Interrogation 1
Lundi 16 septembre 2024

NOM et Prénom ....

Cours

Énoncer les deux critères de comparaison par négligeabilité sur les séries à termes généraux positifs.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On a :

- $\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est convergente}\right)$

- $\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est divergente}\right)$

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1+\dfrac{1}{n} > 0$ et ainsi : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

   Or :

   ✓ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \neq 0$,

   ✓ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

   D'où $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et ainsi :

   $$\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   Par conséquent :

   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

   Et par continuité de l'exponentielle en 0, on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp(0) = 1$$

   Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = 1$.

2. Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2}{3^n}$.

   Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

   $$\sum_{n=0}^{N} \frac{n+2}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

   Or $\dfrac{1}{3} \in]-1;1[$, donc les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ sont des séries géométriques convergentes.

   Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2}{3^n}$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + 2\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\\
&= \frac{1}{3}\frac{3^2}{2^2} + 2\frac{3}{2}\\
&= \frac{3}{4} + 3\\
&= \frac{15}{4}
\end{aligned}
$$

Conclusion : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2}{3^n}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2}{3^n} = \frac{15}{4}$.

3. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$.

On a :

- ✓ pour commencer :
  - ✓ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^2}\neq 0$,
  - ✓ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$.

  D'où :
  $$\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
  Ainsi :
  $$n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
- ✓ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n}\geqslant 0,\ n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\geqslant 0$
- ✓ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est la série harmonique, donc est divergente.

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$ est divergente.

4. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

On a :

- ✓ pour tout $n\in[\![3;+\infty[\![$, $\ln(n)\geqslant 1$ et $\sqrt{n}>0$, d'où :
  $$\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant 0$$
- ✓ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{2}$, donc elle est divergente ($\dfrac{1}{2}\leqslant 1$).

Conclusion : par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ est divergente.

5. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n^2}$.

On a :

- ✓ par croissance comparée : $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\sqrt{n})$. D'où :
  $$\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$
- ✓ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{\ln(n)}{n^2}\geqslant 0,\ \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\geqslant 0$
- ✓ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2}$, donc elle est convergente ($\dfrac{3}{2}>1$).

Conclusion : par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n^2}$ est convergente.