HEC/ESSEC 2024

Dans tout le sujet on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes les variables aléatoires qui interviennent dans la suite sont définies sur cet espace.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et p un réel appartenant à $]0, 1[$.

Pour générer des graphes non orientés de manière aléatoire, on se donne :

- $S = [\![0, n-1]\!]$ les sommets du graphe ;
- pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ avec $u < v$, $T_{u,v}$ une variable de Bernoulli de paramètre p.
  Les variables $T_{u,v}$, pour $\{u, v\}$ décrivant les paires de sommets avec $u < v$, sont supposées indépendantes ;
- les arêtes d'un graphe G ainsi généré sont les paires $\{u, v\}$ telles que $T_{u,v} = 1$ si $u < v$ ou $T_{v,u} = 1$ si $v < u$.

Dans tout le problème, par convention, une somme portant sur un ensemble d'indices vide vaut 0, un produit vaut 1, une intersection vaut Ω, une réunion vaut $\varnothing$.

Partie 1 - Nombre aléatoire de triangles

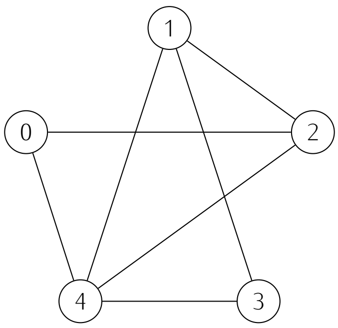
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties $\{u, v, w\}$ à trois éléments de l'ensemble des sommets, r le nombre de ses éléments et on pose

$$\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_r\}$$

Étant donné $t = \{u, v, w\}$, un élément de $\mathcal{T}$, on dit que t est un triangle dans un graphe G généré aléatoirement si $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ et $\{w, u\}$ sont des arêtes de G.

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire de Bernoulli associée à l'événement « t_k est un triangle de G » et Z_n la variable aléatoire égale au nombre de triangle de G.

Par exemple si $n = 5$ et le graphe de G est représenté ainsi,



alors $Z_5 = 3$.

1. Quelle est la valeur de r en fonction de n ?
2. 2.a. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Posons $t_k = \{u, v, w\}$ avec $u < v < w$. Montrer que $Y_k = T_{u,v}T_{v,w}T_{u,w}$.

   2.b. En déduire que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p^3.

   2.c. Justifier que $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} Y_k$. En déduire que $\mathbb{E}(Z_n) = \dbinom{n}{3} p^3$.

► On s'intéresse à la variance de Z_n.
Si i et j appartiennent à $[\![1, r]\!]$ et sont différents, on note $i \equiv j$ lorsque t_i et t_j ont exactement deux éléments en commun et $i \not\equiv j$ dans le cas contraire.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (i, j) tels que $i \equiv j$, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (i, j) tels que $i \neq j$ et $i \not\equiv j$.
On désigne par a_n le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$.

3. 3.a. Montrer que :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i, \sum_{j=1}^{r} Y_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

   3.b. Montrer que si $(i, j) \in \mathcal{F}$, Y_i et Y_j sont indépendantes. En déduire que :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

   3.c. En conclure que :

$$\mathbb{V}(Z_n) = rp^3(1-p^3) + \left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_iY_j)\right) - a_n p^6$$

- On note $\Delta_n = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_i Y_j)$.

4. Montrer que si $i \equiv j$, alors $\mathbb{E}(Y_i Y_j) = p^5$ et en déduire que $\Delta_n = a_n p^5$.
   En conclure que : $\mathbb{V}(Z_n) = \binom{n}{3}(p^3 - p^6) + a_n(p^5 - p^6)$.
5. Calcul de a_n.
   5.a. Déterminer le nombre de triplets $\big(\{u,v\}, w, y\big)$ où (u, v, w, y) sont quatre éléments distincts de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$.
   5.b. En déduire que $a_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$.

Partie 2 – Nombre aléatoire de triangles

On se donne un graphe G généré par le procédé décrit dans le préambule.

On définit la fonction **supprimeDer(L)** qui, si **L** est la liste des listes d'adjacence du graphe G dont les sommets sont $0, 1, \dots, n-1$ modifie **L** afin qu'elle devienne la liste des listes d'adjacence du graphe G', dont les sommets sont $0, 1, \dots, n-2$, obtenu en supprimant dans G le sommet $n-1$ et les arêtes contenant ce sommet.

```
def supprimeDer(L):
    s = len(L)-1
    L.pop()      # supprime le dernier élément de la liste L
    for a in L:
        if s in a:
            a.remove(s) # supprime s dans la liste a
```

6. Compléter la fonction suivante pour qu'elle retourne le nombre de triangles dont un des sommets est le sommet **s** dans le graphe G dont la liste des listes d'adjacence est **L** :

```
def triangles2s(s,L):
    cpt = 0
    adj = L[s]
    for i in range(len(adj)):
        for j in range(...,len(adj)):
            if ... in L[...]:
                cpt += 1
    return cpt
```

7. Écrire une fonction **nbTriangles(L)**, utilisant les deux fonctions précédentes, qui retourne le nombre de triangles du graphe G dont la liste des listes d'adjacence est représentée par **L**.
8. On suppose que la fonction **graphe(n,p)** génère un graphe aléatoire suivant les hypothèses décrites dans le préambule. Expliquer ce que retourne la fonction suivante :

```
def fonctionMystere(n):
    cpt = 0
    for i in range(1000):
        L = graphe(n,1/n)
        if nbTriangles(L) == 0:
            cpt += 1
    return cpt/1000
```

Partie 3 – Inégalité de Harris

k désigne un entier naturel non nul.

- Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^k$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  Si $k \geqslant 2$, on dit que f est k-croissante sur $\mathcal{D}$ si, pour tout $(x_1, \dots, x_k)$ élément de $\mathcal{D}$ et $i \in [\![1, k]\!]$, $t \longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_k)$ est croissante sur son ensemble de définition.
  Si $k = 1$, une fonction 1-croissante sur $\mathcal{D}$ est simplement une fonction croissante sur $\mathcal{D}$.
- On définit de même la notion de fonction k-décroissante.
- On considère $X_1, \dots, X_k$ des variables aléatoires finies.
  On admet le résultat suivant (théorème de transfert d'ordre k) :

Si f est une fonction définie sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_k(\Omega)$ et $Y_k = f(X_1, \dots, X_k)$ alors

$$\mathbb{E}(Y_k) = \sum_{(x_1,\dots,x_k)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_k(\Omega)} f(x_1, \dots, x_k)\mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_k = x_k]\big)$$

On note (H_k) la propriété suivante :

Si $X_1, \dots, X_k$ sont des variables aléatoires finies indépendantes, f et g deux fonctions définies sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_k(\Omega)$ et k-croissantes sur cet ensemble, et si l'on pose $Y_k = f(X_1, \dots, X_k)$ et $Z_k = g(X_1, \dots, X_k)$, alors :

$$\mathbb{E}(Y_k Z_k) \geqslant \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Z_k) \qquad \text{(inégalité de Harris)}$$

9. Dans cette question, $k = 1$, on pose $X = X_1$ une variable aléatoire finie, f et g sont deux fonctions croissantes sur $X(\Omega)$.
   - 9.a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \big(X(\Omega)\big)^2$, $\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0$.
   - 9.b. Montrer que pour tout $y \in X(\Omega)$,
   $$\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) + f(y)g(y) \geqslant g(y)\mathbb{E}\big(f(X)\big) + f(y)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$$
   - 9.c. En déduire que (H_1) est vraie.
10. On suppose que (H_k) est vraie pour un certain k et on considère $X_1, \dots, X_{k+1}$ des variables aléatoires finies indépendantes, f et g deux fonctions définies sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_{k+1}(\Omega)$ et $(k+1)$-croissantes.
   On pose $Y_{k+1} = f(X_1, \dots, X_{k+1})$ et $Z_{k+1} = g(X_1, \dots, X_{k+1})$.
   - 10.a. À l'aide des théorèmes de transfert d'ordre $k+1$ et k, montrer que :
   $$\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) = \sum_{x \in X_{k+1}(\Omega)} \mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_k, x)g(X_1, \dots, X_k, x)\big)\mathbb{P}\big([X_{k+1} = x]\big)$$
   - 10.b. Justifier que pour tout $x \in X_{k+1}(\Omega)$:
   $$\mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_k, x)g(X_1, \dots, X_k, x)\big) \geqslant \mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_k, x)\big)\mathbb{E}\big(g(X_1, \dots, X_k, x)\big)$$
   - 10.c. On pose pour tout $x \in X_{k+1}(\Omega)$, $u(x) = \mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_k, x)\big)$ et $v(x) = \mathbb{E}\big(g(X_1, \dots, X_k, x)\big)$.
   Montrer que u et v sont croissantes sur $X_{k+1}(\Omega)$ et $\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) \geqslant \mathbb{E}\big(u(X_{k+1})v(X_{k+1})\big)$.
   - 10.d. En conclure que (H_{k+1}) est vraie. Conclure.
   - 10.e. La propriété (H_k) reste-t-elle vraie si f et g sont k-décroissantes ? Justifier votre réponse.
   Que se passe-t-il si l'une est k-croissante et l'autre k-décroissante ?

Partie 4 - Inégalité de Janson et application

On reprend les notations de la partie 1.

De plus, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $Z_{n,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} Y_k$. On remarquera que $Z_{n,r} = Z_n$.

Dans cette partie on établit un encadrement de $\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)$.

11. Justifier que $\displaystyle\bigcap_{0 \leqslant u < v \leqslant n-1} [T_{u,v} = 0] \subset [Z_n = 0]$. En déduire que
$$\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \geqslant (1 - p)^{\binom{n}{2}} > 0$$
12. Montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big) = \mathbb{E}(1 - Y_i)$ et $\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) = \mathbb{E}\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{i}(1 - Y_k)\right)$.
13. 13.a. On pose $m = \dbinom{n}{2}$. Justifier brièvement que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, Y_k s'exprime comme une fonction m-croissante sur $\{0, 1\}^m$ des variables aléatoires $T_{u,v}$ pour $u < v$ éléments de $[\![0, n-1]\!]$.
   En déduire que, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, $1 - Y_i$ puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{i-1}(1 - Y_k)$ s'expriment comme des fonctions m-décroissantes des variables aléatoires $T_{u,v}$ pour $u < v$ éléments de $[\![0, n-1]\!]$.
   - 13.b. En conclure que, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, $\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) \geqslant \mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big)\mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big)$ puis que :
   $$\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \geqslant \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \geqslant (1 - p^3)^{\binom{n}{3}}$$
14. *Inégalité de Boole*. Montrer par récurrence sur $k \geqslant 2$ que si $B_1, \dots, B_k$ sont des événements, on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$$

► Si A est un événement de probabilité non nulle, on rappelle que la probabilité conditionnelle sachant A est notée $\mathbb{P}_A$. On admet qu'elle possède les mêmes propriétés que la probabilité $\mathbb{P}$.
En particulier l'inégalité de Boole est vérifiée par $\mathbb{P}_A$.
De plus si X est une variable finie, on note $\mathbb{E}_A(X)$ l'espérance de X pour la probabilité $\mathbb{P}_A$ ce qui signifie que :
$$\mathbb{E}_A(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}_A([X = x])$$
Cette espérance conditionnelle possède les mêmes propriétés que l'espérance, en particulier l'inégalité de Harris vue dans la partie 3.

15. Soient A, B et C trois événements tels que $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A \cap C) \neq 0$.
Montrer que $\mathbb{P}_{B\cap C}(A) \geqslant \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_{A\cap C}(B)$.

► On admet que les probabilités conditionnelles qui interviennent dans la suite sont bien définies.

16. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $A_i = [Y_i = 0]$.
On note aussi $I_i = \left\{j \in [\![1, i-1]\!] / j \equiv i\right\}$ et $J_i = \left\{j \in [\![1, i-1]\!] / j \not\equiv i\right\}$.
Soit $i \geqslant 2$. On définit $B_i = \bigcap_{j \in I_i} A_j$ et $C_i = \bigcap_{j \in J_i} A_j$, ainsi on a : $B_i \cap C_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j$.

16.a. Justifier que A_i et C_i sont indépendants. En déduire que

$$\mathbb{P}_{B_i \cap C_i}(\overline{A_i}) \geqslant \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i)$$

16.b. Établir que $\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \geqslant 1 - \sum_{j \in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j})$.

16.c. **On admet provisoirement que pour $j \in [\![1, i-1]\!]$:**

$$\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \leqslant \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j}) \tag{1}$$

En déduire que $\mathbb{P}_{B_i \cap C_i}(A_i) \leqslant 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i}) \left(1 - \sum_{j \in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right)$.

16.d. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leqslant \exp(-x)$ et en déduire que :

$$\mathbb{P}_{B_i \cap C_i}(A_i) \leqslant \exp\left(-\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{j \in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})\right)$$

17. On rappelle que $\Delta_n = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_i Y_j)$ où $\mathcal{E}$ a été défini dans la partie 1 à la suite de la question 3.

17.a. Montrer que $\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{r} \mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i)$.

17.b. En conclure que :

$$\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \leqslant \exp\left(-\mathbb{E}(Z_n) + \frac{\Delta_n}{2}\right) \qquad \text{(inégalité de Janson)}$$

17.c. En déduire l'encadrement :

$$(1-p^3)^{\binom{n}{3}} \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \leqslant \exp\left(-\binom{n}{3}p^3 + \frac{a_n}{2}p^5\right)$$

18. Soit c un réel strictement positif.

18.a. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} -\binom{n}{3}\left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2}\left(\frac{c}{n}\right)^5 = -\frac{c^3}{6}$.

18.b. Établir que $\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{3} \ln\left(1 - \frac{c^3}{n^3}\right) = -\frac{c^3}{6}$.

18.c. On suppose que $n > c$ et $p = \frac{c}{n}$. En déduire la limite de $\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)$ quand $n \to +\infty$.

19. On reprend les notations de la partie 2.
L'exécution de l'instruction `fonctionMystere(100)` affiche dans la console Python `0.849`. Est-ce cohérent avec le résultat de la question précédente si on considère que pour x assez petit, e^{-x} est proche de $1 - x + \frac{x^2}{2}$?

20. *Démonstration de (1).*
Soit m un entier plus grand que 2. On considère $X_1, \ldots, X_m$ des variables de Bernoulli indépendantes et I un sous-ensemble de $[\![1, m]\!]$. On note J le complémentaire de I dans $[\![1, m]\!]$. On note A l'événement $\left[\prod_{i\in I} X_i = 1\right]$.

20.a. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_m) \in \{0, 1\}^m$,

$$\mathbb{P}_A\big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_m = x_m]\big) = \begin{cases} \prod_{i\in J} \mathbb{P}\big([X_i = x_i]\big) & \text{si } \prod_{i\in I} x_i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

20.b. En déduire que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_m$ sont indépendantes pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$.

► Soit $i \geqslant 2$. On reprend les notations de la question 16.

20.c. Montrer que pour $j \in [\![1, i-1]\!]$, $\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) = \dfrac{\mathbb{E}_{\overline{A_i}}\left(Y_j \prod_{k\in J_i}(1 - Y_k)\right)}{\mathbb{P}_{\overline{A_i}}(C_i)}$.

20.d. En utilisant l'inégalité de Harris, montrer que pour $j \in [\![1, i-1]\!]$: $\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \leqslant \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})$.

★★★★★★★ FIN ★★★★★★★