_1\cap\ldots\cap N_{k-1}\cap B_k)\\ &= p^{k-1}q+q^{k-1}p\end{aligned}$$

incommpatibilité de N_1 et B_1, donc des évènements en jeu

tirages avec remise, donc mutuelle indépendance des évènements en jeu

Conclusion : pour tout $k\in[\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=k]\big)=qp^{k-1}+pq^{k-1}$.

2.b.iii. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}\big([X=k]\big)=1$.

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}\big([X=k]\big) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\big(qp^{k-1}+pq^{k-1}\big)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\big(qp^{i}+pq^{i}\big)\\ &= q\sum_{i=1}^{+\infty}p^i+p\sum_{i=1}^{+\infty}q^i\\ &= q\left(\sum_{i=0}^{+\infty}p^i-1\right)+p\left(\sum_{i=1}^{+\infty}q^i-1\right)\\ &= q\left(\frac{1}{1-p}-1\right)+p\left(\frac{1}{1-q}-1\right)\\ &= 1-q+1-p\\ &= 1-q+q\\ &= 1\end{aligned}$$

changement d'indice $i=k-1$

linéarité de la somme, licite car puisque $p,q\in]0;1[$, les séries $\sum_{i\geqslant1}p^i$ et $\sum_{i\geqslant1}q^i$ sont des séries géométriques convergentes

$q=1-p$, $p=1-q$

Important !

Il est indispensable de justifier (ou à défaut mentionner) la convergence des séries en jeu lorsqu'on utilise la linéarité (pour décomposer) sur des sommes infinies.

2.b.iv. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$.

- On sait que :
  X admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)}|k\mathbb{P}\big([X=k]\big)|$ est convergente
  si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant2}k\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ est convergente, car $\forall k\geqslant2,\ k\mathbb{P}\big([X=k]\big)\geqslant0$
- Soit $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N}k\mathbb{P}\big([X=k]\big) &= \sum_{k=2}^{N}k\big(qp^{k-1}+pq^{k-1}\big)\\ &= q\sum_{k=2}^{N}kp^{k-1}+p\sum_{k=2}^{N}kq^{k-1}\end{aligned}$$

  Or $p,q\in]0;1[$, donc les séries $\sum_{k\geqslant2}kp^{k-1}$ et $\sum_{k\geqslant2}kq^{k-1}$ sont des troncatures de séries géométriques convergentes. Par conséquent, la série $\sum_{k\geqslant2}k\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ est convergente.
- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= q\sum_{k=2}^{+\infty}kp^{k-1}+p\sum_{k=2}^{+\infty}kq^{k-1}\\ &= q\left(\sum_{k=1}^{+\infty}kp^{k-1}-1\right)+p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}-1\right)\\ &= q\left(\frac{1}{(1-p)^2}-1\right)+p\left(\frac{1}{(1-q)^2}-1\right)\\ &= \frac{1}{q}-1+\frac{1}{p}-p\\ &= \frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1\end{aligned}$$

$q=1-p$, $p=1-q$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

2.c. **Loi de Y.**

2.c.i. Pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, déterminer $\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big)$. *On distinguera les cas $k=2$ et $k \geqslant 3$.*

Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$.

- Si $k=2$:

$[X=2]\cap[Y=1]$ est réalisé	si, et seulement si,	on a tiré deux boules dont une blanche
	si, et seulement si,	(on tirage une blanche puis une noire)
		ou (on tirage une noire puis une blanche)

D'où :

$$[X=2]\cap[Y=1] = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big) &= \mathbb{P}\big((B_1\cap N_2)\cup(N_1\cap B_2)\big) \\ &= \mathbb{P}(B_1\cap N_2) + \mathbb{P}(N_1\cap B_2) && \text{incompatibilité de } B_1 \text{ et } N_1\text{, donc des évènements en jeu} \\ &= 2pq && \text{tirages avec remise, donc mutuelle indépendance des évènements en jeu}\end{aligned}$$

- Si $k \geqslant 3$:

$[X=k]\cap[Y=1]$ est réalisé	si, et seulement si,	on a tiré k boules dont une blanche
	si, et seulement si,	on a tiré une seule blanche et $k-1$, avec $k-1 \geqslant 2$, noires
	si, et seulement si,	les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule noire et le tirage k donne une boule blanche

D'où :

$$[X=k]\cap[Y=1] = N_1 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

Par conséquent, par indépendance des évènements $N_1, \ldots, N_{k-1}, B_k$, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big) = q^{k-1}p$$

Conclusion : $\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big) = \begin{cases} 2pq & \text{si } k=2 \\ q^{k-1}p & \text{si } k \geqslant 3 \end{cases}$.

2.c.ii. En déduire que $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = q(1+p)$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=k]\big)_{k\in[\![2;+\infty[\![}$ comme système complet d'évènements, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y=1]\big) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big) && \text{question précédente} \\ &= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} pq^{k-1} && \text{changement d'indice } i=k-1 \\ &= 2pq + p\sum_{i=2}^{+\infty} q^i \\ &= 2pq + p\left(\sum_{i=2}^{+\infty} q^i - 1 - q\right) \\ &= 2pq + p\left(\frac{1}{1-q} - 1 - q\right) && 1-q=p \\ &= 2pq + 1 - p - pq \\ &= pq + 1 - p \\ &= pq + q && 1-p=q \\ &= q(1+p)\end{aligned}$$

✘ Attention !
On fait attention en remplaçant : il y a deux expressions différentes de $\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big)$, selon que $k=2$ ou $k \geqslant 3$... C'est une erreur que l'on rencontre souvent ; on peut y remédier en concluant précisément et visiblement la question précédente.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = q(1+p)$.

2.c.iii. Déterminer la loi de Y.

- Puisque l'évènement "n'obtenir que des boules noires" est quasi-impossible, on peut considérer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- ∗ On a déjà $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = q(1+p)$.

* Soit ensuite $n \in [\![2;+\infty[\![$.

$[Y=n]$ est réalisé	si, et seulement si,	on obtient n blanches à la fin du jeu
	si, et seulement si,	on obtient n blanches, avec $n \geqslant 2$, et les deux couleurs
	si, et seulement si,	on obtient n blanches et une noire
	si, et seulement si,	les tirages 1 à n ont donné une blanche et le $(n+1)$-ième tirage a donné une noire

D'où :

$$[Y=n] = B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap N_{n+1}$$

Puis, par indépendance des évènements $B_1, \ldots, B_n, N_{n+1}$ (tirages avec remise), on obtient :

$$\mathbb{P}\big([Y=n]\big) = p^n q$$

Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = q(1+p)$ et pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([Y=n]\big) = p^n q$.

♡ L'avis du chef ! ♡
Exercice un peu répétitif sur la fin... Mais il faut bien cela pour ancrer les méthodes !

2.d. Donner la loi de Z.

En échangeant les rôles des boules noires et blanches, on échange Y et Z...
Par conséquent, Z a la même loi que celle de Y, en échangeant p et q.

Conclusion : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Z=1]\big) = p(1+q)$ et pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([Z=n]\big) = q^n p$.

Exercice 13 - Ecricome 2014 E

Soient $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$.
On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p et on procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: "*On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce*". On suppose les résultats des lancers indépendants les uns des autres.
On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : "La pièce donne FACE lors du j-ième lancer" ; et $P_j = \overline{F_j}$;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre "FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE", alors $Y = 4$.
On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n puis donner $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)$ pour $k \in X_n(\Omega)$. Préciser $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
   - ✓ **Expérience :** l'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
   - ✓ **Variable aléatoire :** X_n prend alors comme valeur le nombre de PILE obtenus sur ces n lancers.

   Conclusion : $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$
   $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$; $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
   $\mathbb{E}(X_n) = np$ et $\mathbb{V}(X_n) = np(1-p)$.

2. Donner $Y(\Omega)$.
   On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Pour l'entraînement (non demandé ici, car l'énoncer dit de "donner"), démontrons cette égalité. Procédons par double-inclusion.

   ♣ Méthode ! On s'imprègne bien de cette méthode, assez classique.

   $\boxed{\subset}$ Y prend comme valeur le nombre de FACE avant l'apparition du second PILE, donc on a immédiatement $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

   $\boxed{\supset}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $k \in Y(\Omega)$.
   L'issue consistant à obtenir k FACE puis 2 PILE puis une infinité de FACE réalise l'évènement $[Y = k]$.
   Par conséquent : $[Y = k] \neq \varnothing$. On a ainsi établi :

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ [Y = k] \neq \varnothing$$

   D'où :

   $$\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$$

   Petite remarque Il s'agit de trouver UNE issue pour justifier que $[Y = k]$ est non vide, et donc que k est bien dans $Y(\Omega)$...

   Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

3. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements $[Y = n]$ et $[X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$ sont égaux.
   On a :

$[Y = n]$ est réalisé	si, et seulement si,	on obtient n FACE avant l'apparition du second PILE
	si, et seulement si,	le $(n+2)$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu n FACE sur les $n+1$ lancers précédents
	si, et seulement si,	le $(n+2)$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu 1 PILE sur les $n+1$ lancers précédents
	si, et seulement si,	$P_{n+2} \cap [X_{n+1} = 1]$ est réalisé

   Conclusion : $[Y = n] = [X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$.

4. Prouver que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) = (n+1)p^2q^n$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}\big([Y = n]\big) &= \mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}\big) \\
   &= \mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1]\big)\mathbb{P}(P_{n+2}) && \text{indépendance des lancers, et } X_{n+1} \text{ ne fait intervenir que les lancers 1 à } n+1 \\
   &= \binom{n+1}{1} p(1-p)^n \times p && \text{d'après la question 1 : } X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+1;p) \\
   &= (n+1)p^2q^n
   \end{aligned}$$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) = (n+1)p^2q^n$.

5. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance et la calculer.

- On sait que :

  Y admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in Y(\Omega)} |n\mathbb{P}\big([Y=n]\big)|$ est convergente

  si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\big([Y=n]\big)$ est convergente, car $\forall n \in \mathbb{N},\ n\mathbb{P}\big([Y=n]\big) \geqslant 0$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}\big([Y=n]\big) &= \sum_{n=0}^{N} n(n+1)p^2q^n \\ &= p^2\sum_{k=1}^{N+1}(k-1)kq^{k-1} \\ &= p^2q\sum_{k=1}^{N+1}(k-1)kq^{k-2}\end{aligned}$$

changement d'indice $k=n+1$, linéarité de la somme

  Or, $p \in]0;1[$, donc $q \in]0;1[$. Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)q^{k-2}$ est une série géométrique convergente.

  Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\big([Y=n]\big)$ est convergente.

- On en déduit que Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= p^2q\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} \\ &= p^2q\frac{2}{(1-q)^3} \\ &= \frac{2q}{p}\end{aligned}$$

$p = 1-q$

Conclusion : Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{2q}{p}$.

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

6.a. Soit Z la variable aléatoire égale au rang du premier PILE. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

✓ **Expérience :** l'expérience consiste en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.

✓ **Variable aléatoire :** Z donne le rang du premier succès.

Conclusion : $Z \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$
$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Z=k]\big) = (1-p)^{k-1}p$
$\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

6.b. Exprimer Y_1 en fonction de Z puis en déduire la loi de Y_1 ainsi que son espérance.

Puisque Z est le rang du premier PILE et que Y_1 compte le nombre de FACE avant l'apparition de ce premier PILE, on a :

$$Y_1 = Z - 1$$

Ainsi :

- $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_1=n]\big) &= \mathbb{P}\big([Z-1=n]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([Z=n+1]\big) \\ &= (1-p)^n p\end{aligned}$$

$n+1 \in \mathbb{N}^*$

- puisque Z admet une espérance et que Y_1 est une transformée affine de Z, Y_1 admet également une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1) &= \mathbb{E}(Z-1) \\ &= \mathbb{E}(Z) - 1 \\ &= \frac{1}{p} - 1 \\ &= \frac{1-p}{p}\end{aligned}$$

linéarité de l'espérance

Conclusion : $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y_1 = n]\big) = (1-p)^n p$
$\mathbb{E}(Y_1) = \dfrac{1-p}{p}$.

6.c. En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- De la même façon qu'à la question 2, on a : $Y_k(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$[Y_k = n]$ est réalisé	si, et seulement si,	on obtient n FACE avant l'apparition du k-ième PILE
	si, et seulement si,	le $n+k$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu n FACE sur les $n+k-1$ lancers précédents
	si, et seulement si,	le $n+k$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu $k-1$ PILE sur les $n+k-1$ lancers précédents
	si, et seulement si,	$P_{n+k} \cap [X_{n+k-1} = k-1]$ est réalisé

D'où :

$$[Y_k = n] = [X_{n+k-1} = k-1] \cap P_{n+k}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y_k = n]\big) &= \mathbb{P}\big([X_{n+k-1} = k-1] \cap P_{n+k}\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X_{n+k-1} = k-1]\big) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) && \text{indépendance des lancers} \\
&= \binom{n+k-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^n \times p && X_{n+k-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+k-1;p) \\
&= \binom{n+k-1}{k-1} p^k (1-p)^n
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k(\Omega) = \mathbb{N}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) = \binom{n+k-1}{k-1} p^k (1-p)^n$.

⋆ Pour l'oral d'HEC ⋆

On peut justifier autrement ce résultat :
- les issues de $[Y_k = n]$ sont toutes équiprobables
- chaque issue de $[Y_k = n]$ est constituée de n FACE et k PILE ; la probabilité qu'elle apparaisse est donc égale à $p^k(1-p)^n$
- chaque issue de $[Y_k = n]$ se termine par une PILE ; pour le reste, il suffit de placer $k-1$ PILE sur les $n+k-1$ tirages précédents : il y a $\binom{n+k-1}{k-1}$ combinaisons possibles.

Exercice 14 - EDHEC 2018 E

On dispose de trois pièces indiscernables au toucher :

- une pièce numérotée 0 donnant PILE avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- une pièce numérotée 1 donnant PILE à coup sûr
- une pièce numérotée 2 donnant FACE à coup sûr

L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable l'une de ces trois pièces puis la lancer indéfiniment. On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience.
Pour $i \in \{0; 1; 2\}$, on note A_i l'évènement "on a choisi la pièce numérotée i". Ainsi, (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'évènements.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'évènement : "on obtient PILE au lancer numéro k" et $F_k = \overline{P_k}$.
On considère les deux variables aléatoires :

- X donnant le rang d'apparition du premier PILE
- Y donnant le rang d'apparition du premier FACE

On convient de donner à X la valeur 0 si l'on obtient jamais PILE et de donner à Y la valeur 0 si l'on obtient jamais FACE.

1. **Loi de X.**

1.a. Donner $X(\Omega)$.
$X(\Omega) = \mathbb{N}$

1.b. Déterminer $\mathbb{P}\big([X = 1]\big)$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_0, A_1, A_2), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X=1]\big) &= \mathbb{P}\big(A_0 \cap [X=1]\big) + \mathbb{P}\big(A_1 \cap [X=1]\big) + \mathbb{P}\big(A_2 \cap [X=2]\big) \\ &= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}\big([X=1]\big) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}\big([X=1]\big) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}\big([X=1]\big) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\forall i \in [\![0;2]\!],\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X=1]\big) = \frac{1}{2}$.

1.c. Montrer que : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([X=n]\big) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_0, A_1, A_2), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X=n]\big) &= \mathbb{P}\big(A_0 \cap [X=n]\big) + \mathbb{P}\big(A_1 \cap [X=n]\big) + \mathbb{P}\big(A_2 \cap [X=n]\big) \\ &= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}\big([X=n]\big) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}\big([X=n]\big) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}\big([X=n]\big)\end{aligned}$$

Or :

- la pièce 1 donne PILE dès le premier lancer et $n \geqslant 2$, d'où $\mathbb{P}_{A_1}\big([X=n]\big) = 0$
- la pièce 2 ne donne jamais PILE, donc $\mathbb{P}_{A_2}\big([X=n]\big) = 0$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X=n]\big) &= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{A_0}\big(F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n\big) + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{A_0}\big(F_1\big) \times \ldots \mathbb{P}_{A_0}\big(F_{n-1}\big) \times \mathbb{P}_{A_0}\big(P_n\big) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

par indépendance des lancers une fois A_0 réalisé

Conclusion : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([X=n]\big) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

★Subtil...★
Les évènements $P_1, P_2, \ldots$ sont indépendants pour $\mathbb{P}_{A_0}$; mais pas pour $\mathbb{P}$. Il suffirait pour cela de vérifier que $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \neq \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2)$.

1.d. En déduire la valeur de $\mathbb{P}\big([X=0]\big)$.
Puisque $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) = 1$.

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) = 1 &\iff \mathbb{P}\big([X=0]\big) + \mathbb{P}\big([X=1]\big) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) = 1 \\ &\iff \mathbb{P}\big([X=0]\big) + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1\end{aligned}$$

✘ Attention !
L'expression $\mathbb{P}\big([X=n]\big) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ n'est pas valable quand $n = 1$!!

$$\iff \mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

changement d'indice $i = n-2$

$$\iff \mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^2}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$\iff \mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^2}\times 2$$

$$\iff \mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{3}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{3}$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

- On sait que :

  X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in X(\Omega)} \left|n\mathbb{P}\big([X=n]\big)\right|$ est convergente

  si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est convergente, car $\forall n \in \mathbb{N},\ n\mathbb{P}\big([X=n]\big) \geqslant 0$

  si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 2} n\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est convergente

✘ Attention !
L'expression $\mathbb{P}\big([X=n]\big) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ n'est pas valable quand $n=1$... Puis, de toute façon, pour étudier la nature d'une série, inutile de regarder les premiers termes...

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} n\mathbb{P}\big([X=n]\big) &= \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{3}n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

  Or, $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{n\geqslant 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série géométrique dérivée convergente.

  Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 2} n\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est convergente.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}\big([X=n]\big) \\ &= 0\times\mathbb{P}\big([X=0]\big) + 1\times\mathbb{P}\big([X=1]\big) + \sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}\big([X=n]\big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 0 - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

✘ Attention !
Ne pas oublier que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ et que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Conclusion : X possède une espérance et $\mathbb{E}(X) = 1$.
Interprétation : en moyenne, sur un grand nombre de répétitions de l'expérience, le joueur obtiendra son premier PILE au premier lancer.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

- Par théorème de transfert :

  X^2 admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in X(\Omega)} \left|n^2\mathbb{P}\big([X=n]\big)\right|$ est convergente

  si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} n^2\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est convergente, car $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2\mathbb{P}\big([X=n]\big) \geqslant 0$

  si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 2} n^2\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est convergente

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} n^2 \mathbb{P}\big([X=n]\big) &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{3} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{N} \big(n(n-1)+n\big) \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{12} \sum_{n=2}^{N} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{N} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc les séries $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $\sum_{n \geqslant 2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ sont des séries géométriques convergentes.
Par conséquent, la série $\sum_{n \geqslant 2} n^2 \mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est convergente.

- On en déduit que X^2 admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}\big([X=n]\big) \\ &= 0 \times \mathbb{P}\big([X=0]\big) + 1 \times \mathbb{P}\big([X=1]\big) + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}\big([X=n]\big) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \mathbb{P}\big([X=1]\big) + \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{12} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \mathbb{E}(X) \\ &= \frac{4}{3} + 1\end{aligned}$$

calcul de la question précédente

- D'après la formule de Koenig-Huygens, X admet une variance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= \frac{4}{3} + 1 - 1 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Conclusion : X possède une variance et $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.
Les rôles PILE et FACE sont symétriques ici (car équiprobabilité du choix de la pièce initiale, puis équiprobabilité sur la pièce 0). Donc il est équivalent de compter le rang du premier PILE ou le rang du premier FACE...

Conclusion : X et Y suivent la même loi.

5. 5.a. Montrer que pour tout $j \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=1] \cap [Y=j]\big) = \mathbb{P}\big([Y=j]\big)$.
Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$.
Puisque $j \geqslant 2$, c'est la pièce 0 qui a été choisie... Ainsi :

$$[Y=j] = A_0 \cap P_1 \cap \ldots \cap P_{j-1} \cap F_j$$

Or $[X=1] = P_1$.
D'où :

$$\begin{aligned}[X=1] \cap [Y=j] &= P_1 \cap \big(A_0 \cap P_1 \cap \ldots \cap P_{j-1} \cap F_j\big) \\ &= A_0 \cap P_1 \cap \ldots \cap P_{j-1} \cap F_j \\ &= [Y=j]\end{aligned}$$

Les évènements étant égaux, leurs probabilités sont ainsi égales.

Conclusion : pour tout $j \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=1] \cap [Y=j]\big) = \mathbb{P}(Y=j)$.

5.b. Montrer que pour tout $i \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=i] \cap [Y=1]\big) = \mathbb{P}\big([X=i]\big)$.
Raisonnement analogue.

5.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Puisque $\mathbb{P}\big([X=1]\big) = \dfrac{1}{2}$ et que X et Y suivent la même loi :

$$\mathbb{P}\big([X=1]\big) \times \mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \frac{1}{4}$$

Mais : $[X=1] \cap [Y=1] = \varnothing$, car il est impossible d'avoir PILE et FACE au même lancer. D'où :

$$\mathbb{P}\big([X=1] \cap [Y=1]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}\big([X=1]\big) \times \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \neq \mathbb{P}\big([X=1] \cap [Y=1]\big)$$

♣ Méthode !
Il n'est pas rare de procéder ainsi, en cherchant une intersection vide parmi les cas simples.

Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

6. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

6.a. Expliquer pourquoi Z prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

Raisonnons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$
- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- $[Z=0] = [X=0] \cap [Y=0] = \varnothing$ (impossible de n'obtenir aucune PILE et aucun FACE)
- $[Z=2] = \big([X=0] \cap [Y=2]\big) \cup \big([X=2] \cap Y=0]\big) \cup \big([X=1] \cap Y=1]\big)$ et ces trois intersections sont vides (impossible de n'avoir aucun PILE et le premier FACE au second lancer... et impossible d'avoir le premier PILE et le premier FACE au premier lancer...).
  D'où $[Z=2] = \varnothing$.

On a ainsi :

$$Z(\Omega) \subset \mathbb{N} \setminus \{0;2\}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $i \in \mathbb{N} \setminus \{0;2\}$.
- Si $i = 1$: l'issue consistant à choisir la pièce 1 puis à n'obtenir que des PILE réalise l'évènement $[Z=1]$, car cette pièce ne donnera jamais FACE.
  D'où : $[Z=1] \neq \varnothing$.
- Si $i \geqslant 3$: l'issue consistant à choisir la pièce 0 puis à obtenir PILE des lancers 1 à $i-1$ et FACE ensuite réalisé l'évènement $[Z=i]$, car elle réalise l'évènement $[X=1] \cap [Y=i-1]$.
  D'où : $[Z=i] \neq \varnothing$.

On a établi :

$$\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0;2\},\ [Z=i] \neq \varnothing$$

Par conséquent :

$$\mathbb{N} \setminus \{0;2\} \subset Z(\Omega)$$

Conclusion : $Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0;2\}$.

6.b. Montrer que $\mathbb{P}\big([Z=1]\big) = \dfrac{2}{3}$.

D'après la formule des probabilités totales avec $\big([X=0],[X=1]\big)$ comme système complet d'évènements, on a :

➠Réflexe !
On s'intéresse à la loi d'une somme de variables aléatoires discrètes : on utilise la FPT !

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z=1]\big) &= \mathbb{P}\big([X=0] \cap [Y=1]\big) + \mathbb{P}\big([X=1] \cap [Y=0]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X=0]\big) \times \mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=1]\big) + \mathbb{P}\big([Y=0]\big) \times \mathbb{P}_{[Y=0]}\big([X=1]\big) \\
&= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=1]\big) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{[Y=0]}\big([X=1]\big)
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}\big([X=0]\big) \neq 0$ et $\mathbb{P}\big([Y=0]\big) \neq 0$ (valent $\frac{1}{3}$)

X et Y suivent la même loi et $\mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{3}$

Mais si $[X=0]$ est réalisé, cela implique d'avoir FACE dès le premier lancer, et donc $[Y=1]$ est réalisé. Par conséquent :

$$\mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=1]\big) = 1$$

De même :

$$\mathbb{P}_{[Y=0]}\big([X=1]\big) = 1$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Z=1]\big) = \dfrac{2}{3}$.

6.c. Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[Z=n] = \big([X=1] \cap [Y=n-1]\big) \cup \big([Y=1] \cap [X=n-1]\big)$$

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Puisque (P_1, F_1) est un système complet d'évènements, on a :

Petite remarque
On voit l'intérêt d'avoir travaillé la démonstration de la FPT pour avoir cette idée...

$$\begin{aligned}
[Z=n] &= \big(P_1 \cap [Z=n]\big) \cup \big(F_1 \cap [Z=n]\big) \\
&= \big([X=1] \cap [X+Y=n]\big) \cup \big([X=1] \cap [X+Y=n]\big) \\
&= \big([X=1] \cap [Y=n-1]\big) \cup \big([Y=1] \cap [X=n-1]\big)
\end{aligned}$$

$P_1 = [X=1]$ et $F_1 = [Y=1]$

Conclusion : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ [Z=n] = \big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$.

6.d. En déduire que :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([Z=n]\big) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z=n]\big) &= \mathbb{P}\left(\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)\right) && \text{incompatibilté de } [X=1] \text{ et } [Y=1]\text{, donc des deux évènements en jeu}\\
&= \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big) + \mathbb{P}\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big) && \text{questions 5.a., 5.b., licite car } n-1 \geqslant 2\\
&= \mathbb{P}\big([Y=n-1]\big) + \mathbb{P}\big([X=n-1]\big) && X \text{ et } Y \text{ ont même loi, et question 1(c) car } n-1 \geqslant 2\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([Z=n]\big) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

7. **Simulation informatique.** On rappelle que, en `Python`, la commande `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $]0;1[$, et que la commande `rd.randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire de $[\![a;b[\![$.

7.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme `Python` suivant afin que la fonction `simulX` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```
1  import numpy as np
2  import numpy.random as rd
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  def simulX():
6      piece=rd.randint(...,...)
7      x=1
8      if piece==0:
9          lancer=rd.random()
10         while ..............
11             ..............
12             ..............
13     else:
14         if piece==2:
15             ..............
16     return(x)
```

7.b. Justifier que le cas où l'on joue la pièce numérotée 1 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.
Dans le cas où la pièce 1 est jouée, le programme renverra 1, car `x` prend la valeur 1 dès la ligne 7. Si l'instruction `x=1` avait été placée à l'intérieur du `if piece==0`, il aurait fallu traiter le cas de la pièce 1.

7.c. On souhaite obtenir un histogramme des fréquences des valeurs de X sur 10000 réalisations de l'expérience.

7.c.i. Créer une liste `L` contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire X (on pourra faire appel à la fonction `simulX` précédente).

7.c.ii. A l'aide d'une écriture en compréhension, recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que la liste `Labs` contiennent les valeurs $-0.5, 0.5, \ldots, 9.5$.

```
Labs = ......................
plt.hist(L,Labs, density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

Voici le programme complet qui répond également aux questions précédentes :

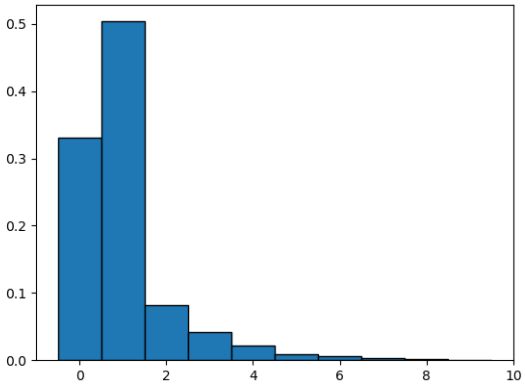
```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulX():
    piece=rd.randint(0,3)
    x=1
    if piece==0:
        lancer=rd.random()
        while lancer<1/2:
            lancer=rd.random()
            x=x+1
    else:
        if piece==2:
            x=0
    return(x)

L=[simulX() for k in range(10000)]

Labs=[-0.5+k for k in range(0,11)]
plt.hist(L,Labs, density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

7.c.iii. L'exécution des lignes précédentes permet d'obtenir le graphique suivant :



Expliquer l'intérêt des options **`density=True`** et **`edgecolor='k'`**.

`density=True` permet d'obtenir un histogramme de fréquences, et pas un histogramme d'effectifs. `edgecolor='k'`, c'est pour faire joli : on dessine les contours des rectangles pour plus de lisibilité...

Ce graphique permet-il de confirmer la loi obtenue pour la variable aléatoire X ?

Mais carrément ! ! On vérifie en particulier que pour tout $n \in [\![0;9]\!]$, $\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est très proche de la fréquence observée sur 10000 répétitions...

☞ **Pour info...**

C'est encore la loi faible des grands nombres !

Exercice 15 - EDHEC 2009 E

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivantes toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X;Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1.a. Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}\big([Z > k]\big)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z > k]\big) &= \mathbb{P}\big([X > k] \cap [Y > k]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X > k]\big)\mathbb{P}\big([Y > k]\big) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \big(\mathbb{P}\big([X > k]\big)\big)^2 && X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}\end{aligned}$$

Or $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc :

$$[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]$$

Ainsi, par incompatibilité des évènements de la famille $\big([X = i]\big)_{i \in \mathbb{N}^*}$, la série $\sum_{i \geqslant k+1} \mathbb{P}\big([X = i]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X > k]\big) &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = i]\big) \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} q^{i-1}p && \text{changement d'indice } j = k - (n+1) \\ &= p\sum_{j=0}^{+\infty} q^{j+n} \\ &= pq^n \frac{1}{1-q} && p = 1 - q \\ &= q^n\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z > k]\big) &= \Big(1 - \big(1 - q^k\big)\Big)^2 \\ &= \big(q^2\big)^k\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier naturel k, $\mathbb{P}\big([Z > k]\big) = q^{2k}$.

1.b. Établir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Z = k]\big) = \mathbb{P}\big([Z > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > k]\big)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$[Z \geqslant k] = [Z = k] \cup [Z > k]$$

Or, les évènements $[Z = k]$ et $[Z > k]$ sont incompatibles, d'où :

$$\mathbb{P}\big([Z \geqslant k]\big) = \mathbb{P}\big([Z = k]\big) + \mathbb{P}\big([Z > k]\big)$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}\big([Z = k]\big) = \mathbb{P}\big([Z \geqslant k]\big) - \mathbb{P}\big([Z > k]\big)$$

Mais, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. En particulier, Z est à valeurs entières, donc

$$[Z \geqslant k] = [Z > k-1]$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Z = k]\big) = \mathbb{P}\big([Z > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > k]\big)$.

1.c. En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

- On a déjà justifié : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Petite remarque
A ce stade, l'inclusion réciproque n'est pas établie, et cette inclusion est suffisante : elle sert essentiellement à la quantification en n qui suit...

- Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z=k]\big) &= \mathbb{P}\big([Z>k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z>k]\big) \\ &= q^{2k-2} - q^{2k} \\ &= q^{2k-2}(1-q^2) \\ &= \left(q^2\right)^{k-1}(1-q^2) \\ &= \left(1-(1-q^2)\right)^{k-1}(1-q^2)\end{aligned}$$

question **1.a.**, licite car $k-1, k \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

On obtient en particulier : $\mathbb{P}\big([Z=k]\big) \neq 0$, et donc $[Z=k] \neq \varnothing$. Ce qui prouve que $\mathbb{N}^* \subset Z(\Omega)$.

Petite remarque
On ne tarde pas trop sur l'inclusion réciproque ; qui n'est même pas vraiment nécessaire...

Conclusion : Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :

$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) = \begin{cases} \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ \dfrac{1+X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$$

2.a. Expliquer soigneusement ce que renvoie la fonction **Python** suivante.

```
1 import numpy.random as rd
2 def mystere(p):
3     n=1
4     while rd.random()<1-p:
5         n=n+1
6     return n
```

La variable **n** débute à 1 puis est incrémentée à chaque répétition de la boucle **while**. On sait que la commande **rd.random()** renvoie un réel aléatoire de $]0;1[$; par conséquent, les lignes 4 et 5 modélisent des répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli dont l'échec est de probabilité $1-p$, donc le succès de probabilité p, tant qu'on obtient un échec. A la fin du programme, la variable **n** sera égale au nombre de répétitions nécessaires à l'obtention du premier succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.

Conclusion : la fonction **mystere** renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

2.b. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel p de $]0;1[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire T.
Ce programme pourra utiliser la fonction **mystere** précédente et on rappelle qu'en **Python**, l'exécution de **a%b** renvoie le reste de la division euclidienne de **a** par **b**.

```
def simulT(p):
    X=mystere(p)
    if X%2==0: #cad si X est pair
        return X/2
    else :
        return (1+X)/2
```

☞ Pour info...
On pourrait aussi rapidement démontrer que $T = \left\lfloor \dfrac{1+X}{2} \right\rfloor$ et utiliser cette expression pour simuler une réalisation de T.

2.c. Montrer que T prend des valeurs entières positives non nulles.
Montrons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :

Autrement dit :
Montrons :
$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \in \mathbb{N}^*$$

- **Si $X(\omega)$ est pair :**
  Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, il existe alors un entier naturel non nul k (que l'on considère ensuite) tel que $X(\omega) = 2k$. Ainsi :
  $$\begin{aligned} T(\omega) &= \frac{X(\omega)}{2} \\ &= k \end{aligned}$$
  D'où, puisque $k \neq 0$: $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$.
- **Si $X(\omega)$ est impair :**
  Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, il existe alors un entier naturel k (que l'on considère ensuite) tel que $X(\omega) = 2k+1$. Ainsi :
  $$\begin{aligned} T(\omega) &= \frac{1+X(\omega)}{2} \\ &= k+1 \end{aligned}$$
  D'où, puisque $k \in \mathbb{N}$: $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

Dans les deux cas : $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion : T prend des valeurs entières positives non nulles.

2.d. Réciproquement, justifier que tout entier naturel non nul k est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $k \in T(\Omega)$.
  On a $2k \in \mathbb{N}^*$, et puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, il existe $\omega \in \Omega$ (que l'on considère ensuite) tel que $2k = X(\omega)$.
  Mais, dans ce cas :
  $$\begin{aligned} T(\omega) &= \frac{X(\omega)}{2} \\ &= k \end{aligned}$$
  Par conséquent : $k \in T(\Omega)$.
- On vient d'établir : $\mathbb{N}^* \subset T(\Omega)$. Or, à la question précédente, on a établi : $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Autrement dit :
Montrons :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k \in T(\Omega)$$
Autrement dit, montrons :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists \omega \in \Omega \ /\ k = T(\omega)$$

Conclusion : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2.e. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction de certains évènements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a immédiatement :
  $$[T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k - 1]$$
- * On a déjà, d'après les questions 1.c. et 2.c. : $T(\Omega) = \mathbb{N}^* = Z(\Omega)$.
  * Soit ensuite $k \in \mathbb{N}^*$. On a :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([T = k]\big) &= \mathbb{P}\big([X = 2k] \cup [X = 2k - 1]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X = 2k]\big) + \mathbb{P}\big([X = 2k - 1]\big) && [X = 2k] \text{ et } [X = 2k - 1] \text{ sont incompatibles} \\ &= pq^{2k-1} + pq^{2k-2} && 2k, 2k - 1 \in \mathbb{N}^* \\ &= q^{2k-2}p(q + 1) \\ &= \left(q^2\right)^{k-1}(1 - q)(1 + q) && p = 1 - q \\ &= \left(q^2\right)^{k-1}(1 - q^2) \\ &= \mathbb{P}\big([Z = k]\big) \end{aligned}$$

Conclusion : T suit la même loi que Z.

Exercice 16 - Inspiré de EML 2010 E et EDHEC 2007 E

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1 etX_2 les variables aléatoires égales aux durées respectives des opérations des clients C_1 et C_2. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1-p$.
Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. 1.a. Rappeler la loi de la variable aléatoire X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

> **Conclusion :** $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_1 = k]\big) = q^{k-1}p$; $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$; $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$.

1.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant n]\big) = 1 - q^n$. Cette relation est-elle encore valable quand $n = 0$?

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant n]\big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_1 = k]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p && \text{changement d'indice } i = k-1 \\
&= p\sum_{i=0}^{n-1} q^i && q \neq 1 \text{ car } p \neq 0 \\
&= p\frac{1-q^n}{1-q} && p = 1-q \\
&= 1 - q^n
\end{aligned}$$

> **Petite remarque**
> On peut également détailler ainsi :
> • Puisque $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :
> $[X_1 \leqslant n] = \bigcup_{k=1}^{n} [X_1 = k]$
> • par incompatibilité, on obtient...

- Ensuite, on sait que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant 0]\big) = 0$. Et $1 - q^0 = 0$. La relation est donc encore valable quand $n = 0$.

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant n]\big) = 1 - q^n$.

2. On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente du client C_3 avant de pouvoir se présenter à un guichet. De cette façon, $T = \min(X_1, X_2)$.

2.a. Sans utiliser la commande `min`, écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simulT(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire T dans le cas où X_1 et X_2 suivent des lois géométriques de paramètre p.

```python
import numpy.random as rd

def simulT(p):
    X1=rd.geometric(p)
    X2=rd.geometric(p)
    if X1<X2:
        return X1
    else:
        return X2
```

2.b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}\big([T > n]\big)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([T > n]\big) &= \mathbb{P}\big([\min(X_1, X_2) > n]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X_1 > n] \cap [X_2 > n]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X_1 > n]\big) \times \mathbb{P}\big([X_2 > n]\big) && \text{indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\
&= \big(1 - \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant n]\big)\big) \times \big(1 - \mathbb{P}\big([X_2 \leqslant n]\big)\big) \\
&= \big(1 - (1-q^n)\big)^2 && \text{question 2.a., et } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi} \\
&= q^{2n}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([T > n]\big) = q^{2n}$.

> **♣ Méthode !**
> Si $Z = \max(X, Y)$, on travaille sur $\mathbb{P}\big([T \leqslant x]\big)$ (la fonction de répartition) pour ensuite avoir la loi de T.
> Si $Z = \min(X, Y)$, on travaille sur $\mathbb{P}\big([T > x]\big)$ (ou $\mathbb{P}\big([T \geqslant x]\big)$) pour ensuite avoir la loi de T (ou reconnaître sa fonction de répartition).
> C'est bien ce que demande l'énoncé dans cet enchaînement de questions.

2.c. En déduire que T suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

- Puisque X_1 et X_2 suivent des lois géométriques, on a déjà $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a :
$$[T \geqslant n] = [T = n] \cup [T > n]$$
  Or, les évènements $[T = n]$ et $[T > n]$ sont incompatibles, d'où :
$$\mathbb{P}\big([T \geqslant n]\big) = \mathbb{P}\big([T = n]\big) + \mathbb{P}\big([T > n]\big)$$
  Et ainsi :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([T = n]\big) &= \mathbb{P}\big([T \geqslant n]\big) - \mathbb{P}\big([T > n]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([T > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([T > n]\big) && \text{$T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$} \\
&= q^{2n-2} - q^{2n} && \text{question précédente, licite car $n-1, n \in \mathbb{N}$} \\
&= q^{2n-2}(1-q^2) \\
&= \big(1-(1-q^2)\big)^{n-1}(1-q^2)
\end{aligned}$$

Conclusion : T suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

3. On définit maintenant la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

3.a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}\big([\Delta = 0]\big)$.

Réflexe ! On s'intéresse à la probabilité que deux VA soient égales, on pense à la FPT !

On a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([\Delta = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([|X_1 - X_2| = 0]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X_1 = X_2]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = X_2] \cap [X_2 = k]\big) && \text{formule des probabilités totales, avec $\big([X_2 = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme sce} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = k] \cap [X_2 = k]\big) && \text{indépendance de X_1 et X_2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = k]\big) \times \mathbb{P}\big([X_2 = k]\big) && \text{X_1 et X_2 suivent des lois géométriques de paramètre p} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-2} p^2 \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \big(q^2\big)^{k-1} && \text{changement d'infice $i = k-1$} \\
&= p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \big(q^2\big)^{i} \\
&= p^2 \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} && \text{$p = 1-q$} \\
&= \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([\Delta = 0]\big) = \dfrac{p}{1+q}$.

3.b. Soit n un entier naturel non nul. Établir :
$$\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) = 2\frac{pq^n}{1+q}$$

Rappel... $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+$
$$|x| = a \iff \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$$

On a :
$$\begin{aligned}
[\Delta = n] &= [|X_1 - X_2| = n] \\
&= [X_1 - X_2 = n] \cup [X_2 - X_1 = n]
\end{aligned}$$
Or $n \neq 0$, donc les évènements $[X_1 - X_2 = n]$ et $[X_2 - X_1 = n]$ sont incompatibles, d'où :
$$\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 - X_2 = n]\big) + \mathbb{P}\big([X_2 - X_1 = n]\big)$$
Mais X_1 et X_2 suivent toutes deux la même loi, donc $X_1 - X_2$ et $X_2 - X_1$ également et ainsi :
$$\mathbb{P}\big([X_2 - X_1 = n]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 - X_2 = n]\big)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) &= 2\mathbb{P}\big([X_1 = X_2 + n]\big) \\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_2 = k] \cap [X_1 = X_2 + n]\big) && \text{formule des probabilités totales avec } \big([X_2 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ comme sce} \\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_2 = k] \cap [X_1 = k + n]\big) && \text{indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_2 = k]\big)\mathbb{P}\big([X_1 = k + n]\big) && k \in X_2(\Omega) \text{ et } k + n \in X_1(\Omega) \\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^{k+n-1}p \\
&= 2p^2q^k \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\
&= 2p^2q^n \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} && \text{calcul fait en question précédente} \\
&= 2p^2q^n \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{2pq^n k}{1+q}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) = 2\dfrac{pq^n}{1+q}$.

3.c. Justifier alors que $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$.

Par double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Immédiat X_1 et X_2 sont à valeurs entières et que $\Delta = |X_1 - X_2|$.

$\boxed{\supset}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes, on a $\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) \neq 0$, donc $[\Delta = n] \neq \varnothing$. Ainsi, $n \in \Delta(\Omega)$. D'où :

$$\mathbb{N} \subset \Delta(\Omega)$$

Conclusion : $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$.

3.d. Montrer que Δ admet une espérance et la calculer.

- On sait que :

  Δ admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\in\Delta(\Omega)} \big|n\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big)\big|$ est convergente

  si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big)$ est convergente, car $ptn \in \mathbb{N},\ n\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) \geqslant 0$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) &= \sum_{n=0}^{N} n\frac{2pq^n}{1+q} \\
&= \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=0}^{N} nq^{n-1}
\end{aligned}$$

  Or $q \in]-1;1[$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nq^{n-1}$ est une série géométrique convergente. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big)$ est convergente.

- On en déduit que Δ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Delta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) \\
&= \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} \\
&= \frac{2pq}{1+q}\frac{1}{(1-q)^2} && p = 1 - q \\
&= \frac{2q}{1-q^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : Δ admet une espérance et $\mathbb{E}(\Delta) = \dfrac{2q}{1-q^2}$.

4. Dans cette question, on suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, d'après le résultat de la question ?? la variable aléatoire T suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{3}{4}$. Afin de compenser son attente, le client C_3 se voit proposer une réduction sur son prochain billet de train.
Si $n \in \mathbb{N}^*$ désigne l'attente subie par C_3 (représentée par la variable aléatoire T), alors celui-ci pioche au hasard un jeton dans une urne composée de n jetons numérotés de 1 à n.
Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, le tirage du jeton numéro k entraînera une réduction de k euros. On note R la variable aléatoire égale au montant de la réduction obtenue par le client C_3.

4.a. Soient $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_{[T=n]}\big([R = k]\big)$. *On distinguera les cas $k > n$ et $k \leqslant n$.*
Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
Supposons l'évènement $[T = n]$ réalisé. Dans ce cas, l'urne est composée de n jetons numérotés de 1 à k.

- Si $k > n$:
  Puisque $k > n$, il est impossible de tirer un jeton dont le numéro est k. D'où :
  $$\mathbb{P}_{[T=n]}\big([R = k]\big) = 0$$
- Si $k \leqslant n$:
  L'évènement $[R = k]$ est ainsi réalisé si, et seulement si, on tire le jeton numéro k parmi les n jetons possibles.
  Par équiprobabilité du choix des jetons dans l'urne, on a alors :
  $$\mathbb{P}_{[T=n]}\big([R = k]\big) = \frac{1}{n}$$

Conclusion : pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{[T=n]}\big([R = k]\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}$.

4.b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([R = k]\big) = 3\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([T = n]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\big([T = n] \cap [R = k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([R = k]\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T = n] \cap [R = k]\big) && \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([T = n]\big) \neq 0 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T = n]\big)\mathbb{P}_{[T=n]}\big([R = k]\big) && \text{question précédente : } \forall n < k, \text{ alors } \mathbb{P}_{[T=n]}\big([R = k]\big) = 0 \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T = n]\big)\mathbb{P}_{[T=n]}\big([R = k]\big) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1}\right)^{n-1}\frac{1}{n} \\
&= 3\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

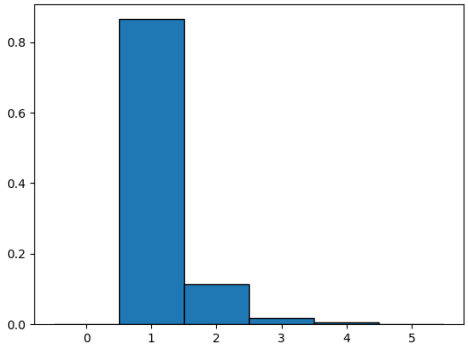
Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([R = k]\big) = 3\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

4.c. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simulR()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire R.

```python
import numpy.random as rd

def simulR():
    T=simulT(1/2)
    return rd.randint(1,T+1)
```

4.d. Écrire un programme `Python` dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous, représentant l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire R.



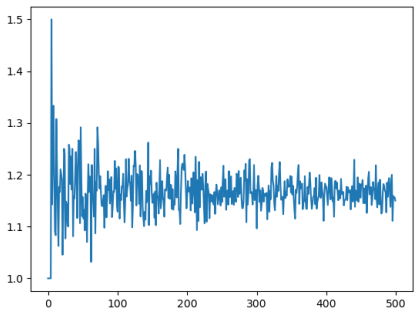

```python
import numpy.random as rd

LR=[simulR() for k in range(10000)]
Labs=[-0.5+k for k in range(0,7)]
plt.hist(LR,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

4.e. On considère la fonction **mystere** écrite en **Python** :

```python
def mystere():
    LE=[]
    for n in range(1,501):
        LR=[simulR() for k in range(n)]
        E=sum(LR)/n
        LE.append(E)
    plt.plot(range(500),LE)
    plt.show()
```

L'exécution de **mystere()** affiche le graphique ci-dessous :



Interpréter ce graphique. On veillera en particulier à décrire le contenu de la liste **LE** après l'exécution de **mystere()**.

- Ici, n parcourt $[\![1;1000]\!]$. Pour chaque $n \in [\![1;1000]\!]$, **LR** sera une liste de n réalisations de la variable aléatoire R ; et **E** sera la moyenne des valeurs de R sur ces n réalisations.
- Ainsi, la liste **LE** contient 1000 moyennes de réalisations de R sur des répétitions de plus en plus nombreuses.

Le graphique permet alors d'observer que la *moyenne empirique* semble se stabiliser autour de $1,15$.

Conclusion : d'après la loi faible des grands nombres, on peut donc penser que X possède une espérance environ égale à $1,15$.

Petite remarque

Ni l'expression *moyenne empirique*, ni la mention de la *loi faible des grands nombres* ne sont exigées en 1A ; mais en fin de 2A, oui.

4.f. 4.f.i. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$.

On a, en commençant par le changement d'indice $i = k-1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} x^i \\ &= \frac{1-x^n}{1-x}\end{aligned}$$

$x \neq 1$

☞ Pour info...

On trouve $\mathbb{E}(R) = \dfrac{7}{6}$ calcul qui peut être fait d'ailleurs, en admettant simplement la permutation des sommes nécessaire... après avoir justifié l'existence de l'espérance de R bien entendu. Bon exercice à faire !

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$.

4.f.ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \ln(4) - \ln(3) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{4}\right],\ \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

D'où, en intégrant de 0 à $\frac{1}{4}$, licite car les fonctions en jeu sont continues sur le segment $\left[0; \frac{1}{4}\right]$:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{4}} x^{k-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \left[-\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{4}} - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

Et ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \ln(4) - \ln(3) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$.

4.f.iii. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx = 0$.

Réflexe !
L'intégrande est positive... On cherche donc à encadrer l'intégrale (et donc l'intégrande auparavant) par une expression de limite nulle quand $n \to +\infty$... Ce x^n nous fait de l'œil !

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - Soit $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. On a ainsi :

    $$\frac{3}{4} \leqslant 1-x \leqslant 1$$

    D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

    $$\frac{4}{3} \geqslant \frac{1}{1-x} \geqslant 1$$

    Puis, comme $x^n \geqslant 0$:

    $$\frac{4}{3}x^n \geqslant \frac{x^n}{1-x} \geqslant x^n$$

    On a donc établi, par transitivité :

    $$\forall x \in \left[0; \frac{1}{4}\right],\ 0 \leqslant \frac{x^n}{1-x} \leqslant \frac{4}{3}x^n$$

  - Par croissance de l'intégrale, licite car $\frac{1}{4} \geqslant 0$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $\left[0; \frac{1}{4}\right]$:

    $$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{4}{3}x^n\,dx$$

    Or :

    $$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{4}{3}x^n\,dx = \frac{4}{3(n+1)}$$

- On a ainsi :
  - ✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqslant \frac{4}{3(n+1)}$
  - ✓ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3(n+1)} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx = 0$.

4.f.iv. Établir alors que $\mathbb{P}\big([R=1]\big) = 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big)$ puis donner la valeur de $\mathbb{P}\big([R=2]\big)$.

- D'après la question **4.b.** :

$$\mathbb{P}\big([R=1]\big) = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Mais, d'après les deux questions précédentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \ln(4)-\ln(3)$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([R=1]\big) = 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big)$.

- De la même façon :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([R=2]\big) &= 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&= 3\left(3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{4}\right) \\
&= 3\mathbb{P}\big([R=1]\big) - \frac{3}{4} \\
&= 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big) - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([R=2]\big) = 3\mathbb{P}\big([R=1]\big) - \frac{3}{4} = 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big) - \frac{3}{4}$.

4.f.v. Utiliser les résultats précédents pour donner une valeur approchée de $\mathbb{P}\big([R\geqslant 3]\big)$. *On donne :* $\mathbb{P}\big([R=1]\big) \simeq 0,86$.

Puisque $R(\Omega) = \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([R\geqslant 3]\big) &= 1 - \big(\mathbb{P}\big([R=1]\big) + \mathbb{P}\big([R=2]\big)\big) \\
&= 1 - \left(2\mathbb{P}\big([R=1]\big) - \frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{7}{4} - 2\mathbb{P}\big([R=1]\big) \\
&\simeq 1,75 - 2\times 0,86
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([R\geqslant 3]\big) \simeq 0,03$.

Petite remarque

Vous pensiez vraiment pouvoir obtenir une grosse réduction à la SNCF ?!

Exercice 17 - EDHEC 2019 E

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une balle noire non numérotée et $n-1$ balles blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces balles au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la balle noire.
Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i-ème tirage donne une balle blanche", on pose $N_i = \overline{B_i}$ et on note X_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X_n.
On a $X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
Justifions ce résultat (même si ce n'était ici pas demandé).

♣ Méthode !
Il s'agit d'établir l'égalité de deux ensembles, raisonnons pas double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Puisque X_n est le rang d'apparition de la balle noire, on a déjà $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Mais, puisque les tirages sont effectués sans remise et qu'il y a n balles dans l'urne, on a en fait :

$$X_n(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$$

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in [\![1; n]\!]$.

* Si $k = 1$: l'issue consistant à tirer la balle noire au premier tirage réalise l'évènement $[X_n = 1]$.
Ainsi $[X_n = 1] \neq \varnothing$.
* Si $k \in [\![2; n]\!]$: l'issue consistant à tirer pour tout $i \in [\![1; k-1]\!]$, la balle blanche numérotée i au i-ème tirage puis la noire au k-ième tirage réalise l'évènement $[X_n = k]$.
Ainsi $[X_n = k] \neq \varnothing$.

On a établi :

$$\forall k \in [\![1; n]\!],\ [X_n = k] \neq \varnothing$$

D'où :

$$[\![1; n]\!] \subset X_n(\Omega)$$

Conclusion : $X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

2. 2.a. Pour tout $i \in [\![2; n-1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i)$.
Soit $i \in [\![2; n-1]\!]$.
Supposons l'évènement $B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}$ réalisé. Les $i-1$ premier tirages ont ainsi tous donné une balle blanche. Par conséquent, les tirages étant effectués sans remise : pour le i-ème tirage, l'urne est composée de $n-(i-1)$ balles, dont toujours la noire.
D'où, par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne, on a :

Petite remarque
L'énoncé sous-entend ici que $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}) \neq 0$.

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

Conclusion : pour tout $i \in [\![2; n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

2.b. Établir alors :

$$\forall k \in X_n(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \frac{1}{n}$$

Soit $k \in [\![1; n]\!]$.

- Si $k = 1$:
L'évènement $[X_n = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on pioche directement la balle noire.
Ainsi :

$$[X_n = 1] = N_1$$

Et alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) &= \mathbb{P}(N_1) \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

équiprobabilité du choix des balles

- Si $k \in [\![2; n]\!]$:
L'évènement $[X_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, les $k-1$ premiers tirages ont donné des balles blanches et la balle noire a été tirée au k-ième. D'où :

Petite remarque
En prêtant un peu attention à l'énoncé, on remarque que l'évènement N_n n'est pas défini. Simple oubli semble-t-il, utilisons-le quand-même, sa définition est implicite.

$$\begin{aligned}[X_n = k] &= \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap N_k \\ &= B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule des probabilités composées (puisque $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \neq 0$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k)\end{aligned}$$

Or :

* $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{n-1}{n}$
* et, par un raisonnement analogue à ce qui a été fait en question précédente :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(N_k) = \frac{1}{n-k+1}$$

D'où, d'après la question précédente, licite car $k \leqslant n$, donc $k-1 \in [\![2; n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{1}{n} \times 1 \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

télescopage

Conclusion : $\forall k \in X_n(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \dfrac{1}{n}$.

2.c. En déduire l'espérance et la variance de X_n, notées respectivement $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
D'après la question précédente, on voit que X_n suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$.

Conclusion : X_n possède une espérance et une variance et : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la balle numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

3.a. Pour tout $k \in X_n(\Omega)$, montrer que :

$$\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y = 0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Soit $k \in [\![1; n]\!]$.

$[X_n = k] \cap [Y = 0]$ est réalisé	si, et seulement si,	la balle noire est tirée au k-ième tirage et la balle numéro 1 n'a pas été tirée
	si, et seulement si,	les tirages 1 à $k-1$ ont donné une balle blanche numérotée 0 et le k-ième tirage la noire

En notant, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $B_{i,0}$: "le i-ème tirage donne une balle blanche numérotée 0", on a ainsi :

$$[X_n = k] \cap [Y = 0] = B_{1,0} \cap B_{2,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0} \cap N_k$$

D'où, d'après la formule des probabilités composées (puisque $\mathbb{P}(B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0}) \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [Y = 0]\big) &= \mathbb{P}(B_{1,0} \cap B_{2,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0} \cap N_k) \\
&= \mathbb{P}(B_{1,0}) \times \mathbb{P}_{B_{1,0}}(B_{2,0}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{k-2,0}}(B_{k-1,0}) \times \mathbb{P}_{B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0}}(N_k)
\end{aligned}$$

Or :

- par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne : $\mathbb{P}(B_{1,0}) = \dfrac{n-2}{n}$
- $\mathbb{P}_{B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$: en effet, si $B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0}$ est réalisé, alors, au tirage k, l'urne est composée de $n-(k-1)$ balles, dont une seule noire... Dans ce cas, par équiprobabilité du choix des balles, la probabilité de tirer la noire au k-ième tirage est $\dfrac{1}{n-k+1}$.
- pour tout $i \in [\![2; n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{i-1,0}}(B_{i,0}) = \dfrac{n-i-1}{n-i+1}$: en effet, si $B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{i-1,0}$ est réalisé, alors, au tirage i, l'urne est composée de $n-(i-1)$ balles, dont la noire, la blanche numérotée 1, et le reste étant des blanches numérotées 0 (il y en a donc $n-(i-1)-2 = n-i-1$). Dans ce cas, par équiprobabilité du choix des balles, la probabilité de tirer une blanche au i-ième tirage est $\dfrac{n-i-1}{n-i+1}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [Y = 0]\big) &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-(k-1)-1}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \ldots \times \frac{n-k+1}{n-k+3} \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{n-1} \times (n-k) \times 1 \\
&= \frac{n-k}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

télescopage avec décalage de 2

Conclusion : $\forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [Y = 0]\big) = \dfrac{n-k}{n(n-1)}$.

3.b. En déduire, grâce à la formule des probabilités totales, la valeur de $\mathbb{P}\big([Y = 0]\big)$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_n = k]\big)_{k \in [\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y = 0]\big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [Y = 0]\big) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)} && \text{linéarité de la somme, changement d'indice } i = n-k \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Réflexe !

Grâce à la question précédente, on connaît tous les $\mathbb{P}(A_i \cap B)$, et on veut $\mathbb{P}(B)$: FPT !! Est-ce que $(A_i)_i$ est bien un sce ? Oui, alors on fonce !

Petite remarque

Le changement d'indice n'était pas nécessaire. Il est aussi possible de faire : $\sum_{k=1}^{n}(n-k) = \sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k = \ldots$

Mais c'est plus calculatoire...

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y = 0]\big) = \dfrac{1}{2}$.

3.c. Déduire alors la loi de Y.

On sait que $Y(\Omega) = \{0; 1\}$. Or, d'après la question précédente : $\mathbb{P}\big([Y = 0]\big) = \dfrac{1}{2}$.

D'où :

$$\mathbb{P}\big([Y = 1]\big) = \frac{1}{2}$$

Conclusion : Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

4. 4.a. Recopier et compléter le script **Python** suivant de sorte que l'exécution de **simul_X(n)** simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie la valeur de X_n associée. *On admettra que la balle noire est codée tout au long de ce script par le nombre* ***N***.

```python
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul_X(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    while u!=N:
        N=...
        u=...
        X=...
    return X
```

```python
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul_X(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    while u!=N:
        N=N-1
        u=rd.randint(1,N+1)
        X=X+1
    return X
```

4.b. En utilisant la fonction créée à la question précédente, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **esp_var_X(n)** renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_n)$ et une de $\mathbb{V}(X_n)$.

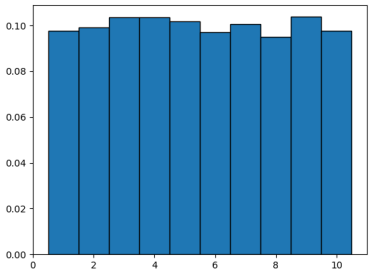
```python
def simul_esp_var(n):
    L=[simul_X(n) for k in range(10000)]
    L2=[x**2 for x in L]          #liste pour th de transfert
    E=sum(L)/len(L)
    V=sum(L2)/len(L2)-E**2        #KH
    return E,V
```

4.c. Recopier et compléter le programme suivant afin que son exécution affiche l'histogramme obtenu à partir de 10000 réalisations de la variable aléatoire X_n, où n est saisi par l'utilisateur.

```python
n=int(input("n=?"))
Labs=
LX=
plt.hist(LX,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

```python
n=int(input("n=?"))
Labs=[-0.5+k for k in range(1,n+2)]
LX=[simul_X(10) for k in range(10000)]
plt.hist(LX,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

4.d. On a exécuté le programme de la question précédente en saisissant $n = 10$ et on a obtenu le graphique qui suit. Expliquer en quoi le graphique est cohérent avec la loi de X_n obtenue en question 2.b..



✘ Attention !
C'est un histogramme de **fréquences**, et non de probabilités !!

Puisque cet histogramme de fréquences est obtenu sur un grand nombre de réalisations de la variable aléatoire X_{10}, on peut légitimement penser qu'il se rapproche de la distribution de probabilité de la variable aléatoire X_{10}.

Pourquoi ?
C'est la **loi faible des grands nombres** qui justifie cela.

Or, on avait trouvé : $X_{10}(\Omega) = [\![1;10]\!]$ et $\forall k \in [\![1;10]\!]$, $\mathbb{P}\big([X_{10} = k]\big) = \dfrac{1}{10}$. Ceci est bien cohérent avec l'histogramme des fréquences obtenu.

4.e. Écrire une fonction de sorte que l'exécution de `simul_XY(n)` simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie les valeurs de X_n et Y associées.

```python
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    Y=0
    while u!=N:
        if u==1:
            Y=1
        N=N-1
        u=rd.randint(1,N+1)
        X=X+1
    return X,Y
```

Petite remarque
Le numéro N correspond toujours à la balle noire ; et le numéro 1 à la balle blanche numérotée 1.

Exercice 18 - EDHEC 2018 S

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \ldots, n$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n puis donner son espérance et sa variance.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - On a déjà, d'après l'énoncé : $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
   - Et, puisqu'à l'instant n, le mobile se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse 0,1,...,n, on a :
   $$\forall k \in [\![0; n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \frac{1}{\text{Card}\big([\![0; n]\!]\big)}$$

   Conclusion : X_n suit la loi uniforme sur $[\![0; n]\!]$ et on a ainsi : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{12} = \dfrac{n(n+2)}{12}$.

2. On note Y l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Y la valeur 0 si le mobile ne revient jamais à l'origine. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   Important ! J'ai envie de dire que l'on raisonne toujours pas double-inclusion pour ce type de question. Il faut au moins en être conscient et le rédiger dans ce sens.

   2.a. Justifier que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Raisonnons pas double-inclusion...

   $\boxed{\subset}$ Y désigne l'instant auquel le mobile revient à l'origine, donc on a $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

   $\boxed{\supset}$
   - D'après l'énoncé, $0 \in Y(\Omega)$.
   - Ensuite, on remarque que l'issue consistant à rester sur l'origine à l'instant 1 réalise l'évènement $[Y = 1]$, donc $[Y = 1] \neq \varnothing$.
   - Soit $j \in [\![2; +\infty[\![$.
     L'issue consistant à être au point d'abscisse 1 des instants 1 à $j - 1$, puis à l'origine à l'instant j réalise l'évènement $[Y = j]$. Ainsi, $[Y = j] \neq \varnothing$.

   On a ainsi établi :
   $$\forall j \in \mathbb{N},\ [Y = j] \neq \varnothing$$
   Par conséquent :
   $$\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$$

   ♣ Méthode ! Il faut exhiber **une** issue pour justifier que l'évènement $[Y = j]$ n'est pas vide. Et pour exhiber une issue, on explicite le déroulement de l'expérience depuis le début !

   Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

   2.b. Pour tout entier naturel i non nul, exprimer l'événement $[Y = i]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_i$.

   Soit $i \in \mathbb{N}^*$.
   - Si $i = 1$:
     L'évènement $[Y = 1]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile reste à l'origine à l'instant 1. D'où :
     $$\boxed{[Y = 1] = [X_1 = 0]}$$
   - Si $i \geqslant 2$:
     $[Y = i]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile revient pour la première fois à l'origine à l'instant n
     si, et seulement si, des instants 1 à $i - 1$ le mobile ne va jamais à l'origine, puis il y retourne à l'instant i

     Par conséquent :
     $$\boxed{[Y = i] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} [X_k \neq 0]\right) \cap [X_i = 0]}$$

     ✓ Rigueur ! Pour que cette phrase ait bien du sens, il faut que $i - 1 \geqslant 1$, donc que $i \geqslant 2$: cas dans lequel nous nous sommes bien placés et ça en est même la raison.

     Petite remarque Avec la convention $\bigcap_{k\in\varnothing} \ldots = \Omega$, on pourrait regrouper les deux cas.

   2.c. En déduire : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Y = i]\big) = \dfrac{1}{i(i+1)}$.
   Soit $i \in \mathbb{N}^*$.
   - Si $i = 1$:
     D'après la question précédente, on a alors :
     $$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
     question 1.

- Si $i \geqslant 2$:
  D'après la question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=i]\big) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}[X_k \neq 0]\right) \cap [X_i = 0]\right) && \text{indépendance mutuelle des variables aléatoires } X_1, X_2, \ldots, X_i \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}\big([X_k \neq 0]\big)\right) \mathbb{P}\big([X_i = 0]\big) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} (1 - \mathbb{P}\big([X_k = 0]\big)\right) \mathbb{P}\big([X_i = 0]\big) && \text{question 1.} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right) \frac{1}{i+1} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} \frac{k}{k+1}\right) \frac{1}{i+1} && \text{télescopage} \\
&= \frac{1}{i}\frac{1}{i+1}
\end{aligned}$$

Les deux cas peuvent se regrouper...

Conclusion : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Y=i]\big) = \dfrac{1}{i(i+1)}$.

2.d. Vérifier par le calcul que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i]\big) = 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}\big([Y=i]\big) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i(i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) && \text{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+1} && \text{télescopage} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{N \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

Conclusion : la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}\big([Y=i]\big)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i]\big) = 1$.

Petite remarque

Il n'est pas nécessaire de mentionner la convergence de la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}\big([Y=i]\big)$, pour deux raisons :
- ce n'est pas demandé,
- elle est une conséquence directe du fait que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 0} \mathbb{P}\big([Y=i]\big)$.

2.e. Déterminer alors $\mathbb{P}\big([Y=0]\big)$ et interpréter le résultat.

On sait que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 0} \mathbb{P}\big([Y=i]\big)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i]\big) = 1$. Mais, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i]\big) = 1$. Par conséquent :

$$\mathbb{P}\big([Y=0]\big) = 0$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y=0]\big) = 0$. Le mobile reviendra presque-sûrement au moins une fois à l'origine.

2.f. Démontrer que la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.

- On sait que :

Y admet une espérance	si, et seulement si,	la série $\displaystyle\sum_{i \in Y(\Omega)} \big\lvert i\mathbb{P}\big([Y=i]\big)\big\rvert$ est convergente
	si, et seulement si,	la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 0} i\mathbb{P}\big([Y=i]\big)$ est convergente, car $\forall i \in \mathbb{N},\ i\mathbb{P}\big([Y=i]\big) \geqslant 0$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N} i\mathbb{P}\big([Y=i]\big) &= \sum_{i=1}^{N} i\mathbb{P}\big([Y=i]\big)\\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+1}\\ &= \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

changement d'indice $k = i+1$

Or, la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k}$ est une troncature d'une série de Riemann divergente car d'exposant 1.

Par conséquent, la série $\sum_{i\geqslant 0} i\mathbb{P}\big([Y=i]\big)$ est divergente.

Petite remarque

L'argument "la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k}$ est une troncature de la série harmonique, qui est divergente" convient parfaitement également.

Conclusion : la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.

3. On note Z l'instant auquel le mobile se trouve pour la deuxième fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Z la valeur 0 si le mobile revient au plus une fois à l'origine. On admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et que $\mathbb{P}\big([Z=0]\big) = 0$.

3.a. Sans justifier, donner $Z(\Omega)$.
$Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

3.b. Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \geqslant j$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z=j]\big)$.
Le second retour à l'origine doit avoir lieu à un instant strictement supérieur à celui du premier...

Conclusion : pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \geqslant j$, $\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z=j]\big) = 0$.

3.c. Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \leqslant j-1$. Établir : $\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z=j]\big) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.

Supposons l'évènement $[Y=i]$ réalisé. Autrement dit, le premier retour à l'origine a lieu à l'instant i.

- Si $j = i+1$:
Sous cette condition ($[Y=i]$ réalisé) : l'évènement $[Z=j]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile reste à l'origine à l'instant $i+1$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z=j]\big) &= \mathbb{P}\big([X_{i+1}=0]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([X_j=0]\big)\\ &= \frac{1}{j+1}\end{aligned}$$

question 1.

- Si $j \geqslant i+2$:
Sous cette condition ($[Y=i]$ réalisé) : $[Z=j]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile se place en dehors de l'origine des instants $i+1$ à $j-1$ puis revient pour la seconde fois à l'origine à l'instant j.
Par conséquent :

✓ Rigueur !

Pour que cette phrase ait bien du sens, il faut que $j-1 \geqslant i+1$, donc que $j \geqslant i+2$: cas dans lequel nous nous sommes bien placés et ça en est même la raison.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z=j]\big) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1}[X_k \neq 0]\right) \cap [X_j=0]\right)\\ &= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \mathbb{P}\big([X_k \neq 0]\big)\right) \mathbb{P}\big([X_j=0]\big)\\ &= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} (1-\mathbb{P}\big([X_k=0]\big)\right) \mathbb{P}\big([X_j=0]\big)\\ &= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \left(1-\frac{1}{k+1}\right)\right) \frac{1}{j+1}\\ &= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{k}{k+1}\right) \frac{1}{j+1}\\ &= \frac{i+1}{j}\,\frac{1}{j+1}\end{aligned}$$

indépendance mutuelle des variables aléatoires $X_{i+1}, \ldots, X_j$

question 1.

télescopage

Les deux cas se regroupent...

Conclusion : pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \leqslant j-1$, $\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z=j]\big) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.

3.d. Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $\mathbb{P}\big([Z=j]\big)$ comme une somme finie.

Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Y=i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{i\geqslant 0} \mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big)$ est convergente et :

Réflexe !
On connaît la loi de Y et les valeurs de $\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z=j]\big)$... On pense donc à utiliser la FPT pour calculer $\mathbb{P}\big([Z=j]\big)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z=j]\big) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big) && \text{relation de Chasles}\\
&= \mathbb{P}\big([Y=0]\cap[Z=0]\big) + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big) && \mathbb{P}\big([Y=0]\big)=0 \text{ et } [Y=0]\cap[Z=0]\subset[Y=0]\\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big) && \forall i\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Y=i]\big)\neq 0\\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big([Y=i]\big)\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z=j]\big) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i]\big)\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z=j]\big) && \text{questions 2.b., 3.a. et 3.b.}\\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i(i+1)}\frac{i+1}{j(j+1)}\\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij(j+1)}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $j\in[\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([Z=j]\big) = \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{ij(j+1)}$.

3.e. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

- On sait que :

  Z admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{j\in Z(\Omega)} \big|j\mathbb{P}\big([Z=j]\big)\big|$ est convergente

  si, et seulement si, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} j\mathbb{P}\big([Z=j]\big)$ est convergente, car $\forall j\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ j\mathbb{P}\big([Z=j]\big)\geqslant 0$

- Soit $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0, j\neq 1}^{N} j\mathbb{P}\big([Z=j]\big) &= \sum_{j=2}^{N} j\mathbb{P}\big([Z=j]\big) && \text{question précédente}\\
&= \sum_{j=2}^{N} j\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{ij(j+1)} && \text{linéarité de la somme}\\
&= \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}
\end{aligned}$$

  Or :

  ✓ pour tout $j\in[\![2;+\infty[\![$, $\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}\geqslant 1$ (car le premier terme de la somme vaut 1 et les autres sont positifs), d'où :

$$\forall j\in[\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}\geqslant\frac{1}{j+1}>0$$

  ✓ la série $\sum_{j\geqslant 2}\frac{1}{j+1}$ est (à décalage d'indice près) une troncature de la série harmonique. Par conséquent, la série $\sum_{j\geqslant 2}\frac{1}{j+1}$ est divergente.

  Ainsi, par critère de comparaison (par inégalités) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{j\geqslant 2}\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}$ est divergente.

  Par conséquent, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} j\mathbb{P}\big([Z=j]\big)$ est divergente.

Conclusion : la variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance.

4. 4.a. Recopier et compléter le programme suivant de sorte que l'exécution de `simulYZ()` renvoie une réalisation de Y et Z.

```python
import numpy.random as rd
def simulYZ():
    n=1
    while ...............:
        n = ......
    Y = ......
    n=n+1
    while ...............:
        n = ......
    Z = ......
    return Y,Z
```

Voici :

```python
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulYZ():
    n=1
    while rd.randint(0,n+1)!=0:
        n=n+1
    Y=n
    n=n+1
    while rd.randint(0,n+1)!=0:
        n=n+1
    Z=n
    return Y,Z
```

4.b. En utilisant la fonction de la question précédente, écrire un programme **Python** dont l'exécution permettrait d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire Y. Proposition :

```python
import matplotlib.pyplot as plt

Labs=[-0.5+k for k in range(0,20)]
LY=[simulYZ()[0] for k in range(10000)]
plt.hist(LY,Labs,density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

☞ Rappel...

En **Python**, les éléments des listes sont indexés à partir de 0. Ici, pour extraire la valeur de Y suite à l'exécution de `simulYZ()`, il faut extraire le terme indexé 0 de la liste... Autrement dit : `simulYZ()[0]`