Grand classique
Variables aléatoires indicatrices

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vocabulaire
On dit que $\mathbb{1}_A$ est **l'indicatrice de l'évènement** A.

Pour info...
Dans le cas plus général où E est un ensemble, $\mathbb{1}_E$ est appelée **fonction caractéristique de** E, et est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas, si

$$f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Propriétés 1

Avec les notations précédentes :

P1# $\mathbb{1}_\varnothing$ suit la loi certaine égale à 0

P2# $\mathbb{1}_\Omega$ suit la loi certaine égale à 1

P3# Pour tout $A \in \mathcal{A}$: si $A \neq \varnothing$ et $A \neq \Omega$, alors $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}\big(\mathbb{P}(A)\big)$

P4# Pour tout $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

P5# Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$: $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

P6# Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$: $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

★ Démonstration :

P1# Par définition, on a : $\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{1}_\varnothing(\omega) = 0$. D'où le résultat.

P2# Par définition, on a : $\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{1}_\Omega(\omega) = 1$. D'où le résultat.

P3# Soit $A \in \mathcal{A}$. Supposons que $A \neq \varnothing$ et $A \neq \Omega$.

- Montrons que $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0; 1\}$.

  $\boxed{\subset}$ Par définition : $\mathbb{1}_A(\Omega) \subset \{0; 1\}$.

  $\boxed{\supset}$ Puisque $A \neq \varnothing$: $1 \in \mathbb{1}_A(\Omega)$. Puisque $A \neq \Omega$: $0 \in \mathbb{1}_A(\Omega)$.

- Ensuite, soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned} \omega \in [\mathbb{1}_A = 1] &\iff \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \\ &\iff \omega \in A \end{aligned}$$

  D'où : $[\mathbb{1}_A = 1] = A$. Et ainsi : $\mathbb{P}\big([\mathbb{1}_A = 1]\big) = \mathbb{P}(A)$.

Conclusion : $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}\big(\mathbb{P}(A)\big)$.

Pour info...
Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors $\mathbb{1}_A$ suit une loi quasi-certaine égale à 0.
Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors $\mathbb{1}_A$ suit une loi quasi-certaine égale à 1.

Petite remarque
On en déduit $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$ et $\mathbb{V}(\mathbb{1}_A)$ aisément.

P4# Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrons : $\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$.
Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :

- Si $\omega \in A$.
  - ⋆ Par définition, on a ainsi $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$.
  - ⋆ Mais, puisque $\omega \in A$, on a $\omega \notin \overline{A}$. D'où $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$.

  Ainsi :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$

- Si $\omega \in \overline{A}$.
  - ⋆ Puisque $\omega \in \overline{A}$, on a $\omega \notin A$, d'où $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$.
  - ⋆ Or $\omega \in \overline{A}$, donc, par définition : $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$.

  Ainsi :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$

Conclusion : $\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$. Autrement dit : $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Méthode !
Il s'agit d'établir une égalité entre deux applications X et Y toutes deux définies sur Ω. On montre donc que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = Y(\omega)$.

P5# Soient $A, B \in \mathcal{A}$. Montrons : $\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$.
Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :

- Si $\omega \in A \cap B$.
  - ⋆ Alors, par définition, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1$.
  - ⋆ Aussi, puisque $\omega \in A \cap B$, on a $\omega \in A$ ET $\omega \in B$. Par définition, on a alors : $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ ET $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$.
    D'où : $\mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega) = 1$.

  Ainsi :

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$

- Si $\omega \in \overline{A \cap B}$.
  - ⋆ Alors, par définition, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$.
  - ⋆ De plus, on sait, d'après la loi de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
    Ainsi, puisque $\omega \in \overline{A} \cup \overline{B}$, on a $\omega \in \overline{A}$ ou $\omega \in \overline{B}$. D'où, par définition : $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ OU $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$. Ce qui donne (règle du produit nul) : $\mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) = 0$.

  Ainsi :

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$$

Conclusion : $\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \times \mathbb{1}_B(\omega)$. Autrement dit : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

P6# Soient $A, B \in \mathcal{A}$. D'après les lois de Morgan, on sait que $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\cup B} &= \mathbb{1}_{\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}} && \text{P4} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}} \times \mathbb{1}_{\overline{B}} && \text{P5} \\
&= 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) && \text{P4} \\
&= 1 - (1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} && \text{P5}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

⋆